FORMES NON TEMPÉRÉES POUR U(3) ET CONJECTURES DE BLOCH-KATO

JOËL BELLAÏCHE ET GAËTAN CHENEVIER

Résumé : Dans cet article, nous utilisons des familles p-adiques de formes automorphes pour un groupe unitaire à trois variables, passant par des formes non tempérées construites par Rogawski, pour montrer certains cas des conjectures de Bloch et Kato.

Abstract : In this paper, we use p-adic families of automorphic forms for an unitary group in three variables, containing some non-tempered forms constructed by Rogawski, to prove some cases of the Bloch-Kato conjectures.

Table des matières

1. Introduction

1.1. **Énoncé du théorème principal.** Soit E/F une extension CM, (ρ, V) une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, continue, irréductible, et géométrique (cf. [FP, page 650]). On note τ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et $\rho^{\perp}$ la représentation sur V^* donnée par $g \mapsto {}^t\rho(\tau g \tau)^{-1}$. On suppose que la représentation ρ vérifie[1]

$$\rho^{\perp} = \rho(-1), \tag{1}$$

où $\rho(-1)$ est un twist à la Tate de ρ.

Il est conjecturé que la fonction L de ρ, notée $L(\rho, s)$, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en zéro si ρ n'est pas le caractère cyclotomique, ce que nous supposerons. Sous l'hypothèse (1), la fonction $\Lambda(\rho, s)$ déduite de L admet une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(\rho, -s) = \epsilon(\rho, s)\Lambda(\rho, s), \text{ avec } \epsilon(\rho, 0) = \pm 1,$$

[1]Notons par exemple que si ρ_F est une représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ vérifiant $\rho_F^* \simeq \rho_F(-1)$, sa restriction ρ à $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ vérifie 1. C'est la cas par exemple d'un twist convenable des représentations attachées aux formes modulaires.

En particulier, l'examen des facteurs Γ à l'infini montre que $\epsilon(\rho, 0) = -1$ si et seulement si la fonction $L(\rho, s)$ s'annule en 0 à l'ordre impair.

À la suite de Janssen, Bloch-Kato, Fontaine-Perrin-Riou, notons $H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$ le sous groupe de $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$ paramétrant les extensions U de la représentation triviale 1 (sur L) par ρ

$$0 \to V \to U \to 1 \to 0$$

qui ont bonne réduction en toute place, ce qui signifie que les suites

$$0 \to V^{I_w} \to U^{I_w} \to 1 \to 0$$

sont exactes pour toute place w de E ne divisant pas p, I_w désignant un sous-groupe d'inertie en w, et que les suites

$$0 \to D_{cris,w}(V) \to D_{cris,w}(U) \to D_{cris}(1) \to 0$$

sont exactes pour toute place w divisant p. La conjecture de Bloch et Kato (cf. [FP, 3.4.5]) implique que

Conjecture 1.1. *Si* $\epsilon(\rho, 0) = -1$, *alors* $\dim H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho) \geq 1$.

Cet article propose une nouvelle méthode pour aborder cette conjecture, basée sur des congruences entre formes automorphes non tempérées et tempérées. Son but est d'en démontrer le cas particulier suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que E est un corps quadratique imaginaire. Soit χ un caractère de Hecke algébrique sur E, qui vérifie*

$$\chi^{\perp} = \chi|.|^{-1}$$

et dont le type à l'infini est de la forme

$$z \mapsto z^a \bar{z}^{1-a},$$

avec $a \geq 2$. Soit p un nombre premier décomposé dans E et non ramifié pour χ, et $\chi_p : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to L^*$ une réalisation p-adique de χ sur un corps L. Alors, si $\epsilon(\chi, 0) = -1$, on a

$$\dim H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \chi_p) \geq 1.$$

Autrement dit, il existe une extension non triviale ayant bonne réduction partout de la forme

$$0 \to \chi_p \to U \to 1 \to 0. \tag{2}$$

Notons que ce théorème peut se démontrer facilement à partir de la conjecture d'Iwasawa pour les corps quadratiques imaginaires, prouvée par Rubin ([Ru1]). Cependant, notre méthode est différente (Rubin utilise des systèmes d'Euler et non des formes automorphes), susceptible de généralisations ultérieures (voir plus bas) et donne une information supplémentaire : elle prouve que *les réductions modulo m^n, (m idéal maximal de $\mathcal{O}_L$, n entier arbitraire) de l'extension (2) dont le théorème affirme l'existence apparaissent comme sous-quotient de la cohomologie étale de variétés algébriques sur E.* Cet énoncé est prédit par la conjecture de Fontaine-Mazur et ne découle pas de la preuve de Rubin.

1.2. **La méthode.**

1.2.1. Le théorème 1.1 est une généralisation du théorème principal de la thèse d'un des auteurs (cf. [Be1] théorème VIII.1.7.2), où il est prouvé, sous les mêmes hypothèses, l'existence d'une extension non triviale ayant bonne réduction partout sur $\mathcal{O}_L/m$ de la forme $0 \to \bar{\chi}_p \to U \to 1 \to 0$, et ce pour un ensemble de densité non nulle de p. La méthode utilisée ici est similaire à celle de cette thèse, à une variante près (l'emploi de familles p-adiques combinées avec un résultat de Kisin, au lieu d'augmentation du niveau) dont l'idée est due à Urban et Skinner. Ils ont en effet récemment annoncé (cf. [SU]) un analogue du théorème 1.1 pour des formes modulaires ordinaires de niveau 1, par une méthode semblable. Il nous a semblé bon de reprendre cette idée dans notre cas, notamment parce qu'elle nous permet de se passer d'hypothèses sur p, que les familles p-adiques pour $U(n)$ sont construites dans la thèse d'un des auteurs ([Che]), et qu'elle est plus simplement généralisable (voir 1.3).

1.2.2. Expliquons le principe de la méthode employée. La première idée est d'utiliser les formules de multiplicités, données par des conjectures d'Arthur, des représentations automorphes dans le spectre discret. Pour certaines représentations non tempérées, ces formules font apparaître le signe de certains facteurs ϵ. Plus précisément, dans le cas du groupe unitaire U(3) compact à l'infini attaché au corps quadratique imaginaire E, ces formules sont démontrées par Rogawski et affirment que pour χ un caractère de Hecke comme dans l'énoncé du théorème, il existe dans le spectre discret de E une représentation $\pi(\chi)$, minimalement ramifiée[2], dont la représentation galoisienne associée $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(L)$ est de la forme $\rho = \chi_p \oplus 1 \oplus \chi_p(-1)$ si, et seulement si, $\epsilon(\chi, 0) = -1$.

1.2.3. Plaçons-nous sous cette hypothèse. On dispose donc de $\pi(\chi)$ et de sa représentation galoisienne associée ρ. L'étape suivante est d'obtenir une déformation génériquement irréductible ρ' de ρ, i.e. une représentation ρ' de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur un anneau de valuation discrète R de corps résiduel L avec $(\rho' \otimes_R L)^{ss} = \rho$, et $\rho' \otimes_R Frac(R)$ irréductible ; il faut également contrôler la ramification de ρ' ainsi que son comportement aux places divisant p. Le méthode[3] utilisée pour construire ρ' consiste à placer $\Pi(\chi)$ dans une famille p-adique de formes automorphes[4].

Pour contrôler la ramification de ρ' aux places w de E ne divisant pas p, en particulier aux places où χ est ramifié, on est obligé d'imposer aux formes de la famille p-adique construite de contenir certains types de Bushnell et Kutzko. Pour traduire l'existence

[2] Voir la proposition 4.1 pour plus de détails.

[3] Mentionnons ici que l'utilisation systématique des formes automorphes sur les groupes compacts à l'infini dans les questions de congruences semble due à R.Taylor

[4] C'est là la principale différence avec [Be1] où l'on ne construisait qu'une déformation de $\bar{\rho} \simeq \bar{\chi}_p \oplus 1 \oplus \bar{\chi}_p(1)$ à l'aide d'un théorème d'augmentation du niveau. Notons cependant que l'on pourrait aussi prouver le théorème 1.1 à l'aide de cette méthode, en construisant des déformations de $\bar{\rho}$ qui sont congrues à ρ modulo m^n, à l'aide de théorèmes d'augmentation du niveau modulo m^n. On obtiendrait ainsi des extensions modulo m^n, puis on passerait à la limite sur n. Cette méthode fera l'objet d'un travail ultérieure, dans un cadre un peu différent.

de ces types en termes de la ramification de ρ', on bute sur la difficulté suivante : il ne semble pas connu [5] que la construction de la représentation galoisienne ρ attachée à une forme automorphe pour U(3) est compatible, en chaque place, avec la correspondance de Langlands locale. Nous montrons comment contourner cette difficulté. Pour contrôler le comportement de ρ' aux places w divisant p, on utilise une forme convenable d'un résultat récent de Kisin.

1.2.4. La dernier étape consiste à appliquer une vieille idée de Ribet (cf. [Ri]) : l'existence d'une déformation de ρ comme ci-dessus implique l'existence d'extensions non triviales entre les facteurs de ρ. Dans le cas de Ribet, ρ n'avait que deux facteurs et Ribet montrait qu'on pouvait obtenir les extensions d'un facteur par l'autre dans les deux sens possibles. Mais c'est un fait incontournable (cf. [BeG]) que quand ρ a plus de deux facteurs irréductibles, on ne peut assurer l'existence de toutes les extensions entre ces facteurs. On obtient seulement une disjonction d'assertions d'existence. Autrement dit, pour montrer l'existence de l'extension cherchée, on est ramené à montrer la non-existence de certaines autres extensions, non-existence qui a une signification arithmétique globale, étant aussi un cas des conjectures de Bloch-Kato. Dans [Be1] ainsi que dans la méthode décrite dans [SU] (voir *loc. cit.* dernier paragraphe), la preuve de ces cas de non-existence repose sur des résultats récents et difficiles de Rubin ([Ru1]) et de Kato (p-adic Hodge theory and values of Zeta functions of modular forms, prépublication) respectivement. Dans cet article, le seul cas de non-existence que nous avons à vérifier est celui d'une extension ayant bonne réduction partout du caractère trivial par le caractère cyclotomique, qui est une application élémentaire de la théorie de Kummer.

1.3. **Généralisations.** Tout d'abord, l'hypothèse sur p dans le théorème 1.1 est inessentielle, et devrait être supprimée lorsque les familles p-adiques seront disponibles aux places non décomposées et en niveau sauvage (travail en cours d'un des auteurs avec K.Buzzard).

La méthode que nous avons esquissée ci-dessus se prête à des généralisations aux groupes unitaires $\mathrm{U}(n)$ compact à l'infini associé à un corps quadratique imaginaire E. Cependant, on ne dispose pas pour l'instant pour ces groupes, si $n \geq 4$, de la construction d'une représentation galoisienne attachée à chaque forme automorphe et vérifiant les propriétés attendues en presque toute place, pas plus que l'on ne dispose des cas nécessaires des formules de multiplicités d'Arthur (cependant des progrès ont été fait récemment dans le cas $n = 4$). Nous avons néanmoins pris garde à énoncer et à démontrer la plupart des lemmes que nous utilisons sous une forme générale, en vue de leur utilisation pour le cas de $\mathrm{U}(n)$. Nous comptons revenir sur ce cas dans un avenir proche.

Enfin, il semble par contre plus délicat de généraliser cette méthode au cas où E est un corps CM quelconque, et non quadratique imaginaire (voir à ce propos la remarque 9.1).

1.4. **Plan de l'article.** Indiquons brièvement le contenu des différentes parties de cet article. Dans la partie 2, nous fixons les conventions (concernant essentiellement les normalisations de la théorie du corps de classes et de la correspondance de Langlands

[5] On ne peut appliquer à nos formes le résultat principal de [HT] car elles n'en vérifient pas l'hypothèse, à savoir d'être de carré intégrable en au moins une place finie.

locales) et les principales notations que nous utiliserons. La partie 3 décrit la construction par Blasius et Rogawski du système de représentations l-adiques attaché aux formes automorphes pour U(3). Nous démontrons quelques résultats concernant la compatibilité de cette construction avec la correspondance de Langlands locale. La partie 4 construit et décrit la représentation non tempérée $\pi(\chi)$ discutée plus haut.

Les parties 5, 6 et 7 sont rédigées dans une plus grande généralité. La partie 5 fait, pour GL(n), la théorie des différents choix possibles d'une forme propre ancienne de niveau Iwahorique en p, attachée à une forme non ramifiée en p. La partie 6 traite des raffinements des représentations p-adiques cristallines, contrepartie galoisienne de la théorie précédente, et des familles de telles représentations raffinées. On y énonce en particulier, sous une forme adaptée à notre usage, un résultat récent de Kisin. La partie 7 contient les résultats nécessaires sur les pseudo-caractères et les représentations galoisiennes, ainsi que la généralisation adéquate du lemme de Ribet.

Dans la partie 8 nous revenons aux groupes unitaires à trois variables, et construisons des familles p-adiques passant par $\pi(\chi)$. Enfin, la partie 9 montre le théorème principal.

Les auteurs[6] sont heureux de remercier Laurent Berger, Laurent Clozel, Pierre Colmez, Michael Harris, Guy Henniart et Éric Urban pour de nombreuses et utiles conversations durant la réalisation de cet article.

2. Notations et conventions

2.1. **Corps et groupes de Galois.** Dans tout cet article, on note $E \subset \mathbb{C}$ une corps quadratique imaginaire, $\bar{E}$ la clôture algébrique de E dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{A}_E$ l'anneau des adèles de E, W_E et $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ les groupes de Weil et de Galois de $\bar{E}$ sur E. Pour v place de E on notera D_v un sous-groupe de décomposition de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ en v, I_v le sous-groupe d'inertie de D_v, et $\mathrm{Frob}_v \in D_v$ un Frobenius géométrique. On note $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{E}/\mathbb{Q})$ la conjugaison complexe, $\tau^2 = 1$.

2.2. **Anti-auto-duale.** Soit ρ une représentation de W_E ou de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ dans $\mathrm{GL}_n(A)$, où A est un anneau commutatif. On notera $\rho^\perp$ la représentation définie par

$$\rho^\perp(g) = {}^t\rho(\tau g \tau)^{-1}$$

2.3. **Représentations algébriques.** Soit $w = (k_1 \geq \cdots \geq k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note V_w la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}$ de plus haut poids w relativement au Borel supérieur de GL_n. C'est l'unique représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}$ telle que le tore diagonal de GL_n agissent sur la droite stable par le Borel supérieur par $\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{k_i}$. On note

$$\mathbb{Z}^{n,+} := \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 \geq ... \geq k_n\}$$

$$\mathbb{Z}^{n,--} := \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 < k_2 < ... < k_n\}$$

[6]Durant la rédaction de cet article l'un des auteurs (Joël Bellaïche) a bénéficié de l'aide du Bell fund et du Ellentuck Fund

Si $w = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose

$$-w = (-k_n, ..., -k_1) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{et} \quad \delta(w) = \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(k_i - k_{i+1}) \in \mathbb{Z}$$

Si $w \in \mathbb{Z}^{n,+}$, $-w \in \mathbb{Z}^{n,+}$ et $\delta(w) \in \mathbb{N}$. Le dual de V_w est alors V_{-w}. Si F est un corps de caractéristique 0, on notera $V_w(F)$ la représentation de GL_n/F extension des scalaires à F de V_w.

2.4. **Correspondance de Langlands locale.** Nous précisons dans ce paragraphe les conventions choisies pour fixer l'isomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes ainsi que la correspondance de Langlands locale pour GL_n. Soit F un corps de nombres, on normalise l'isomorphisme d'Artin de la théorie du corps de classes globale

$$\mathrm{rec}_F : \mathbb{A}_F^*/\overline{F^*(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{0,*}} \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{ab}$$

en demandant qu'il envoie toute uniformisante locale π_v en une place finie v sur le Frobenius *géométrique* de D_v/I_v, avec l'abus de langage évident. Pour toute place v de F, on dispose alors par restriction de rec_F, d'un isomorphisme du corps de classes local

$$\mathrm{rec}_{F_v} \ : \ F_v^* \longrightarrow W_F^{ab}$$

compatible à l'isomorphisme global.

Supposons maintenant que F est un corps local non archimédien. On choisit la normalisation *à la Langlands* pour la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_n(F)$, notée L (voir par exemple [Ha] p.2). Ainsi, pour π une représentation irréductible lisse de $\mathrm{GL}_n(F)$, $L(\pi)$ est une représentation complexe Φ-semisimple de dimension n du groupe de Weil-Deligne WD_F (cf. [Ta, 4.1]). Pour $n = 1$, π est un caractère de $\mathrm{GL}_1(F) = F^*$ et $L(\pi)$ est le caractère de W_F qui s'en déduit via l'isomorphisme rec_{F_v} ci-dessus. Par exemple, L envoie le quotient de Langlands de l'induite parabolique attachée à deux représentations lisses irréductible π_1 et π_2 sur la somme directe $L(\pi_1) \oplus L(\pi_2)$.

Soit l un nombre premier, on fixe $\iota_l : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$ un isomorphisme de corps. Pour π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, F un corps local non archimédien, on peut voir $L(\pi)$, par transport de structure via ι_l comme une représentation sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ en fait définie sur une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, et on peut donc lui associer une représentation notée $L_l(\pi)$ du groupe de Weil ordinaire W_F sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$, comme en [Ta, 4.2.1].

2.5. **Caractères de Hecke.** Soit $\chi : E^*\backslash\mathbb{A}_E^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère de Hecke de E, pour toute place v de E on note χ_v la restriction de χ à E_v^* et χ_f sa restriction aux idèles finies $\mathbb{A}_{f,E}^*$. On identifie $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ via l'inclusion $E \subset \mathbb{C}$. On suppose dans ce qui suit que χ est algébrique, i.e $\chi_\infty(z) = z^a \bar{z}^b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, et on fixe encore l et ι_l comme dans la section précédente en supposant de plus $l = v_1 v_2$ totalement décomposé dans E, v_1 étant la place définie par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$. À (χ, ι_l) on peut alors associer un caractère continu $\overline{E^*}\backslash\mathbb{A}_{f,E}^* \to \overline{\mathbb{Q}}_l^*$ défini par la formule :

$$x \mapsto \iota_l(\chi_f(x)))x_{v_1}^a x_{v_2}^b$$

Par composition avec rec_E, on en déduit un caractère l-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ que nous noterons χ_l (à ne pas confondre avec une composante locale de χ, mais c'est sans ambiguïté).

2.6. **Poids de Hodge.** Dans ce paragraphe, p est un nombre premier fixé, μ_{p^n} désigne le $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-module des racines p^n-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note ω le caractère cyclotomique $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p}(\lim_{n\leftarrow\infty} \mu_{p^n}) = \mathbb{Z}_p^*$. On note $\mathbb{Q}_p(1)$ le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ par le caractère cyclotomique. Notre convention est que cette représentation est de Hodge-Tate de poids de Hodge-Tate -1 (cf. [Sen1]). Si $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{Q}_p(n) := \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes n}$, et si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, $V(n) := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(n)$.

Si F est un corps local et V un F-espace vectoriel de dimension finie qui est une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, nous noterons $D_{cris}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ (cf. [Fo1] §2.3, 3.1). Il hérite de B_{cris} d'un endomorphisme K-linéaire φ, le Frobenius cristallin, et lorsque nous parlerons des valeurs propres de ce dernier, ce sera toujours vu comme K-endomorphisme. On rappelle que V est dite cristalline sur $\dim_K D_{cris}(V) = \dim_K(V)$ (cf. [Fo2] 5.4). On parlera parfois, par abus, du Frobenius cristallin de V pour celui de $D_{cris}(V)$.

2.7. **Géométrie rigide.** Si X/F est un affinoide sur un corps local F, on notera $A(X)$ la F-algèbre affinoide de X. Si X est réduit, la norme sup. sur X fait de $A(X)$ une F-algèbre de Banach commutative. On notera $A(X)^0$ les éléments de $A(X)$ de norme ≤ 1. $\mathbb{A}^n$ désigne l'espace affine rigide analytique de dimension n sur $\mathbb{Q}_p$.

3. Rappel sur la classification de Rogawski

3.1. **Les groupes unitaires considérés.** Soit f la forme hermitienne sur E^3 de matrice

$$\begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

Comme Rogawski ([Rog1] p. 66,67), on note $\mathrm{U}(2,1)$ le groupe unitaire sur $\mathbb{Z}$ défini par cette forme, il est quasi-déployé. On fixe $\mathrm{U}(3)$ une forme intérieure de $\mathrm{U}(2,1)$ compacte à l'infini, inchangée aux places finies ([Cl, lemme 2.1]).

3.2. **Classification de Rogawski.**

3.2.1. Suivant Rogawski, et comme prédit par les conjectures d'Arthur, les représentations automorphes discrètes des groupes $\mathrm{U}(2,1)$ et $\mathrm{U}(3)$ sont regroupées en A-paquets de 5 types ([Rog1, 2.9]). Chaque A-paquet Π possède un changement de base π_E qui est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}(3)/E$ ([Rog1, 2.8]).

3.2.2. Étant donné un nombre premier l et un isomorphisme de corps $\iota_l : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$, on peut associer, grâce aux travaux de Rogawski, à un A-paquet Π de U(3) (resp. de U(2,1) s'il est cohomologique à l'infini) une représentation l-adique continue, semi-simple, découpée dans la cohomologie l-adique des surfaces de Picard :

$$\rho_l(\Pi) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_l),$$

caractérisée par la propriété suivante, pour toute place finie w de E :

(3) Si w ne divise pas $l\mathrm{disc}(E)$ et si $(\pi_E)_w$ est non ramifiée, $\rho_l(\Pi)_{|D_w} \simeq L_l((\pi_E)_w)$

Autrement dit ρ_l est non ramifiée en w, et le polynôme caractéristique d'un Frobenius géométrique Frob_w est égal à celui de la matrice de Hecke de $(\pi_E)_w$. En conséquence, $\rho_l \simeq \rho_l^{\perp}$. Lorsque Π est sous-entendu, on notera ρ_l pour $\rho_l(\Pi)$. Bien que le choix de ι_l n'est pas apparent dans la notation ρ_l, il sera toujours sous-entendu.

3.2.3. Nous nommons et décrivons ci-dessous les 5 types de A-paquets, ainsi que les propriétés des représentations galoisiennes associées quand elles existent. Quand le A-paramètre a et le L-paramètre ϕ du changement de base π_E du paquet considéré ont un sens non conjectural (i.e. se factorise par le quotient $W_E \times SL_2(\mathbb{C})$ du groupe conjectural $L_E \times SL_2(\mathbb{C})$), nous les donnons.

L'existence de ρ_l satisfaisant 3 résulte, dans les cas non triviaux, du théorème 1.9.1 de [BR1] (voir aussi [Rog1] §4.4), mais le lecteur prendra garde que la définition de ρ_l que nous prenons (motivée par la vérification de 3 §3.2.2) ne coïncide pas avec la représentation appelée ρ_l *loc. cit.*, que nous noterons $\rho_{l,rog}$ ci-dessous (qui d'ailleurs n'est pas toujours de dimension 3).

- Cas stable tempéré ; l'existence de ρ_l résulte de [BR1, théorème 1.9.1 (a)]. Notre ρ_l est $\rho_{l,rog}(1)$ avec les notations de *loc. cit.* La représentation ρ_l est irréductible[7] et satisfait $\rho_l \simeq \rho_l^{\perp}$.
- Cas endoscopique tempéré de type $(2,1)$; l'existence de ρ_l résulte de [BR1, théorème 1.9.1 (b)] (on définit ρ_l comme $\rho_{l,rog}(1) \otimes \chi_l^{-1} \oplus \chi_l(1)$ avec les notations de *loc. cit.*).
  On a $\rho_l \simeq \tau_l \oplus \chi_l$, avec τ_l irréductible de dimension 2, $\tau_l \simeq \tau_l^{\perp}$, $\chi_l = \chi_l^{\perp}$.
- Cas endoscopique tempéré de type $(1,1,1)$; le A-paramètre a est trivial sur facteur $SL_2(\mathbb{C})$, et l'on a
  $$a_{|L_E} = \phi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3,$$
  $\psi_i : W_E \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $\psi_i = \psi_i^{\perp}$. Les A-paquets de ce type sont cohomologiques quand les caractères de Hecke ψ_i sont algébriques, on définit ρ_l par $(\psi_1)_l \oplus (\psi_2)_l \oplus (\psi_3)_l$.
- Cas endoscopique non tempéré ; le A-paramètre a vérifie
  $$\forall w \in W_E,\ a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix}$$

[7]Nous ne nous servirons pas de ce fait. Voir la remarque suivant la proposition 9.1

où χ et ψ sont des caractères de Hecke de E vérifiant $\chi = \chi^\perp$, $\psi = \psi^\perp$, et

$$a_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Nous noterons le A-paquets correspondant $\Pi(\chi, \psi)$. Le L-paramètre ϕ vérifie donc

$$\forall w \in W_E,\ \phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|w|^{1/2} & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w)|w|^{-1/2} \end{pmatrix},$$

et l'on pose, si $\chi|\ |^{1/2}$ et ψ sont algébriques, auquel cas ϕ est cohomologique à l'infini

$$\rho_l = (\chi|\ |^{1/2})_l \oplus \psi_l \oplus (\chi|\ |^{-1/2})_l.$$

Nous analyserons les A-paquets de ce type de manière beaucoup plus détaillée dans la section suivante.

– Cas stable non tempéré ; le A-paramètre a vérifie

$$\forall w \in W_E,\ a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix},$$

où χ est un caractère de Hecke de E vérifiant $\chi = \chi^\perp$ et $a_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ est la représentation irréductible de dimension 3. On a donc pour L-paramètre

$$\phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|.|^{-1} & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w)|.| \end{pmatrix},$$

où $\chi \simeq \chi^\perp$. Les A-paquets correspondants sont des singletons, composés des représentations automorphes de dimension 1.

3.3. **Propriétés de ρ_l.** On conjecture naturellement que la construction $\Pi \mapsto \rho_l$ est compatible avec la correspondance de Langlands locale. Plus précisément, on s'attend à ce que l'énoncé suivant soit vérifié :

(COMP) *Si Π est un A-paquet, de changement de base π_E, alors pour tout l, et pour toute place finie v de E ne divisant pas l, la Frobenius-semi-simplifié de la représentation galoisienne $(\rho_l)_{|D_v}$ est isomorphe à $L_l((\pi_E)_v)$.*

Il est vrai pour les places finies v ne divisant pas disc(E) et où le A-paquet local Π_v est non ramifié (c'est la propriété (3), §3.2.2). De plus, les travaux de Harris-Taylor [HT, théorème C] montrent qu'il est vrai à pour tout v si π_E est de carré intégrable à au moins une place finie[8]. Malheureusement cette hypothèse ne sera jamais vérifiée dans les cas que nous aurons à traiter.

Nous allons démontrer dans ce qui suit les cas particuliers de (COMP) dont nous aurons besoin. La propriété suivante est une extension de la propriété (3) aux places divisant

[8]Plus exactement, qu'il est vrai à semi-simplification de l'opérateur de monodromie près.

disc(E). Il sera utile de nous placer dans un contexte un peu plus général : soit F un corps totalement réel, $\mathrm{U}(3)/F$ le groupe unitaire à trois variables associé à l'extension EF/F, compact à toutes les places à l'infini. Pour Π un A-paquet de $\mathrm{U}(3)/F$, les travaux de Rogawski définissent encore, tout comme dans le cas $F = \mathbb{Q}$, un changement de base π_{EF} à $\mathrm{GL}(3)/EF$, et des représentations galoisiennes ρ_l de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/EF)$, vérifiant l'analogue de (3) §3.2.2.

Proposition 3.1. *Si Π est un A-paquet de $U(3)_F$, de changement de base π_{EF}, alors pour tout l, et pour toute place finie v de EF ne divisant pas l où π_{EF} est non ramifiée, $\rho_l|D_v$ est non ramifiée.*

Preuve : Soit v une place finie de EF ne divisant pas l et telle que $(\pi_{EF})_v$ est non ramifiée, on veut montrer que ρ_l est non ramifiée en v. On note w la place de F que divise v. Montrons d'abord le résultat si w ne divise pas le discriminant relatif de EF/F.

Soit G'_F une forme intérieure de $\mathrm{U}(3)_F$ quasi-déployée à toutes les places finies de F et à une seule place infinie. Par [Rog1, théorème 2.6.1], le A-paquet Π se transfère en un A-paquet Π' cohomologique du groupe G'_F. Le groupe G'_F satisfait les hypothèses de [Rog1] §4, et d'après *loc. cit.* §4.4, $\rho_l(-1)$ est construite dans la cohomologie à coefficients de la variété de Shimura associée à G'_F. Comme $(EF)_v/F_w$ est non ramifiée, ainsi que $\Pi'_w = \Pi_w$, le choix d'un membre non ramifié en w du A-paquet Π' assure que $\rho_l(-1)$ est construite dans la cohomologie à coefficients d'une surface de Picard de niveau fini hyperspécial en w. Or cette variété de Shimura a bonne réduction en v : cela résulte d'un simple calcul de déformation du problème de modules dont cette variété de Shimura est l'espace de module, comme celui fait en [Be1, proposition II.2.1.5]. Cela conclut.

Nous n'allons traiter en détail le cas restant que quand Π est stable, les cas endoscopiques se ramenant à des cas stables[9] pour le groupe $U(2) \times U(1)$ par la classification de Rogawski du §3.2. On suppose donc Π stable. D'après [Rog4, théorème 13.3.3(b)], soit π_{EF} est cuspidale, soit Π est le A-paquet d'une représentation de dimension 1. Dans ce dernier cas, la proposition découle de la théorie du corps de classes, on supposera donc que π_{EF} est cuspidale dans ce qui suit.

Supposons que v divise le discriminant de EF/F, en particulier v divise un premier $p \in \mathbb{Z}$ ramifié dans E, $p \neq l$. Soit F' un corps quadratique réel ramifié en p et tel que EF'/F' est décomposé en l'unique place de F' au-dessus de p. Il est aisé de voir qu'un tel corps existe toujours. Par exemple si $p \neq 2$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{pD})$ avec $-D \in \mathbb{N}$ sans facteur carré, alors il existe $D' \in \mathbb{N}$ premier à p et sans facteur carré tel que DD' est un carré modulo p, $F' = \mathbb{Q}(\sqrt{pD'})$ convient. Alors EF ne contient pas F', FF' est totalement réel et ramifié au dessus de w, en une place que l'on note w', et EFF'/FF' est alors décomposé au dessus de w'.

[9]Strictement, il aurait fallut aussi traiter en parallèle, dans le second paragraphe de la preuve de la proposition, le cas du groupe $U(2) \times U(1)$, mais qui n'est que plus facile. De manière générale, nous ne traiterons en détails dans cette section que le cas stable tempéré, car c'est le seul dont nous ayons réellement besoin dans les applications au §9. Par exemple, utilisant la proposition 9.1, il est aisé de vérifier que les ρ_z, $z \in Z$, de la proposition 8.3 ii) sont attachées à des représentations automorphes de $U(3)$ qui sont stables tempérées.

Notons $\pi_{EFF'}$ le changement de base d'Arthur-Clozel ([AC], théorème III.4.2) de π_{EF} à EFF'. La représentation $\pi_{EFF'}$ est cuspidale par le théorème 4.2 (a) *loc.cit.*, car EFF'/EF est quadratique et $n = 3$. De plus, $\pi_{EFF'}$ est anti-autoduale car c'est déjà le cas de π_{EF}, et par multiplicité 1 forte dans le spectre cuspidal de $\mathrm{GL}(3)_{EFF'}$. D'après Rogawski [Rog4, théorème 13.3.(a)], $\pi_{EFF'}$ descend en un A-paquet stable $\Pi_{FF'}$ du groupe unitaire à trois variables quasi-déployé $\mathrm{U}(2,1)_{FF'}$ sur FF', et même à $\mathrm{U}(3)_{FF'}$ par la propriété de relèvement fort à l'infini du changement de base d'Arthur-Clozel ([AC] théorème III.5.1) et [Rog] théorème 2.6.1. Mais s'il on suit les constructions précédentes, un groupe de décomposition en v de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/EF)$ s'identifie à un groupe de décomposition en w' de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/EFF')$, et $\pi_{EFF'}$ est toujours non ramifiée en w'. On applique alors le premier paragraphe à FF' et $\Pi_{FF'}$, ce qui conclut. $\square$

Proposition 3.2. *Soit* Π *un* A*-paquet de* $U(3)$*,* l *un nombre premier,* v *une place finie de* E *ne divisant pas* l*, telle que* $L((\pi_E)_v) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3$*, où les* ϕ_i *sont des caractères continus* $E_v^* \to \mathbb{C}^*$*. Soit* $I' := \mathrm{rec}_v(Ker((\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3)_{|\mathcal{O}_{E_v}^*}))$*, alors* $\rho_l(I') = 1$*.*

Preuve : Nous n'allons traiter en détail que le cas où Π est stable, les cas endoscopiques se traitant de manière analogue en se ramenant à des cas stables pour le groupe $U(2) \times U(1)$ par la classification de Rogawski du §3.2. D'après [Rog4, théorème 13.3.3(b)], soit π_E est cuspidale, soit Π est le A-paquet d'une représentation de dimension 1. Dans ce dernier cas, la proposition découle de la théorie du corps de classes, on supposera donc que π_E est cuspidale dans ce qui suit.

Nous allons appliquer le changement de base d'Arthur-Clozel à π_E. On rappelle, d'après [AC, théorème III.4.2 (a)], que si k'/k est une extension cyclique de degré premier et π est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n)/k$, alors π admet un changement de base faible à $\mathrm{GL}(n)/k'$, qui est cuspidale si π n'est pas isomorphe à $\pi \otimes \chi$, χ étant un caractère non trivial de $\mathbb{A}_k^*/k^*$ attaché à k'/k. Notons que dans notre cas ($n = 3$), cette dernière condition est donc automatiquement satisfaite si $[k' : k] \neq 3$, ou encore si k'/k est ramifié en une place où π ne l'est pas.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ premier au dessous de v, considérons l'extension abélienne finie de E_v définie par

$$M := \overline{E_v}^{\mathrm{rec}_{E_v}(\mathrm{Ker}(\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3))}$$

Supposons que l'on sache trouver un corps de nombres $F/\mathbb{Q}$ ayant les propriétés suivantes :

i. F est totalement réel,
ii. Il existe une tour d'extensions $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_r = F$, telle que F_{i+1}/F_i soit cyclique d'ordre premier et telle que le changement de base de π_{EF_i} à EF_{i+1}, noté $\pi_{EF_{i+1}}$, soit cuspidal.
iii EF admet une place w divisant v telle que $(EF)_w/E_v$ soit isomorphe à M/E_v.

En particulier, on dispose d'un changement de base cuspidale π_{EF} de π_E à EF, qui est en fait fort, *i.e.* compatible au changement de base local en toutes les places, d'après [AC, théorème III.5.1]. Appliquant ceci à l'extension $(EF)_w/E_v$, l'hypothèse iii. assure que $(\pi_{EF})_w$ est non ramifiée. La représentation π_E étant anti-autoduale, le théorème de multiplicité 1 forte dans le spectre cuspidal de $\mathrm{GL}(3)_{EF}$ entraîne qu'il en va de même pour

π_{EF}. D'après [Rog4, théorème 13.3.3 (a)], π_{EF} descend donc en un A-paquet (stable) du groupe $\mathrm{U}(2,1)_F$, puis à $U(3)_F$ par la propriété de relèvement fort à l'infini du changement de base d'Arthur-Clozel. La proposition 3.1 appliquée à ce paquet conclut.

Il reste à trouver un corps de nombres F comme plus haut. Fixons $F_1/\mathbb{Q}$ un corps quadratique réel ayant une place v' divisant p tel que $(F_1)_{v'} \simeq E_v$. L'extension EF_1/E étant quadratique, une remarque faite plus haut assure que π_{EF_1} est cuspidal. Considérons une tour $G_1 = (F_1)_{v'} = E_v \subset G_2 \subset ... \subset G_r = M$ avec des G_{i+1}/G_i cycliques d'ordre premier noté q_i. Nous allons construire les F_i satisfaisant ii. récursivement tels que F_{i+1} admette une place w_{i+1} divisant w_i, $(F_i)_{w_i} \simeq G_i$, et $w_1 = v'$. Supposons un tel F_i construit. Fixons une place finie u de EF_i telle que $(\pi_{EF_i})_u$ est non ramifiée, que u ne divise pas $\mathrm{disc}(E)$, et telle que $(F_i)_u$ admette une extension ramifiée (par exemple modérément) de degré q_i. Appliquons Artin-Tate [AT, théorème 5, page 103] à F_i et l'ensemble fini de places S composé de w_i, u et des places infinies. On en déduit l'existence d'une extension abélienne k/F_i, finie de degré q_i ou $2q_i$, totalement réelle, ayant une place w' (resp. u') divisant w_i (resp. u) telle que $k_{w'}/(F_i)_{w_i} \simeq G_{i+1}/G_i$ (resp. $k_{u'}/(F_i)_u$ est ramifiée de degré q_i). Si q_i est impair, il est clair que l'on peut supposer que $[k : F_i] = q_i$. Dans ce cas, $F_{i+1} := k$ et $w_{i+1} := w'$ conviennent car EF_{i+1}/EF_i est ramifié en une place où π_{EF_i} ne l'est pas. Si $q_i = 2$, alors prend pour F_{i+1}/F_i une sous-extension quadratique de k/F_i telle que $(F_{i+1})_{w'} = G_{i+1}$, $w_{i+1} := w'_{|F_{i+1}}$. Comme EF_{i+1}/EF_i est quadratique, F_{i+1} satisfait aussi ii. $\square$

Proposition 3.3. *Soit l un nombre premier décomposé dans E, ι_l comme plus haut, Π un A-paquet pour $U(3)$ de changement de base π_E, v une place de E divisant l telle que $(\pi_E)_v$ est non ramifiée, alors :*

(1) *$(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ est cristalline en v.*

(2) *Le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin de $(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ est l'image par ι_l de celui de $L((\pi_E)_v)(\mathrm{Frob}_v)$, Frob_v étant un Frobenius géométrique de W_{E_v},*

(3) *Si le L-paramètre de Π_∞ a sa restriction à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ de la forme $(z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}$ avec $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$, $a_1 > a_2 > a_3$, alors les poids de Hodge-Tate de $(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ sont les $-a_i$ si v est la place de E induite par $E \subset \mathbb{C} \stackrel{\iota_l}{\to} \overline{\mathbb{Q}}_l$, les a_i sinon.*

Preuve : La proposition est immédiate si le L-paramètre de Π est somme de trois caractères, il ne reste donc qu'à traiter les cas où Π est stable tempéré ou endoscopique tempéré de type $(2,1)$ (cf. §3.2). Nous nous placerons par exemple dans le premier cas, le second se traitant de manière identique.

Soit F un corps quadratique réel. Un argument déjà donné dans la preuve de la proposition 3.1 montre que le changement de base d'Arthur-Clozel de π_E à EF est une représentation automorphe cuspidale qui descend en un A-paquet stable Π_F de $\mathrm{U}(3)_F$. D'après [Rog1, théorème 2.6.1], ce paquet se transfère en un A-paquet Π'_F cohomologique stable du groupe G'/F suivant : G'/F est une forme intérieure du groupe quasi-déployé sur $\mathrm{U}(2,1)/F$, non quasi-déployé uniquement à l'une des deux places infinies. Notons que les variétés de Shimura attachées à G'/F [10], les *surfaces de Picard*, ont des modèles canoniques qui sont des variétés quasi-projectives lisses sur EF (cf. [Go] §6), et même projectives car G'/F est anisotrope. On fixe un élément $\pi \in \Pi'_F$, ainsi qu'un ouvert compact net $U \subset G'(\mathbb{A}_{F,f})$ tel que $\pi^U \neq \{0\}$. D'après [Rog1] §4.3, §4.4 ("Case 2" dans le cas stable tempéré), la représentation

$$\rho'_l := \rho_l(\pi)(-1)_{|\mathrm{Gal}(\overline{EF}/EF)},$$

apparaît dans la cohomologie l-adique en degré 2 d'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau lisse, noté $\mathcal{F}$ *loc.cit*[11], sur la surface de Picard de niveau fini U, que l'on note X_U/EF. Afin de construire un motif de Grothendieck dont ρ'_l est une réalisation l-adique, il nous faut tout d'abord nous débarrasser du coefficient $\mathcal{F}$. Comme il est coutume, nous réalisons ce motif dans la cohomologie l-adique à coefficient constant d'une variété de Kuga sur X_U. Soit $\mathcal{A} \to X_U$ le schéma abélien universel sur X_U, on note $\mathcal{A}^m$ le produit fibré m-fois de $\mathcal{A}$ au dessus de X_U ; $\mathcal{A}^m$ est en particulier propre et lisse sur EF. Le $\overline{\mathbb{Q}}_l[\mathrm{Gal}(\overline{EF}/EF)]$-module $H^2_{et}(X_U \times \overline{EF}, \mathcal{F})$ est alors un facteur direct découpé par une correspondance algébrique idempotente de

$$H^{2+m_{\mathcal{F}}}_{et}(\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}} \times \overline{EF}, \overline{\mathbb{Q}}_l)(t_{\mathcal{F}}),$$

pour des entiers $m_{\mathcal{F}}$ et $t_{\mathcal{F}}$ bien choisis. Ceci est expliqué en détail dans [HT, chap. III.2 p.98]. Notons pour finir que d'après [Rog1]§4.3 (fin du paragraphe), la multiplicité 1 dans le spectre discret de G' assure même que l'on peut découper exactement ρ'_l par des correspondances de Hecke, plutôt que simplement un de ses multiples.

On supposera par la suite que $l = uu'$ est décomposé dans F, et on note $v \times u$ le plongement $EF \to \mathbb{Q}_l$ déduit de v et u. Ces données nous permettent en particulier de fixer un isomorphisme $G'(F_u) \to \mathrm{GL}(3)(\mathbb{Q}_l)$, d'identifier Π_l avec $(\Pi'_F)_u$, et D_v au groupe de décomposition en $v \times u$ de $\mathrm{Gal}(\overline{EF}/EF)$. Par hypothèse de l'énoncé, $(\Pi'_F)_u$ est non ramifié et on peut donc choisir un compact ouvert net U égal à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)$ en u, ainsi que $\pi \in \Pi'_F$ tel que $\pi^U \neq \{0\}$. Dans ce cas, $\mathcal{A}_U \to X_U$ a un modèle propre et lisse sur $\mathcal{O}_{(EF)_{v\times u}}$ (cf. par exemple [Ko] §5), ainsi donc que $\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}}$. L'assertion 1 découle de ce que la cohomologie l-adique à coefficient dans $\mathbb{Q}_l$ d'un schéma propre et lisse sur $\mathbb{Z}_l$ est cristalline (cf. [Fo2] théorème 6.1.4, [Fa]).

La propriété 2 découle de manière standard de la construction motivique de ρ'_l explicitée ci-dessus et d'un théorème de Katz-Messing ([KM, théorème 2.2]), combinés à (3) §3.2.2 et [SGA4, corollaire 2.2]. Prouvons la propriété 3. La construction motivique ci-dessus et le théorème de comparaison *DeRham-étale* de Faltings (cf. [Fa][12], [Fo2, §6.1]) appliqué à $H^{2+m_{\mathcal{F}}}_{et}(\mathcal{A}^{m_{\mathcal{F}}} \times \overline{EF}, \overline{\mathbb{Q}}_l)(t_{\mathcal{F}})$, entraînent que les poids de Hodge-Tate de $(\rho'_l)_{|D_v}$ sont les poids de Hodge de la réalisation de De Rham de ρ'_l associée au plongement

[10]Plus précisément, celles attachées au groupe de similitudes unitaires contenant G'/F ([Go]§6), cf. [Rog1] §2.5 pour le lien entre A-paquets de G' et du groupe de similitudes.

[11]Il ne dépend que de Π_∞, sa construction est par exemple expliquée en détail dans [HT] chapitre III.2

[12]Ainsi qu'il est discuté dans [Fo2] §6.1, il y a un *point obscur* dans la preuve de C_{dR}. Nous n'utilisons ici les résultats de *loc.cit.* que dans le cas de la cohomologie l-adique à coefficient constant d'un schéma propre et lisse sur $\mathbb{Z}_l$, pour lequel l'objection ne s'applique pas.

complexe $\iota_l^{-1}(v \times u)$. L'identification de ces derniers en terme des a_i est une conséquence de [HT] proposition III.2.1 (6), la preuve étant détaillée *loc.cit.* dans les pages 99 à 104. Précisons que les arguments du §III.2 *loc.cit.* sont aussi valables pour notre groupe unitaire G'/F (qui ne diffère des leurs qu'en des places finies), à l'unique "modification" près suivante. La référence à Kottwitz en bas de la page 103 (au sujet de la formule de Matsushima) peut être remplacée par un appel à Rogawski [Rog1] §4.3 page 89. □

4. Représentation non tempérée attachée à un caractère de Hecke

4.1. **Hypothèses sur le caractère de Hecke.** Soit χ_0 un caractère de Hecke de E, vérifiant

$$\chi_0(z\bar{z}) = 1, \forall z \in \mathbb{A}_E^*, \qquad \text{et} \qquad \chi_{0,\infty}(z_\infty) = z_\infty^k/|z_\infty|_{\mathbb{C}}^{k/2},\ k \text{ est un entier impair positif}$$

Par la première hypothèse, sa fonction L complète $L(\chi_0, s)$ a pour équation fonctionnelle ([Ta] 3.6.8 et 3.6.1)

$$L(\chi_0, 1-s) = \varepsilon(\chi_0, s)L(\chi_0, s),\ \ \varepsilon(\chi_0, 1/2) = \pm 1$$

On utilisera de plus le caractère algébrique $\chi := \chi_0|.|^{1/2}$, dont on note χ_v la composante locale en une place v de E. On a $\chi^\perp = \chi|.|^{-1}$, et si ∞ désigne $E \subset \mathbb{C}$, $\chi_\infty(z) = z^{(k+1)/2}\bar{z}^{(1-k)/2}$. On notera $\mathrm{cond}(\chi_0)$ le conducteur de χ_0, qui est aussi celui de χ, et $\mathrm{disc}(E)$ le discriminant de E.

Dans les sous-parties qui suivent, nous décrivons, suivant Rogawski, les composantes locales du A-paquet endoscopique non tempéré $\Pi(\chi, 1)$.

4.2. **Composantes locales en p décomposé.**

4.2.1. Soit $p = v_1 v_2$ un nombre premier décomposé dans E, la donnée des v_i nous fournit un isomorphisme $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_3(E_{v_i}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Il faut noter que ces deux isomorphismes diffèrent d'un automorphisme extérieur de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Fixons celui avec v_1 par exemple.

4.2.2. Soit $P = MN$ le parabolique standard de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de type $(2,1)$, considérons le caractère complexe lisse λ_p de $M = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ défini par $\lambda_p(x,y) = \chi_{0,v_1}(\det(x))$. L'induite parabolique normalisée de λ_p est irréductible ([Rog2] p.196), on la note $\pi_p^n(\chi_0)$.

4.2.3. Si χ est non ramifié en p (décomposé), $\pi_p^n(\chi_0)$ est non ramifiée, et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal. On en choisit un, noté K_p, égal à $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Z}_p)$ pour p assez grand ([T, 3.9.1]).

4.3. **Composantes locales en p inerte ou ramifié.**

4.3.1. Suivant Rogawski ([Rog2] p. 396), définissons pour p un nombre premier inerte ou ramifié dans F, une représentation lisse irréductible $\pi_p^n(\chi_0)$ de $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ de la manière suivante :

On voit $\chi_{0,p}$ comme caractère du tore diagonal de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_p(\alpha)$$

L'induite parabolique normalisée de $\chi_{0,p}$ a deux facteurs de Jordan-Hölder, dont l'un est non tempéré, qu'on note $\pi_p^n(\chi_0)$ (ou bien $\pi^n(\chi_{0,p})$), l'autre de carré intégrable $\pi_p^s(\chi_0)$ (ou bien $\pi^s(\chi_{0,p})$). ([Rog4] p. 173, [Ke] p. 126)

4.3.2. Si p est inerte et χ non ramifié en p, $\pi_p^n(\chi_0)$ est non ramifiée et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal hyperspécial. Là encore, on en choisit un K_p, que l'on prend égal à $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Z}_p)$ quand on le peut (pour presque tout p, cf. [T, 3.9.1]).

4.3.3. Si p est ramifié, le groupe $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ est un groupe unitaire ramifié. Il a deux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux, mais aucune d'entre elles n'est hyperspéciale. D'après [Cho, prop. 2.4.7], l'une de ces deux classes, dont on fixe un représentant K_p, est telle que pour tout caractère non ramifié η du tore diagonale (*i.e.* trivial sur le compact maximal de ce tore), la représentation $\pi_p^n(\eta)$ définie en 4.3.1 admet un vecteur non nul fixé par K_p, mais n'admet pas de vecteur non nul fixé par l'autre classe de conjugaison[13]. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1. *Soit π une représentation automorphe irréductible de $U(3)$ telle que $\pi_p^{K_p} \neq 0$. Alors le changement de base π_E de π est non ramifié en la place de E au-dessus de p.*

Preuve: Comme π_p a un vecteur invariant non nul par K_p, elle a un vecteur invariant non nul par un sous-groupe d'Iwahori. D'après [Cas, prop 2.6], c'est donc une sous-représentation d'une induite parabolique normalisée $I(\eta)$, pour un certain caractère non ramifié η du tore diagonal de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ (*i.e.* trivial sur le compact maximal de ce tore). Rappelons, suivant [Ke, page 126] et [Cho, th. 2,4.6 et prop. 2.4.7], la structure de ces induites $I(\eta)$. Quand elles ne sont pas irréductibles, les représentations $I(\eta)$ sont de longueur 2, et ont comme facteurs de Jordan-Hölder soit la représentation triviale et la Steinberg, soit deux représentations que l'on note (comme dans [Ke], [Rog4]) $\pi^n(\eta)$ et $\pi^s(\eta)$. De plus, d'après [Cho, prop. 2.4.7], $\pi^n(\eta)$ a un vecteur invariant non nul par K_p, et $\pi^s(\eta)$ n'en a pas. Enfin, la représentation de Steinberg n'a pas de vecteur non nul invariant par un compact maximal.

Soit v la place de E au-dessus de p. Le changement de base π_E de l'unique A-paquet global Π auquel π appartient est (par définition, cf. [Rog4, page 201], juste avant le théorème 13.3.3) tel que $(\pi_E)_v$ est le changement de base local (défini [Rog4, page 200]) du A-paquet local Π_p, composante en p de Π. Le paragraphe précédent assure que π_p est soit la triviale, soit une induite irréductible d'un caractère non ramifié, soit de la

[13]On peut voir, à l'aide de [Lab, prop 3.6.2] que K_p est *très spécial*, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait.

forme $\pi^n(\eta)$. Le changement de base $(\pi_E)_v$ de Π_p est donc non ramifié par définition sauf peut-être si Π_p est le A-paquet $\Pi_p = \{\pi^n(\eta), \pi^s(\eta)\}$, avec $\pi_p = \pi^n(\eta)$. Mais dans ce cas, $(\pi_E)_v$ est non ramifié par [Rog4, prop. 13.2.2(d)]. □

Remarque 4.1. *Le même lemme serait faux si K_p était remplacé par un sous-groupe compact maximal de l'autre classe de conjugaison. En effet, on pourrait avoir alors $\pi_p = \pi^s(\eta)$, et la représentation $\pi^s(\eta)$ appartient à deux A-paquets locaux (cf.* [Rog4, page 199]*) : le A-paquet $\{\pi^s(\eta), \pi^n(\eta)\}$ dont le changement de base est bien non ramifié, et un autre A-paquet, dont le changement de base* est ramifié*.*

4.4. **Composantes locales à l'infini.** Tout L-paramètre "relevant" de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})$ a sa restriction à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ de la forme :

$$z \mapsto (z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}, \quad a_1 > a_2 > a_3 \in \mathbb{Z}^3$$

Si $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \in \mathbb{Z}^3$, On note $\pi_{1,\infty}(k_1, k_2, k_3)$ la représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})$ sur $V_{k_1,k_2,k_3}(\mathbb{C})$ (2), déduite de l'inclusion $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R}) \subset \mathrm{U}(3)(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ donnée par $E \subset \mathbb{C}$. Son L-paramètre a pour changement de base à $\mathbb{C}^*$ le morphisme plus haut avec $(a_1, a_2, a_3) := (k_1 + 1, k_2, k_3 - 1)$ ([Rog1] §3.1).

4.5. **Existence de $\pi(\chi_0)$.**

Proposition 4.1. *Supposons que $k > 1$, et que $\varepsilon(\chi_0, 1/2) = -1$, alors il existe une unique représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ de $U(3)$ dont le changement de base à E a pour L-paramètre le morphisme $W_E \to GL_3(\mathbb{C})$ défini par*

$$\begin{pmatrix} \chi_0|.|^{-1/2} & & \\ & 1 & \\ & & \chi_0|.|^{1/2} \end{pmatrix}$$

et telle que
- *Pour toute place $v, \pi(\chi_0)_v = \pi^n_v(\chi_0)$,*
- *$\pi(\chi_0)_\infty = \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$.*

Preuve : D'après [Rog2], page 397, le A-paquet $\Pi(\chi, 1)$ existe pour U(3), car $k > 1$. D'après [Rog2], page 395 et 396, les A-paquets locaux correspondants sont les singletons $\{\pi^n_p(\chi_0)\}$ quand p est décomposé (cf. 4.2.2) et des paires $\{\pi^n_p(\chi_0), \pi^s_p(\chi_0)\}$ quand p est inerte ou ramifié (où π^n_p a été définie en 4.3.1). Enfin, d'après [Rog2] page 397, le A-paquet local à l'infini est un singleton $\{\pi(\chi_0)_\infty\}$ avec $\pi(\chi_0)_\infty := \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$.

Considérons la représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$:

$$\pi(\chi_0) = (\bigotimes_{p \text{ premier}} \pi^n_p(\chi_0)) \otimes \pi(\chi_0)_\infty.$$

D'après [Rog2], théorème 1.2, la multiplicité de π dans le spectre automorphe de U(3) est $(1 + \varepsilon(\chi_0, 1/2)(-1)^N)/2$, où N, défini dans [Rog4] page 243, est le nombre de places à l'infini de $\mathbb{Q}$ où U(3) est compact ; on a donc $N = 1$, et la multiplicité de $\pi(\chi_0)$ est donc 1. □

4.6. **Types.**

Proposition 4.2. *Pour p un nombre premier divisant disc(χ_0), il existe un groupe $K_J = K_J(p)$ de $U(3)(\mathbb{Q}_p)$, et une représentation irréductible $J = J(p)$ de K_J tels que*
- $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det)) \neq 0$.
- *Pour toute représentation lisse irréductible π de $U(3)(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant* $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0$*, pour toute place v de E au-dessus de p, notant π_{E_v} le changement de base de π à E_v, il existe trois caractères lisses non ramifiés ϕ_1, ϕ_2, $\phi_3 : {E_v}^* \to \mathbb{C}^*$, tels que*
$$L(\pi_{E,v}) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3\chi_0^{-1}.$$
En particulier, si $l \neq p$, $I' := \ker(\chi_l)_{|I_v}$, et si π est la composante en p d'une représentation automorphe irréductible π' de $U(3)$, alors $\rho_l(\pi')(I') = 1$.

Preuve : Supposons d'abord que $p = v_1 v_2$ est décomposé dans E. On note $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ (l'isomorphisme dépendant de la place v_1, comme en 4.2.1), P le parabolique standard de type $(2,1)$, $M = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ son Levi (comme en 4.2.2), N son radical unipotent, $\chi_0 = \chi_{0,v_1}$ et m la p-valuation du conducteur de χ_0.

Notons K_J le sous-groupe de G des matrices dont la réduction modulo p^m est de la forme
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$
et notons J le caractère complexe lisse de ce groupe qui à une matrice comme ci-dessus associe $\chi_0(y)^{-1}$.

Par définition (cf. 4.2.2 pour la définition de λ_p), $\pi_p^n(\chi_0) \otimes \chi_0^{-1} \circ \det$ est la représentation de G sur l'espace

$$V := \{f : G \to \mathbb{C},\ f \text{ lisse},\ \forall b \in P, \forall g \in G,\ \ f(bg) = \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))f(g)\}$$
donnée par $(g.f)(x) = f(xg)$. Définissons $f : G \to \mathbb{C}$ par
$$\begin{aligned} f(bk) &= \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))\chi_0(k) \ \ \forall b \in P,\ k \in K_J, \\ f(g) &= 0 \ \ \forall g \in G \backslash PK_J \end{aligned}$$
On vérifie aisément que f est bien définie, et qu'elle définit un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det))$.

Inversement, soit π une représentation lisse irréductible de G, et supposons que
$$\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0.$$

Notons $B_J \subset K_J$ l'ensemble des matrices de K_J qui sont triangulaires supérieures modulo p. On a alors $B_J \cap M = B \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ ou B est le sous-groupe d'Iwahori standard (constitué des matrices triangulaires supérieures modulo p) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La restriction de J à $B_J \cap M$ étant simplement le caractère χ_0^{-1} sur le second facteur $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$, le couple $(B_J \cap M, J_{|B_J \cap M})$ est un $\mathfrak{s}_M$-type de B_J, où $\mathfrak{s}_M \in \mathcal{B}(M)$ (le spectre de Bernstein de M, cf. [Bus, page 772]) est la classe d'équivalence inertielle de (T, χ_0^{-1}), T désigne le tore maximal standard de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et χ_0^{-1} le caractère de T envoyant $\mathrm{diag}(x,y,z)$ sur $\chi_0^{-1}(z)$.

Il résulte immédiatement de la définition de *recouvrement (cover)* ([BK1, 8.1]) que $(B_J, J_{|B_J})$ est un G-recouvrement de $(B_J \cap M, J_{|B_J \cap M})$. Le corollaire [BK1, 8.4] (ou bien [BK2, page 55]) assure alors que $(B_J, J_{|B_J})$ est un $\mathfrak{s}$-type pour G, où $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ est la classe d'équivalence inertielle de (T, χ_0^{-1}). Comme π contient (K_J, J), elle contient aussi (B_J, J), est son support cuspidale est donc de la forme $(\phi_1, \phi_2, \chi_0^{-1}\phi_3)$, où les ϕ_i sont des caractères lisses non ramifiés de $\mathbb{Q}_p^*$. Autrement dit, d'après les propriétés de la correspondance de Langlands locale, $L(\pi)$ a pour semi-simplification $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$. Nous voulons maintenant montrer que $L(\pi)$ est semi-simple. Comme $\chi_0^{-1}\phi_3$ est ramifié, mais pas ϕ_1 et ϕ_2, on peut en tous cas écrire $L(\pi) = r \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$, où $r^{ss} = \chi_1 \oplus \chi_2$, et nous voulons montrer que r est semi-simple.

D'après ce qui précède et les propriétés de L, il existe une représentation lisse irréductible (ρ, W) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de support cuspidal (ϕ_1, ϕ_2) telle que

$$\pi \simeq \mathrm{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1})), \quad L(\rho) = r$$

où $\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1})$ désigne la représentation du parabolique standard sur W qui à $(x, y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M$ associe $\phi_3(y)\chi_0(y)^{-1}\rho(x) \in \mathrm{End}(W)$. L'espace de cette induite est l'ensemble des fonctions $f : G \to W$, lisses, vérifiant $\forall m = (x, y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M, \forall u \in N, \forall g \in G$,

$$f(mug) = \delta_P^{1/2}(m)\chi_0^{-1}(y)\phi_3(y)\rho(x)f(g). \tag{4}$$

Comme $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0$, il existe une fonction non nulle $f : G \to W$ dans l'espace de $\mathrm{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1}))$ qui vérifie

$$(k.f)(g) = f(gk) = f(g)J_K(k) = f(g)\chi_0(k)^{-1}. \tag{5}$$

Choisissons $v = f(g) \in W$ non nul. Combinant les équations 4 et 5, il vient

$$\forall x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), \rho(x)v = v.$$

La représentation ρ est donc non ramifiée si bien que $r = L(\rho)$ est semi-simple, et finalement $L(\pi) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3\chi_0^{-1}$.

Le "en particulier" découle alors de la proposition 3.2

Le cas où p est inerte ou ramifié dans E est plus simple, grâce aux travaux de L.Blasco ([Bl]) : $\pi_p^n(\chi_0)$ appartient à la série principale, et son type défini en [Bl, partie 7, page 181] fait l'affaire. □

5. I-invariants et algèbre d'Atkin-Lehner

5.1. **Notations.**

5.1.1. Dans toute cette section, p est un nombre premier fixé. T désigne le tore diagonale de $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, B son Borel supérieur, $K := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $W \simeq \mathfrak{S}_n \subset K$, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori composé des éléments triangulaires supérieurs modulo p, Δ le sous-groupe de T des éléments à coefficients dans $p^{\mathbb{Z}}$, Δ^+ le sous-monoïde de Δ des éléments de la forme $\mathrm{diag}(p^{a_1}, \cdots, p^{a_n})$ avec $a_1 \leq \cdots \leq a_n \in \mathbb{Z}$. Si X est un groupe topologique localement compact, δ_X désigne le caractère module de X.

5.1.2. Si U est un sous-groupe compact ouvert de G, l'algèbre de Hecke de G relativement à U, $\mathcal{C}^\infty(U\backslash G/U)$, est l'algèbre de convolution des fonctions complexes lisses à support compact sur G invariantes à droite et à gauche par U. Si $g \in G$, on note $[UgU] \in \mathcal{C}^\infty(U\backslash G/U)$ la fonction caractéristique de de $UgU \subset G$, on prend la convention que $[U]^2 = [U]$. $\mathcal{C}^\infty(I\backslash G/I)$ est l'algèbre de Hecke-Iwahori, on note $\mathcal{A}(p)$[14] son sous-anneau engendré par $\mathbb{Z}$ et les fonctions caractéristiques $[IuI]$, $u \in \Delta^+$. Il est connu (par exemple [Rog3] §1) que $\mathcal{A}(p)$ est commutative, et que pour chaque $u, u' \in \Delta^+$, $[IuI]$ est inversible dans $\mathcal{C}^\infty(I\backslash G/I)$, $[IuI][Iu'I] = [Iuu'I]$ et $IuIu'I = Iuu'I$. On pose

$$u_i := \mathrm{diag}(1, \dots, 1, p, \dots, p) \in \Delta^+, \text{ où } p \text{ apparaît } i \text{ fois}, \ 0 \leq i \leq n$$

5.2. I-invariants des représentations non ramifiées.

5.2.1. Soit $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n) : (\mathbb{Q}_p^*)^n \to \mathbb{C}^*$ un caractère lisse et non ramifié, $X(\psi)$ la représentation complexe lisse irréductible non ramifiée de G de L-paramètre valant sur le Frobenius géométrique :

$$\begin{pmatrix} \psi_1(p) & & \\ & \cdots & \\ & & \psi_n(p) \end{pmatrix}$$

Voyant ψ comme un caractère complexe lisse de B trivial sur les unipotents supérieurs, on pose

$$\mathrm{Ind}_B(\psi) := \{f : G \to \mathbb{C}, \text{ lisses}, f(bg) = \delta_B^{1/2}(b)\psi(b)f(g) \ \forall b \in B\}$$

vue comme représentation lisse de G par translation à droite les fonctions. On sait alors que $X(\psi)$ est l'unique sous-quotient irréductible non ramifié de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$. Le caractère de l'algèbre de Hecke non-ramifiée de G sur la droite des K-invariants de $X(\psi)$ (ou encore de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$, ce qui est la même chose) est bien connu : si $t_{p,i}$ est la valeur propre de l'opérateur de Hecke $T_{p,i} := [Ku_iK]|\det(u_i)|^{(n-1)/2}$ comme plus haut, on a

$$\prod_{i=0}^{n}(1 - \psi_i(p)T) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i p^{i(i-1)/2} t_{p,i} T^i$$

5.2.2. Nous allons commencer par décrire la représentation de $\mathcal{A}(p)$ sur les I-invariants de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$. On verra les caractères de T par restriction comme des caractères de Δ^+, puis de $\mathcal{A}(p)$. Pour tout caractère $\theta : T \to \mathbb{C}^*$, $\sigma \in W$, on dispose d'un caractère θ^σ défini par $\theta^\sigma(t) = \theta(\sigma^{-1}t\sigma)$; ainsi $(\psi_1, ..., \psi_n)^\sigma = (\psi_{\sigma(1)}, ..., \psi_{\sigma(n)})$.

Lemme 5.1. *(cf.* [Che]*[lemme 4.8.4]) La semi-simplification de $\mathrm{Ind}_B(\psi)^I$ comme $\mathcal{A}(p)$-module est*

$$\oplus_{\sigma \in W} \delta_B^{1/2} \psi^\sigma$$

[14]C'est cette algèbre que nous appelons *algèbre d'Atkin-Lehner*, reprenant la terminologie de X.Lazarus (thèse, Orsay, 2000). Ses générateurs $[IuI]$, $u \in \Delta^+$, sont la généralisation naturelle à GL_n de l'opérateur U_p d'Atkin-Lehner dans la théorie classique des formes modulaires.

Remarques : Le calcul ci-dessus et la formule pour le polynôme de Hecke de X montrent que si $\sigma \in W$, $\psi^\sigma(U_i)$ (noter la disparition du $\delta_B^{1/2}$) est un produit de i valeurs propres "distinctes" du Frobenius géométrique dans la représentation de $W_{\mathbb{Q}_p}$ attachée à X par la correspondance de Langlands locale non ramifiée.

En particulier, supposons $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ irréductible, dans ce cas $\mathrm{Ind}_B(\psi) = X(\psi)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori montre que $\dim_{\mathbb{C}}(X(\psi)^I) = n!$ et l'action de $\mathcal{A}(p)$ sur les I-invariants de X est calculée par le lemme. Ceci se produit en particulier quand ψ est essentiellement tempérée (i.e $|\psi_i(p)|$ indépendant de i, [Ze] 4.2) mais pas pour la représentation $\pi_p^n(\chi_0)$ introduite en §4.2.2 (p décomposé dans E et ne divisant pas $\mathrm{cond}(\chi_0)$). Pour traiter ce cas là, nous aurons besoin du résultat général suivant, impliquant par ailleurs le lemme précédent.

5.2.3. Soit $P = MN \subset G$ un parabolique de Levi M, $\psi : M \to \mathbb{C}^*$ un caractère non ramifié, $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ l'induite parabolique lisse normalisée :

$$\mathrm{Ind}_P(\psi) := \{f : G \to \mathbb{C}, \text{lisses}, f(pg) = \delta_P^{1/2}(p)\psi(p)f(g)\ \forall p \in B\}$$

Soit $W_P \subset W$ le sous-groupe de Coxeter correspondant à $P \subset G$, pour chaque $\sigma \in W$ on choisit l'unique élément dans $W_P.\sigma$ de longueur minimale ([Hum] prop. 1.10 c)), et on note $W(P)$ l'ensemble des représentants de $W_P\backslash W$ obtenu. On pose $z := \delta_P/\delta_B = \delta_{B\cap M}$.

Lemme 5.2. *La semi-simplification de $\mathrm{Ind}_P(\psi)^I$ comme $\mathcal{A}(p)$-module est*

$$\oplus_{\sigma\in W(P)}\delta_B^{1/2}(z^{1/2}\psi)^\sigma$$

Remarques : Le lemme montre que l'unique sous-quotient non ramifié de $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ est isomorphe à $X(\psi.z^{1/2})$. Si $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ est irréductible (voir [Ze] 3.2,4.2), il coïncide donc avec $X(\psi.z^{1/2})$ dans ce cas.

Preuve : On pose $X' = \mathrm{Ind}_P(\psi)^I$, c'est un module sous l'algèbre de Hecke-Iwahori de G, en particulier sous $\mathcal{A}(p)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori $G = \coprod_{\sigma\in W(P)} P\sigma I$ montre que $\dim_{\mathbb{C}}(X') = |W|/|W_P|$. On considère la $\mathbb{C}$-base de X' suivante : si $\sigma \in W(P)$, e_σ est l'élément de X' nul hors de $P\,\sigma\,I$ et tel que $e_\sigma(\sigma) = 1$. $e_\sigma(\sigma') = 0$ ou 1 selon que $\sigma' \in W_P.\sigma$ ou non . Si $\sigma' \in W$, on commence par calculer $[I\sigma' I](e_1)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori, ainsi que la multiplication des cellules, montrent que $(I\sigma' I) \cap (\sigma^{-1}PI) = \emptyset$ à moins que $\sigma \in W_P{\sigma'}^{-1}$. En particulier, $[I\sigma' I](e_1) = a_{\sigma'}e_{\sigma'^{-1}}$ où $a_{\sigma'} \in \mathbb{C}^*$ (car $[I\sigma' I]$ est inversible dans l'algèbre de Hecke-Iwahori).

La décomposition de Bruhat-Iwahori montre que si $u \in \Delta^+$, $(IuI) \cap \sigma^{-1}PI$ est vide à moins que $\sigma \in W_P$, ce qui implique que e_1 est propre sous l'action de $\mathcal{A}(p)$, de caractère $[IuI] \mapsto (\delta^{1/2}\psi)(u)|(IuI \cap PI)/I|$. Quand $u_i = u$, on peut calculer $|(IuI \cap PI)/I| = |(I^u \cap PI)/(I^u \cap I)|$, $I^u := u^{-1}Iu$, on vérifie qu'il vaut $z^{1/2}(u)$.

Par les relations de Bernstein ([Rog3] §1, §5), on en déduit que si l'on ordonne la base des e_σ, $\sigma \in W(P)$, par ordre croissant avec la longueur de σ, l'action de $\mathcal{A}(p)$ est triangulaire supérieure. Toujours par les relations de Bernstein, on trouve alors les caractères de l'énoncé (voir par exemple §4.8.3 [Che] pour des détails supplémentaires, noter que ce que nous avons appelé u_i dans ce paragraphe y est noté u_{n-1+i}). □

5.2.4. L'exemple qui nous intéresse est le cas de la représentation non ramifiée $X(\psi) := \pi_p^n(\chi_0)$ définie en 4.2.2, $\pi_p^n(\chi_0)$ est l'induite du parabolique standard P de type $(2,1)$ du caractère $\chi_0(\det(.)) \times 1$. On trouve $W(P) = \{1, (3,2), (3,2,1)\}$. Si $\sigma \in W(P)$, le triplet $(\psi^\sigma(u_1), \psi^\sigma(u_2/u_1), \psi^\sigma(u_3/u_2))$ associé à σ est alors explicitement donné par :

$$\sigma = 1,\ (1, \chi_{v_1}^\perp(p), \chi_{v_1}(p))$$
$$\sigma = (3,2),\ (\chi_{v_1}^\perp(p), 1, \chi_{v_1}(p))$$
$$\sigma = (3,2,1),\ (\chi_{v_1}^\perp(p), \chi_{v_1}(p), 1)$$

6. Déformations des représentations cristallines raffinées

6.1. **Raffinement d'une représentation cristalline.**

6.1.1. Soit F un corps local, V un F-espace vectoriel de dimension finie muni d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Nous supposerons que V est cristalline, que ses poids de Hodge-Tate $k_1 < ... < k_n$ sont tous distincts et que les valeurs propres du Frobenius de $D_{cris}(V)$ sont dans F (cf. 2.6 pour les conventions). Imitant Mazur ([Ma]), on appellera *raffinement* de V la donnée d'un ordre $\mathcal{R} := (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in F^n$ sur les valeurs propres du Frobenius de $D_{cris}(V)$. On notera $(V, \mathcal{R})$ la représentation V munie de son raffinement $\mathcal{R}$.

6.1.2. La donnée d'un raffinement $\mathcal{R}$ de V nous permet de définir des $F_i(\mathcal{R}) := \varphi_i/p^{k_i} \in F^*$ et des $U_i(\mathcal{R}) := \prod_{j=1}^i F_j$, $1 \leq i \leq n$. La donnée de tous les $F_i(\mathcal{R})$, ou encore celle des $U_i(\mathcal{R})$, est bien sur équivalente à celle de $\mathcal{R}$. Notons que $F_i(\mathcal{R})$ est encore une valeur propre du Frobenius de $D_{cris}(V(k_i))$, et $U_i(\mathcal{R})$ en est une de celui de $\Lambda^i(D_{cris}(V)) \simeq D_{cris}(\Lambda^i(V))$. On rappelle que la formation de D_{cris} commute aux opérations tensorielles sur les représentations cristallines ([Fo2] 1.5.2, 5.1.2).

6.1.3. *Remarques :* i) Si le polynôme caractéristique du Frobenius de $D_{cris}(V)$ a $n = \dim_F(V)$ racines distinctes, alors V admet exactement $n!$ raffinements. C'est la cas par exemple si V est ordinaire (cf. [PR]). Dans ce cas, on dispose de plus d'un raffinement canonique donné par $|\varphi_i| = p^{-k_i}$, appelé raffinement "ordinaire" (il ne nous sera pas utile dans la suite).

ii) Un des intérêts essentiels de la notion de raffinement dans ce texte vient de ce que la théorie des familles p-adiques de formes automorphes produit des déformations de représentations cristallines raffinées de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Il faut bien noter que de telles déformations d'une même représentation V mais partant de raffinements distincts sont en général très différentes (par exemple l'une peut être génériquement irréductible, l'autre non).

6.2. **Raffinements et algèbre d'Atkin-Lehner.**

6.2.1. Par commodité d'exposition, nous nous restreignons à U(3) plutôt qu'à un groupe unitaire quelconque, c'est de toutes façons suffisant pour les objectifs de ce texte. Soit p un nombre premier décomposé dans E, $\iota : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un isomorphisme de corps, v_1 la place de E au dessus de p donnée par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{Q}}_p$, v_2 l'autre place, $p = v_1 v_2$. La donnée de v_1 nous permet de plus d'identifier $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ comme en 4.2.2. Fixons Π une représentation automorphe irréductible de U(3) telle que Π_p est non ramifiée et $\Pi_\infty = \pi(k_1 \geq k_2 \geq k_3)$. Comme dans 5.2.1, $\Pi_p = X(\psi)$ pour un certain caractère non ramifié $\psi : T \to \mathbb{C}^*$.

6.2.2. On a vu dans 3.2.2 que la donnée de ι permet d'associer à Π une représentation semi-simple continue $\rho_p : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(F) = \mathrm{GL}_F(V)$, V étant un espace vectoriel de dimension 3 sur un certain corps local F. On rappelle que D_{v_i} est un groupe de décomposition dans $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ associé à la place v_i de E, et on note V_i la représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur V obtenue par restriction de V à D_{v_i}. Puisque $\rho_p^\perp \simeq \rho_p$, on sait que $V_2 \simeq V_1^\perp$. De plus, par la proposition 3.3 §3.2, V_1 est cristalline de poids de Hodge-Tate $-k_1 - 1 < -k_2 < -k_3 + 1$, et son Frobenius cristallin a même polynôme caractéristique (modulo ι) que l'image du Frobenius géométrique de $W_{\mathbb{Q}_p}^{nr}$ dans le L-paramètre de $X(\psi)$, i.e $\prod_{i=1}^{3}(X - \iota(\psi_i(p)))$. Nous allons donner une interprétation automorphe de certains raffinements de V_1 en terme de Π_p.

6.2.3. La semi-simplification de $\mathcal{A}(p)$ agissant sur Π_p^I a été calculée en 5.2.2, c'est une somme de caractères de $\mathcal{A}(p)$ de la forme $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$, pour certains $\sigma \in W$. On dira que σ est *accessible* pour Π si $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$ apparaît, cela ne dépend que de Π_p, et il est équivalent de demander qu'il existe un vecteur $v \in \Pi^I$ sur lequel $\mathcal{A}(p)$ agisse par $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$. Pour tout $\sigma \in W$, le lemme 5.1 §5.2.2 montre que l'on construit un raffinement $\mathcal{R}(\sigma)$ de V_1 en posant

$$\mathcal{R}(\sigma) := (\psi_{\sigma(3)}(p), \psi_{\sigma(2)}(p), \psi_{\sigma(1)}(p))$$

Un raffinement de V_1 sera dit *accessible* s'il est de la forme $\mathcal{R}(\sigma)$ avec σ accessible pour Π. Si Π_p est irréductible, on a vu en 5.1 que tous les raffinements de V_1 sont alors accessibles. Cela se produit en particulier quand Π_p est tempérée. Par contre, si $\Pi = \pi(\chi_0)$, les raffinements accessibles sont ceux donnés dans 5.2.4. Dans ce cas précis, on remarque par exemple que V_1 est ordinaire mais que le raffinement ordinaire n'est pas accessible.

6.2.4. Soit $s = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, notons ν_s le caractère $\Delta \to p^{\mathbb{Z}}$ sur le vecteur de plus haut poids de $V_s^*(\mathbb{Q}) = V_{-s}(\mathbb{Q})$. D'après 6.2.2 et 2.3, si $1 \leq i \leq 3$, $(\delta_B^{-1/2}\nu_s)(u_i/u_{i-1})$ est une puissance de p d'exposant le i^{ieme} poids de Hodge-Tate (rangés par ordre croissant) de V_1. On pose

$$U_i^s := \frac{[Iu_iI]}{\nu_s(u_i)} \in \mathcal{A}(p)[1/p]$$

Avec ces notations, $\mathcal{R}(\sigma)$ est encore le raffinement de V_1 défini par ses $U_i(\mathcal{R}(\sigma))$ avec la formule $U_i(\mathcal{R}(\sigma)) := (\delta_B^{1/2}\psi^\sigma)(U_i^s)$.

6.3. **Variation de représentations cristallines raffinées, d'après M.Kisin.**

6.3.1. Soit $F \subset \mathbb{C}_p$ un corps local, X un F-affinoide réduit d'anneau $A(X)$, la norme réduite de $A(X)$ en fait une algèbre de Banach. Soit $M := A(X)^n$, G un groupe topologique, $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(M)$ une représentation continue. Si $F \subset E \subset \mathbb{C}_p$ est un sous-corps complet, $x \in X(E)$, on note $M_x := M \otimes_{A(X)} E$, $A(X) \to E$ étant l'évaluation en x, et $\rho_x : G \to \mathrm{GL}_n(E) = \mathrm{GL}_E(M_x)$.

6.3.2. Soit X un F-affinoide réduit d'anneau $A(X)$, on se donne

– a) $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_n) : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, un F-morphisme analytique,
– b) $Z \subset X(F)$ un sous-ensemble Zariski-dense tel que $\kappa(Z) \subset \mathbb{Z}^n$,
– c) $M := A(X)^n$, et $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{GL}_{A(X)}(M)$ une représentation continue,
– d) $F_1, ..., F_n$ des éléments inversibles de $A(X)$,

On suppose de plus que :

i) Pour tout réel $C > 0$, $\{z \in Z, \kappa_{i+1}(z) > C + \kappa_i(z)\ \forall i \in \{1, ..., n-1\}\}$ est Zariski-dense dans $X(F)$,

ii) Pour tout $x \in X(F)$, $\kappa(x) \in F^n$ est l'ensemble des poids de Hodge-Tate-Sen de M_z, rangés par ordre strictement croissant si $x \in Z$, *i.e.* $\kappa_1(x) < \kappa_2(x) < ... < \kappa_n(x)\ \forall x \in Z$,

iii) Pour tout $z \in Z$, M_z est cristalline,

iv) Si $z \in Z$, $(p^{\kappa_1(z)}F_1(z), ..., p^{\kappa_n(z)}F_n(z))$ est un raffinement de M_z,

v) Pour tout i, il existe $\lambda_i \in F^*$ tel que $|F_i/\lambda_i - 1| < 1$,

vi) Deux éléments de $\kappa(Z)$ diffèrent d'un élément de $(p-1)\mathbb{Z}^n$.

Faisons quelques remarques sur ces hypothèses. L'existence de κ satisfaisant ii) n'est pas directement conséquence des travaux de Sen ([Sen1], [Sen2]), à cause de l'hypothèse "rangés par ordre croissant sur Z". Nous ne savons pas dans quelle mesure l'existence de F_i satisfaisant iv) est automatique (condition sur κ ?), cf. [Ki] à ce sujet. Nous ne savons pas non plus si vi) est automatique. Dans la pratique (cf. §8), ces hypothèses seront satisfaites et κ sera un morphisme fini sur son image, dominant restreint à chaque composante irréductible de X. La condition v) est de nature technique, et intervient dans les travaux de Kisin (elle implique en ses termes que X est "F_i-small").

6.3.3. On se place sous les hypothèses a), b), c), ii), iii) et iv) de 6.3.2. On notera $A(X)(\kappa_i)$ le $A(X)$-module $A(X)$ sur lequel on fait agir continûment $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ par le composé du caractère cyclotomique par le caractère suivant de $\mathbb{Z}_p^*$:

$$x \to (x/\tau(x))^{\kappa_i}\tau(x)^{n_i} \in A(X)^*$$

où $n_i = \kappa_i(z)$ est un entier bien défini modulo $(p-1)\mathbb{Z}$ indépendamment de $z \in Z$ par l'hypothèse vi), et $\tau : \mathbb{Z}_p^* \to \mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$ la réduction modulo p composée par le caractère de Teichmüller. Si $z \in Z$, $A(X)(\kappa_i)_z$ est l'élévation à la puissance $\kappa_i(z)$ du caractère cyclotomique, en particulier c'est un caractère cristallin de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

Si N est un $A(X)$-module de libre type fini muni d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on notera $N(\kappa_i) := N \otimes_{A(X)} A(X)(\kappa_i)$ vue comme représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On a donc défini les $M(\kappa_i)$, leurs évaluations en $z \in Z$ sont cristallines de poids $(\kappa_1(z) - \kappa_i(z), ..., \kappa_n(z) - \kappa_i(z)) \in \mathbb{Z}^{n,--}$.

6.3.4. On se place dans les hypothèses de 6.3.2 :

Proposition 6.1. *Soit $x \in X(F)$, $\kappa(x) = (k_1, ..., k_n)$ alors*

$$D_{cris}((\Lambda^i V_x)(k_1 + ... + k_i))^{\varphi = F_1(x)\cdots F_i(x)} \quad \textit{est non nul.}$$

Si de plus les k_i sont entiers, alors

$$D_{cris}(\Lambda^i(V_x))^{\varphi = \prod_{j=1}^i p^{k_j} F_j(x)} \quad \textit{est non nul}$$

La fin de cette section est consacrée à la preuve de la proposition 6.1.

6.3.5. La seconde assertion découle de la première. On se ramène dans ce paragraphe au cas $i = 1$ et $\kappa_1 = 0$. Soit $i \in \{1, ..., n\}$ fixé, on pose $N := \Lambda^i(M)(\kappa_1)\cdots(\kappa_i)$. Si $J = (m_1 < ... < m_i)$ est une partie à i éléments de $\{1, ..., n\}$, on pose $\kappa_J := \sum_{j=1}^i (\kappa_{m_j} - \kappa_j)$ et $F_J := \prod_{j=1}^i F_{m_j}$. On ordonne de plus les $r := \binom{n}{i}$ telles parties $J = (m_1 < ... < m_i)$ par l'ordre lexicographique. Rappelons que, comme dit plus haut (6.1.2), la formation de $D_{cris}(V)$ commute aux opérations tensorielles sur la catégorie des représentations cristallines. Ainsi, si $x \in Z$, on en déduit que N_x est cristalline, que ses poids de Hodge-Tate sont les κ_{J_i}, et que les racines de son Frobenius cristallin sont les $F_{J_i}(x)$. Cela montre que les conditions a), b), c), d), iii), iv), v) et vi) de 6.3.2 sont satisfaites pour la donnée de N, des κ_{J_i}, et des F_{J_i} respectivement à la place de M, des κ_i et des F_i. L'hypothèse ii) entraîne que $\kappa_{J_i}(z) > 0$ si $i > 1$ et $z \in Z$. Enfin, l'hypothèse i) entraîne que pour tout réel $C > 0$, $\{z \in Z, \forall i > 1,\ \kappa_{J_i}(z) > C\}$ est Zariski-dense dans $X(F)$.

Il suffit donc de prouver la proposition pour M, $i = 1$, et $\kappa_1 = 0$, sous les hypothèses suivantes :

i') Pour tout réel $C > 0$, $\{z \in Z,\ \forall i > 1,\ \kappa_i(z) > C\}$ est Zariski-dense dans X,

ii') Pour tout $x \in X(F)$, $\kappa(x) \in F^n$ est l'ensemble des poids de Hodge-Tate-Sen de M_z, et satisfont $\kappa_i(x) > 0$ pour tout $i > 0$ et $x \in Z$,

iii') Pour tout $z \in Z$, M_z est cristalline et $D_{cris}(M_z)^{\varphi = F_1(x)} \neq 0$,

v') Il existe $\lambda \in F^*$, $|F_1/\lambda - 1| < 1$.

6.3.6. Nous allons déduire cela de deux résultats démontrés par Kisin ([Ki]), à la manière de la preuve de son théorème 6.3 *loc. cit.*. On fixe une $\mathbb{Q}_p$-algèbre affinoide $\mathcal{R}$, ainsi qu'un $\mathcal{R}$-module $\mathcal{M}$ libre de rang fini et équipé d'une représentation continue $\mathcal{R}$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Soit $P_\phi \in \mathcal{R}[T]$ le polynôme de Sen de $\mathcal{M}$ (cf. *loc. cit.* §2.2), on suppose que $P_\phi = TQ(T) \in \mathcal{R}[T]$ et pour tout entier k on pose $P(k) = \prod_{j=0}^{k-1} Q(-j)$. Soit $Y \in \mathcal{R}$ un élément inversible, on suppose qu'il existe un corps local $F'/\mathbb{Q}_p$ et $\lambda \in F'$ avec la propriété que $Y\lambda^{-1}-1$ est topologiquement nilpotent dans $\mathcal{R}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}F'$ (dans la terminologie de *loc. cit.*, $\mathcal{R}$ est "*Y-small*").

Lemme 6.1. *(Kisin* [Ki, Cor. 5.15]*) Soit $\{\mathcal{R}_x\}_{x\in I}$ un ensemble de $\mathcal{R}$-algèbres affinoides. Supposons que pour tout entier $k>0$, il existe un sous-ensemble $I_k\subset I$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(1) Pour tout $x\in I_k$, toute application $\mathcal{R}_x$-linéaire $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariante

$$\mathcal{M}^*\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_x\longrightarrow(B_{dR}^+/t^kB_{dR}^+)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{R}_x,$$

se factorise à travers $(B_{cris}^+\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{R}_x)^{\varphi=Y}$. (Ici Y désigne par abus l'image de Y dans $\mathcal{R}_x$, et $\mathcal{M}^*$ le $\mathcal{R}$-dual de $\mathcal{M}$.)

(2) Pour tout $x\in I_k$, l'image de $P(k)$ dans $\mathcal{R}_x$ est inversible.

(3) Pour tout k, l'application $\mathcal{R}\longrightarrow\prod_{x\in I_k}\mathcal{R}_x$ est injective.

Alors si $E\subset\mathbb{C}_p$ est un sous-corps fermé, $f:\mathcal{R}\to E$ un $\mathbb{Q}_p$-morphisme d'algèbre continu, il existe une application E-linéaire non nulle et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\mathcal{M}^*\otimes_{\mathcal{R}}E\to(B_{cris}^+\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}E)^{\varphi=f(Y)}.$$

Le second résultat dont nous aurons besoin est le suivant. Soient $\mathcal{R}'$ une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach noethérienne, et $\mathcal{M}'$ un $\mathcal{R}'$-module libre de rang fini muni d'une représentation continue $\mathcal{R}'$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On fait encore l'hypothèse que le polynôme de Sen $P_\phi(T)$ de $\mathcal{M}'$ est de la forme $TQ(T)\in\mathcal{R}'[T]$, et on définit $P(k)$ comme plus haut.

Lemme 6.2. *(*[Ki, Cor. 2.6.(1)]*) Soit $k>0$ un entier, alors*

$$((B_{dR}^+/t^iB_{dR}^+)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{M}')^{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}[\frac{1}{P(k)}]$$

est un $\mathcal{R}'[\frac{1}{P(k)}]$-module projectif de rang 1.

6.3.7. Terminons la preuve de 6.1. On pose $\mathcal{R}:=A(X)$, vue comme $\mathbb{Q}_p$-algèbre, $\mathcal{M}:=M$, et $Y:=F_1$. Vérifions que nous sommes dans les hypothèses du paragraphe précédent l'énoncé du lemme 6.1. Soit $P_\phi\in A(X)[T]$ le polynôme de Sen de M. Avec notre convention que le poids de Hodge-Tate de $\mathbb{Q}_p(1)$ est -1, l'évaluation en $x\in Z$ de P_ϕ a pour racines les opposés des poids de Hodge-Tate de ρ_x, *i.e.* les $-\kappa_i(x)$ par l'hypothèse ii'). Comme Z est Zariski-dense dans X qui est réduit, il vient que

$$P_\phi(T)=\prod_{i=1}^n(T+\kappa_i)\in A(X)$$

De plus, $\kappa_1=0$ par hypothèse, de sorte que $P_\phi(T)=TQ(T)\in A(X)[T]$, ce que l'on voulait. Enfin, l'hypothèse v') nous assure que X est "F_1-small". Cela conclut.

On pose $I:=Z$, et si $x\in I=Z\subset X(F)$, on pose $\mathcal{R}_x:=F$, vue comme $\mathcal{R}$-algèbre par le morphisme d'évaluation en x. Si $k>0$ est un entier, on définit I_k comme étant l'ensemble des points x de Z tels que $\kappa_i(z)>k$ si $i>1$, et tels que $v(F_1(x))\leq k$. Vérifions que nous sommes bien dans les hypothèses du lemme 6.1. L'assertion (3) vient de ce que I_k est Zariski-dense dans X par l'hypothèse i') appliquée à $C = k$, et de ce que X est réduit. Soit $x \in I$, par l'hypothèse ii') l'image $P(k)(x)$ de $P(k)$ dans $\mathcal{R}_x = F$ est

$$\prod_{j=0}^{k-1}\prod_{i=2}^{n}(\kappa_i(x) - j), \tag{6}$$

c'est un entier strictement positif si $x \in I_k$. Cela prouve (2). Pour vérifier (1), fixons $x \in I_k$. Rappelons que M_x a pour plus petit poids de Hodge-Tate 0, car $\kappa_1 = 0$ et par l'hypothèse ii'). D'après l'hypothèse iii'), $D_{cris}(M_x)^{\varphi = F_1(x)}$ est non nul. Écrivant que M_x est égal à son bidual F-linéaire, cela signifie encore qu'il existe une application $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariante non nulle

$$\psi_x : M_x^* \longrightarrow (\mathrm{Fil}^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi = F_1(x)}$$

Il se trouve que l'on peut remplacer $\mathrm{Fil}^0(B_{cris})$ par B_{cris}^+ dans la formule ci-dessus. En effet, pour tout entier $n \geq 0$, comme $F_1(x) \in F^*$ par 6.3.2 d), $\varphi^n(\mathrm{Im}(\psi_x)) = F_1(x)^n \mathrm{Im}(\psi_x) = \mathrm{Im}(\psi_x) \subset \mathrm{Fil}^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$, et donc $\mathrm{Im}(\psi_x) = \varphi(\mathrm{Im}(\psi_x))$ est inclus dans

$$\varphi(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^{-n}(\mathrm{Fil}^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)) = (\varphi(\bigcap_{n \geq 0} \varphi^{-n}(\mathrm{Fil}^0(B_{cris}))) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$$

Mais $\varphi(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^{-n}(\mathrm{Fil}^0(B_{cris}))) \subset B_{cris}^+$ d'après [Fo1] 5.3.7 (i), cela conclut.

Vérifions maintenant que ψ_x ne se factorise pas par $\mathrm{Fil}^k(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$. Par faible-admissibilité de $D_{cris}(M_x)$ ([Fo2] proposition 5.4.2.(i)), le sous-φ-module filtré

$$\mathrm{Fil}^k(D_{cris}(M_x))^{\varphi = F_1(x)}$$

a son polygone de Newton au dessus de son polygone de Hodge. Mais le premier n'a qu'une pente $v(F_1(x)) < k$ par l'hypothèse $x \in I_k$, et le second n'a que des pentes $\geq k$ par construction. Ainsi, $\mathrm{Fil}^k(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F = \{0\}$ et ne contient donc pas ψ_x, ce que l'on voulait.

Considérons enfin le F-espace vectoriel des applications :

$$M_x^* \longrightarrow (B_{dR}^+/t^k B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F. \tag{7}$$

Il est non nul car nous avons montré que la réduction modulo $t^k B_{dR}^+ \cap B_{cris}$ de ψ_x en fait partie. Le lemme 6.2 s'applique à $\mathcal{R}' := \mathcal{R}_x = F$, $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_x = M_x$, et montre que l'espace des applications ci-dessus est un F-espace vectoriel de dimension 1, car si $x \in I_k$, (6) assure que $P(k)(x) \in F^*$. Ainsi, toute application du type (7) est F-proportionnelle à ψ_x, et se factorise donc par $(B_{cris}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi = F_1(x)}$. Cela montre que (1) est vérifiée[15].

Soit $x \in X(F)$, l'évaluation en x détermine un $\mathbb{Q}_p$-morphisme d'algèbre continu $\mathcal{R} \to F$. Si $M_x^* := \mathrm{Hom}_F(M_x, F)$, le F-espace vectoriel

$$D_{cris}(M_x)^{\varphi = F_1(x)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(M_x^*, B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi = F_1(x)}$$

[15]Noter que si W et U sont des $\mathbb{Q}_p$-espaces de Banach, avec U de dimension finie, l'application canonique $W \otimes_{\mathbb{Q}_p} U \longrightarrow W \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} U$ est un isomorphisme.

est donc non nul par le lemme 6.1. □

6.3.8. *Remarques :* En général, il est bien sûr faux que sous les hypothèses de la proposition 6.1, $D_{cris}(V(k_i))^{\varphi=F_i(x)}$ est non nul si $i > 1$. La considération d'une famille p-adique de formes modulaires passant par une forme modulaire parabolique propre de niveau $\Gamma_0(p)$ qui est p-nouvelle en donne un contre-exemple. De plus, ce que l'on a fait pour les Λ^i vaut de même aussi naturellement pour n'importe quel foncteur de Schur de $\mathrm{GL}(n)$. Si $n = 3$, l'isomorphisme canonique $V^* \otimes \det(V) \simeq \Lambda^2(V)$ permet de reformuler la proposition pour $i = 2$ en terme de V^*. Elle montre alors que $D_{cris}(V(k_1))^{\varphi=F_1(x)}$ et $D_{cris}(V^*(-k_3))^{\varphi=F_3(x)^{-1}}$ sont non nuls.

7. Extensions et pseudo-représentations

7.1. **Existences de réseaux stables.**

7.1.1. Soit K un corps de caractéristique 0, $V = K^r$, G un groupe, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation semi-simple. Soit $(\rho = \oplus_{i=1}^n \rho_i, V = \oplus_{i=1}^n W_i)$ la décomposition isotypique de (ρ, V) : pour chaque i, (W_i, ρ_i) est somme directe de n_i copies d'une représentation irréductible (V_i, ρ'_i), et $\rho'_i \not\simeq \rho'_j$ si $i \neq j$.

On dira que V satisfait la condition (ABS) si les ρ'_i sont *absolument* irréductibles.

On suppose dès maintenant et dans tout §7.1 que V satisfait (ABS). On fixe de plus A un sous-anneau intègre noethérien de K tel que $K = \mathrm{Frac}(A)$ et $\mathrm{tr}(\rho(G)) \subset A$.

7.1.2. Si B est un sous-anneau de K, on appelle B-réseau de V un sous-B-module libre Λ tel que $K.\Lambda = V$. Si V est une représentation de G, on dit qu'un B-réseau est stable s'il est stable sous l'action de G.

Lemme 7.1. *i) L'image de $A[G]$ dans $End_K(V)$ est de type fini sur A.*

ii) Si A est normal, $tr(\rho'_i(G)) \subset A$.

iii) Si A est principal, V_i admet un A-réseau stable.

iv) Plus généralement, si $P \in Spec(A)$ tel que A_P est de valuation discrète, il existe $g \in A \backslash P$ tel que V_i admet un A_g-réseau stable.

v) Supposons de plus que A est soit une algèbre affinoide, soit local complet, G un groupe topologique, si $T : G \to A$ est continue, alors les $g \to tr(\rho'_i(g))$ sont continus. De plus, tout A-réseau stable est une représentation continue de G.

Preuve : Par la théorie des modules semi-simples, l'image de $K[G]$ dans $\mathrm{End}(V)$ est somme directe de ses images dans les $\mathrm{End}(W_i)$. De plus, l'image de $K[G]$ dans $\mathrm{End}(W_i)$ est l'action diagonale de $\mathrm{End}(V_i)$ dans $\mathrm{End}(W_i)$. En particulier, on dispose d'un $e_i \in K[G]$ tel que $\rho(e_i)$ est le projecteur G-équivariant sur W_i. Aussi,

$$\exists f \in K^*,\ \forall g \in G,\ \mathrm{tr}(\rho_i(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e_i g)) \in fA$$

On déduit la même assertion pour ρ'_i, en remplaçant f par f/n_i.

Soit i fixé, $d = \dim(V_i)$, on fixe une base de V_i nous permettant de l'identifier à K^d. La représentation ρ'_i étant absolument irréductible, un théorème de Wedderburn assure l'existence de $g_1, ..., g_{d^2} \in G$, tels que les $\rho'_i(g_k)$ engendrent $\mathrm{End}(V_i)$ comme K-espace vectoriel. Ainsi,

$$M := ((\mathrm{tr}(\rho'_i(g_k g_l)))_{1 \leq k,l \leq d^2}) \in \mathrm{GL}_{d^2}(K)$$

Soit $f' \in K^*$ tel que M^{-1} et les $\rho'_i(g_k)$ soient à coefficients dans $f'A$, alors pour tout $g \in G$ on a $\rho'_i(g) \in ff'/n_i M_d(A)$. Autrement dit,

$$A^d \subset \rho'_i(G).A^d \subset ff'/n_i A^d \tag{8}$$

En particulier, $A[\rho'_i(G)]$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_A(A^d, (ff'/n_i)A^d)$. Comme A est noethérien, cela prouve i). De plus, si A est principal, (8) montre que $A[\rho'_i(G)].A^d$ est un réseau stable, cela montre iii). On en déduit ii) car un anneau normal noethérien est intersection, dans son corps de fractions, de ses localisés en ses idéaux premiers de hauteur 1, qui sont de valuation discrète ([Mat] théorèmes 11.4 et 11.5).

Montrons l'assertion iv). Par iii), V_i admet un A_P-réseau stable, disons Λ_i. Fixons $e_1, ..., e_{r_i}$ une A_P-base de Λ_i, ainsi que des éléments $g_1, ..., g_s$ de G tels que les $\rho(g_j)$ engendrent comme A-module l'image de $A[G]$ dans $\mathrm{End}_K(V)$, ce qui est loisible par i). Chaque $\rho(g_j)(e_k)$ étant une A_P-combinaison linéaire finie des e_l, on peut trouver un dénominateur commun $g \in A \backslash P$ tel que le A_g-réseau $\sum_k A_g e_i$ soit stable par G, cela conclut.

La première assertion de v) découle de $n_i \mathrm{tr}(\rho'_i(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e_i g))$, prouvons la seconde. Si Λ est un réseau stable de V, il suffit de vérifier que $\psi : G \to \mathrm{End}_A(\Lambda)$ est continue, car alors $g \mapsto \psi(g)^{-1} = \psi(g^{-1})$ le sera aussi. On rappelle que si A est affinoide ([BGR] 3.7.3) ou local complet, tout A-module de type fini a une topologie canonique de A-module complet, et que toute application A-linéaire entre deux tels modules est continue et fermée. Par i), on peut trouver $g_1, ..., g_s \in G$ engendrant $M := A[\rho(G)]$, on munit M de la topologie discutée ci-dessus. Il suffit de montrer que $\psi^* : G \to M$ est continue. Par semi-simplicité de V comme G-représentation, l'application $\psi^{**} : G \to A^s$, $g \to (\mathrm{tr}(g_i g))$, induit une injection A-linéaire $M \to A^s$, nécessairement continue et fermée. La continuité de ψ^{**} conclut. $\square$

7.2. **Représentations attachées aux pseudo-caractères.**

7.2.1. Soit G un groupe, A un anneau commutatif, on rappelle qu'une fonction $T : G \longrightarrow A$ est un pseudo-caractère sur G, de dimension $n \in \mathbb{N}$, à coefficients dans A si

$$\forall g, h \in G, \;\; T(gh) = T(hg)$$

$$\forall g = (g_1, ..., g_{n+1}) \in G^{n+1}, \quad \sum_{\sigma = c_1 ... c_r \in \mathfrak{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{r} f(c_i(g)) = 0$$

n est le plus petit entier ayant la propriété ci-dessus

Ici $\sigma = c_1 ... c_r$ est la décomposition en cycles de σ, et si $c = (j_1, ..., j_s)$ est un cycle $c(g) = \prod_{i=1}^{s} g_{j_i}$, cf. [Tay] §1, [Rou] §2.

La trace d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ est en particulier un pseudo-caractère sur G, à coefficients dans A (cf. *loc. cit.*) ; il est de dimension n si A est intègre de caractéristique 0 (cf. [Rou] 2.4). On discute de l'assertion réciproque dans les paragraphes qui suivent.

7.2.2. Si $A = F$ est un corps, il est connu que quitte à faire une extension séparable finie de F, T est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(F)$, unique à isomorphisme près, satisfaisant la propriété (ABS) de 7.1.1 (voir [Tay] §1 théorème 1, [Rou] 4.2 dans cette généralité). On dira que T est absolument irréductible si cette représentation l'est.

Soient F un corps, $B \subset F$ un sous-anneau, $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ une représentation de G, on suppose de plus que $\mathrm{tr}(\rho(G)) \subset B$, la discussion ci-dessus implique immédiatement le :

Corollaire 7.1. *Sous ces hypothèses, si m est un idéal maximal de B de corps résiduel k de caractéristique 0, alors la réduction modulo m de $tr(\rho)$ est la trace d'une représentation semi-simple*

$$\rho_m^{ss} : G \to GL_n(\overline{k})$$

ρ_m^{ss} est unique à isomorphisme près, définie sur une extension finie de k.

Notons qu'il est clair que si $\rho(G) \subset \mathrm{GL}_n(B)$, cela a un sens de réduire ρ modulo m, et qu'alors ρ_m^{ss} est la semi-simplification de cette réduction. Dans le cas où $B = A(X)$ est une algèbre affinoide, $x \in X$, m l'idéal maximal de B défini par x, on notera aussi ρ_x^{ss} pour ρ_m^{ss}.

7.2.3. Supposons A quelconque, mais que pour tout $m \in \mathrm{Specmax}(A)$, la réduction modulo m de T, $T_m : G \to A/m$ est absolument irréductible. Quitte à remplacer A par une extension étale finie, il est encore vrai que T est la trace d'une unique représentation $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ ([Rou] 5.1).

Supposons finalement que A est intègre, que $T : G \to Frac(A)$ déduit de T soit absolument irréductible, mais que les T_m ne sont pas tous absolument irréductibles. On ne peut plus alors attacher canoniquement de représentation à T mais, au moins sous certaines hypothèses développées plus bas, un ensemble de représentations non toutes isomorphes en général. Pour nos applications, le cas intéressant sera celui où A est une algèbre affinoide intègre de dimension 1.

Lemme 7.2. *Soient F un corps local, X un F-affinoide intègre de dimension 1, et $T : G \to A(X)$ un pseudo-caractère de dimension n, il existe :*

i) Un F-affinoide Y régulier intègre, de dimension 1, fini et surjectif sur X,

ii) Une représentation semi-simple $\rho_{K(Y)} : G \to GL_n(K(Y))$ de trace T, satisfaisant (ABS).

Preuve : En considérant la composée $T : G \to A(X) \to K(X)$, §7.2.2 assure que T est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(L)$ satisfaisant (ABS) (cf. 7.1.1), pour une extension finie $L/K(X)$. Soit A' la normalisation de A dans L, c'est un anneau de Dedekind car A est intègre noethérien de dimension 1. D'après [BGR] 6.1.2, proposition 4, A' est une F-algèbre affinoide finie sur A, on l'écrit $A(Y)$, en particulier $L = K(Y)$. Ceci prouve i) et ii). $\square$

7.2.4. Soit Y un F-affinoide intègre de dimension 1, $y \in Y(F)$ un point régulier, G un groupe et $T : G \to A(Y)$ un pseudo-caractère qui est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(K(Y))$ satisfaisant (ABS). D'après 7.1 iv), $K(Y)^n$ a un $A(Y)_g$ réseau stable Λ_0, pour $g \in A(Y)$ ne s'annulant pas en y.

On note $\mathcal{O}$ l'anneau local rigide de $A(Y)$ en y, c'est un anneau de valuation discrète (voir [BGR] 7.3.2 proposition 8), on pose $L := \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$. Le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}\Lambda_0$ est un $\mathcal{O}$-réseau de $L^n := K(Y) \otimes_{K(Y)} L^n$ stable par G. On supposera que l'anneau local algébrique en y est principal d'idéal maximal engendré par $z \in A(Y)$, on peut toujours faire cette hypothèse quitte à rétrécir Y. Disons que deux $\mathcal{O}$-réseaux stables Λ_1 et Λ_2 sont homothétiques si il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $z^r\Lambda_1 = \Lambda_2$. On note S l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{O}$-réseaux stables pour la relation d'homothétie, et $[\Lambda]$ la classe dans S du $\mathcal{O}$-réseau stable Λ.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts affinoides connexes de Y contenant y, Λ_i un $A(\Omega_i)$-réseau stable de L^n pour $i = 1, 2$. On dira que Λ_1 et Λ_2 sont équivalents s'il existe $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ un ouvert affinoide connexe de Y contenant y, et un entier $r \in \mathbb{Z}$, vérifiant

$$z^r A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2 \subset L^n$$

On note S' l'ensemble des classes pour cette relation d'équivalence, et $[\Lambda_i] \in S'$ la classe du $A(\Omega_i)$-réseau stable Λ_i.

Lemme 7.3. – *S et S' sont non vides.*
- *L'application naturelle $S' \longrightarrow S$, $[\Lambda] \mapsto [\mathcal{O}\Lambda]$, est une bijection.*
- *Si $s = [\Lambda] \in S'$, les représentations de G sur les F-espaces vectoriels $\Lambda/z\Lambda$ et $(\mathcal{O}\Lambda)/z(\mathcal{O}\Lambda)$ sont isomorphes.*

Cette dernière classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de Λ tel que $s = [\Lambda]$, on l'appelle la représentation résiduelle de s.

Preuve : L'ensemble S est non vide car contient $[\mathcal{O}\Lambda_0]$. De même, si Ω est un ouvert affinoide connexe de Y contenant y et tel g ne s'annule pas sur Y (ce qui existe car $g(y) \neq 0$), alors la classe de $A(\Omega)\Lambda_0$ est un $A(\Omega)$-réseau stable, ce qui prouve la première assertion.

L'application de l'énoncé est clairement bien définie. Montrons l'injectivité. Avec les notations du paragraphe ci-dessus, supposons que $\mathcal{O}\Lambda_1 = z^p\mathcal{O}\Lambda_2$, $p \in \mathbb{N}$. On peut supposer $p = 0$. Si $e^i_1, ..., e^i_n$ une $A(\Omega_i)$-base de Λ_i, on note $M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ la matrice des e^1 dans la base des e^2. On peut trouver $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ un ouvert affinoide connexe de Y contenant y tel que $M \in \mathrm{GL}_n(A(\Omega_3))$. Alors $A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2$.

Pour la surjectivité, considérons Λ un $\mathcal{O}$-réseau stable par G quelconque dans L^n. On sait que l'image C de $A(Y)[G]$ dans $\mathrm{End}_{K(Y)}(K(Y)^n) \subset \mathrm{End}_L L^n$ est de type fini sur $A(Y)$ par le lemme 7.1 i). C est de plus trivialement un sous-$A(Y)$-module de $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\Lambda)$. On choisit m_1,...,m_r une famille $A(Y)$-génératrice de C, ainsi que e_1,...,e_n une $\mathcal{O}$-base du $\mathcal{O}$-réseau Λ. On peut trouver un voisinage affinoide Ω de y dans Y tel que l'ensemble de tous les m_i soient à coefficients dans $A(\Omega)$ dans la base des e_i. Le $A(\Omega)$-réseau $\oplus_{i=1}^n A(\Omega)e_i$ est alors stable, et sa classe est un antécédent de $[\Lambda]$.

Les autres assertions sont immédiates. $\square$

On rappelle que pour tout affinoide Y réduit, $A(Y)$ est canoniquement normé par sa norme du sup. Conservant les hypothèses de tout ce paragraphe, supposant de plus que G est un groupe topologique et que $T : G \to A(Y)$ est continue, alors pour tout $A(\Omega)$-réseau stable comme plus haut, le lemme 7.1 v) montre que la représentation déduite $G \to \mathrm{GL}_n(A(\Omega))$ est continue. En corollaire du lemme 7.3, on obtient alors le

Corollaire 7.2. *Si $T : G \to A(Y)$ est continue, alors pour tout $\mathcal{O}$-réseau stable Λ de L^n, la représentation résiduelle de G sur $\Lambda/z\Lambda$ est continue.*

7.3. **Variante d'un lemme de Ribet.** Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, m un idéal maximal de A, et $k = A/m$. Soit G un groupe, τ un automorphisme de K. Pour ρ une représentation de G sur un espace V de dimension finie sur K, et Λ un A-réseau stable (dans la suite nous dirons simplement un *réseau stable*), on note $\bar{\rho}_\Lambda$ la représentation sur $\Lambda/m\Lambda \simeq k^n$. Par le théorème de Brauer-Nesbitt ([CR, 30.16]), $\bar{\rho}_\Lambda^{ss}$ ne dépend pas du réseau stable Λ (s'il en existe un), on la note $\bar{\rho}^{ss}$. Pour ρ une représentation sur K ou k on note $\rho^\perp$ la représentation $g \mapsto \rho(\tau(g))^*$.

Proposition 7.1. *Soit ρ une représentation de G de dimension n sur K admettant un réseau stable. On suppose que $\rho \simeq \rho^\perp$ est absolument irréductible et que $\bar{\rho}^{ss} \simeq \phi \oplus \phi^\perp \oplus \psi$ où ϕ, $\phi^\perp$ et ψ sont trois représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.*

Alors :

a. Soit il existe un réseau stable Λ tel que $\bar{\rho}_\Lambda$ admette un sous-quotient r qui est une extension non triviale de $\phi^\perp$ par ϕ, et qui vérifie $r \simeq r^\perp$.

b. Soit il existe un réseau stable Λ tel que $\bar{\rho}_\Lambda \simeq \bar{\rho}_\Lambda^\perp$, et tel que $\bar{\rho}_\Lambda$ admette une unique sous-représentation r de longueur 2 et un unique sous-quotient r' de longueur 2, avec r extension non triviale de ψ par ϕ, r' extension non triviale de $\phi^\perp$ par ψ, et $r' \simeq r^\perp$.

La fin de cette section est consacrée à la preuve de la proposition 7.1.

7.3.1. Notons d'abord que l'on peut supposer que A est un anneau de valuation discrète complet, ce que l'on fait. En effet, si A' est le complété de A en m, K' le corps des fractions de A', A' est de valuation discrète complet de corps résiduel k. L'extension ρ' de ρ à K' vérifie encore toutes les hypothèses du théorème. Si Λ' est un A'-réseau stable, $\Lambda = \Lambda' \cap V$ est un A-réseau stable de V, et $\bar{\rho}_\Lambda \simeq \bar{\rho}'_{\Lambda'}$, si bien que la conclusion du théorème pour K' entraîne la conclusion pour K.

7.3.2. Nous prouverons la proposition en utilisant le dictionnaire de [Be2] et [BeG]. Rappelons quelques notions et résultats utiles de ces articles, auquel nous renvoyons au lecteur pour de plus amples détails. Soit $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_n(K)$, X l'ensemble de ses sommets. Soit $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{X}$ fixe par $\rho(G)$, l'ensemble de sommets $S := \mathcal{S} \cap X$ est l'ensemble des classes d'homothétie de réseaux stables (cf. [Be2, lemme

3.1.2]). Pour $x \in S$ on note $\bar{\rho}_x$ une réduction $\bar{\rho}_\Lambda$ pour Λ un représentant de x, ce qui ne dépend pas du choix de Λ, à isomorphisme près.

Lemme 7.4. *i) $\mathcal{S}$ est clos, i.e. convexe et réunion d'adhérence de facettes.*
ii) $\mathcal{S}$ est contenu dans un sous-appartement $\mathcal{A}$ de dimension 2, d'intérieur non vide.
iii) $\mathcal{S}$ est borné et S est fini.

Preuve: D'après [Be2, prop. 3.1.3], $\mathcal{S}$ est clos, ce qui prouve i). La représentation $\bar{\rho}^{ss}$ est sans multiplicité. D'après i) et [BeG, prop. 3.1.1], $\mathcal{S}$ est donc contenu dans un appartement de $\mathcal{X}$. Comme $\bar{\rho}^{ss}$ a trois facteurs de Jordan-Hölder, [Be2, prop. 2.4.1 et 3.3.2] assurent que $\mathcal{S}$ engendre un sous-appartement de $\mathcal{X}$ de dimension 2, ce qui prouve ii). Par [Be2, prop. 3.2.1], ρ étant irréductible, $\mathcal{S}$ est borné. Comme il est dans un appartement de $\mathcal{X}$ par ii), S est fini. $\square$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc un polygone convexe d'intérieur non vide dans le sous-appartement $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$, qui est un plan. Un exemple possible est représenté par la figure ci-après.

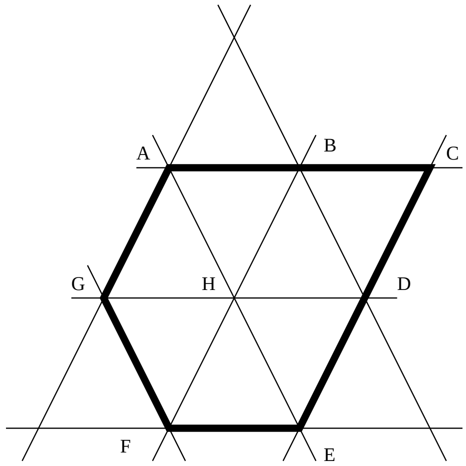

FIG. 1. Un exemple de partie $\mathcal{S}$

L'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^2$ est l'enveloppe convexe de la ligne polygonale foncée, $S = \{A, B, C, ..., H\}$, et les *côtés* de $\mathcal{S}$ sont les segments $[AC], [CE], [EF], [FG]$ et $[GA]$ (par exemple $[BC]$ n'est pas considéré comme un côté). De manière générale, $\mathcal{S}$ a de trois à six côtés. Avant d'énoncer précisément le lemme nous dont aurons besoin, nous allons discuter de la description donnée dans [BeG] des extensions non triviales apparaissant comme sous-quotients des $\bar{\rho}_x$, $x \in S$, en terme des côtés de $\mathcal{S}$.

7.3.3. Il est prouvé *loc. cit.* que pour chaque côté γ de $\mathcal{S}$, il existe une unique extension non triviale r_γ entre deux éléments distincts de $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$ qui apparaît comme sous-quotient de tous les $\bar{\rho}_x$, $x \in \gamma \cap S$. Ils montrent alors que si pour un sommet x, $\bar{\rho}_x$ admet r_γ comme sous-quotient, c'est que ce sommet est dans c. Enfin, l'application $\gamma \mapsto r_\gamma$ est une bijection de l'ensemble des côtés de $\mathcal{S}$ sur l'ensemble des extensions non triviales qui apparaissent comme sous-quotient d'un $\bar{\rho}_x$ avec $x \in S$. En particulier, une remarque importante dans le cas où $\mathcal{S}$ a strictement moins de six côtés, est qu'au moins un des six types possibles d'extensions non triviales (par exemple de ϕ par $\phi^\perp$) n'apparaît comme sous-quotient d'aucun des $\bar{\rho}_x$ avec $x \in S$. L'énoncé correct d'existence d'extensions non triviales se traduit plutôt par la connexité d'un certain *graphe orienté des extensions non triviales*, comme l'explique le lemme suivant, dans lequel on récapitule en partie ce que l'on vient de dire.

Lemme 7.5. *Il existe un graphe orienté d'ensemble de sommets $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$, d'ensemble d'arêtes $A \subset (\{\phi, \phi^\perp, \psi\}^2 - \Delta)$ (Δ est la diagonale), qui est connexe en tant que graphe orienté, muni d'une bijection c de A sur les côtés de $\mathcal{S}$, vérifiant les propriétés suivantes :*

- *i) Pour toute arête $a = (u, v) \in A$, il existe une extension $r_{c(a)}$ de v par u, non triviale, telle que pour tout x dans $c(a) \cap S$, $r_{c(a)}$ apparaît comme sous-quotient de $\bar{\rho}_x$.*
- *ii) Réciproquement, si $x \in S$, et si $\bar{\rho}_x$ contient comme sous-quotient une extension non triviale de v par u, alors cette extension est isomorphe à $r_{c((u,v))}$, et x est sur $c((u, v))$.*
- *iii) Si (u, v) et (v, w) sont deux arêtes de A, avec u, v, w deux à deux distincts, les côtés $c((u, v))$ et $c((v, w))$ du polygone $\mathcal{S}$ se coupent si et seulement si $(u, w) \notin A$.*

Preuve: Considérons le graphe orienté d'ensemble de sommets $\{1, 2, 3\}$ attaché à la partie close $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{G}(\mathcal{S})^1$ dans [BeG] §2.2. On identifie $\{1, 2, 3\}$ à $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$ comme en *loc. cit.* 3.3.2. La proposition 2.3.1 de [BeG] donne une bijection entre les arêtes de $\mathcal{G}(\mathcal{S})^1$ et les côtés de $\mathcal{S}$, que l'on note c. Ce graphe est connexe en tant que graphe orienté parce que ρ est irréductible ([BeG, prop. 3.4.1]). Soit $a = (u, v) \in A$, $r_{c(a)}$ est définie comme étant l'unique extension non triviale de v par u qui est un sous-quotient d'un $\bar{\rho}_x$, avec $x \in S$ (cf. corollaire 3.3.7 *loc. cit.*). Les assertions i) et ii) résultent de la remarque suivant le théorème 3.3.3. *loc. cit.*. La propriété iii) résulte de la remarque de *loc. cit.* §2.3. □

7.3.4. À partir d'ici, nous allons traduire la condition d'anti-autodualité $\rho = \rho^\perp$. Par hypothèse, il existe un isomorphisme de K-espaces vectoriels φ de V dans V^* tel que

$$\forall g \in G,\ \rho(\tau(g)) = \varphi^{-1}\rho^*(g)\varphi. \tag{9}$$

Si Λ est un réseau de V, on note Λ^* le réseau dual dans V^*. L'application $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ passe au quotient et définit une bijection naturelle b entre l'ensemble des sommets de l'immeuble X de $\mathrm{PGL}(V)$ et celui de l'immeuble X^* de $\mathrm{PGL}(V^*)$, qui s'étend en un morphisme d'immeubles de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^*$. Il est clair que si $\mathcal{S}^*$ désigne la partie de $\mathcal{X}^*$ stable par ρ^*, on a

$$S^* = b(S).$$

Par ailleurs l'application φ induit un isomorphisme d'immeubles φ_* de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^*$. On déduit immédiatement de (9) que

$$\varphi_*(S) = S^*.$$

L'isomorphisme $t := b^{-1}\varphi_*$ de $\mathcal{X}$ laisse donc stables $\mathcal{S}$ et S. Si $x \in S$, φ induit par passage au quotient un isomorphisme

$$\bar{\rho}_x^{\perp} \simeq \bar{\rho}_{t(x)}. \tag{10}$$

7.3.5. Terminons la preuve de la proposition 7.1. Comme le graphe du lemme 7.5 est connexe en tant que graphe orienté, il y a un chemin qui va de ϕ à $\phi^{\perp}$. Il y a donc deux possibilités :

Soit $(\phi, \phi^{\perp}) \in A$, pour $x \in c((\phi, \phi^{\perp})) \cap S$, le lemme 7.5 i) assure que $\bar{\rho}_x$ contient comme sous-quotient $r_{c((\phi,\phi^{\perp}))}$ qui est une extension non triviale de $\phi^{\perp}$ par ϕ. Montrons que $r^{\perp}_{c((\phi,\phi^{\perp}))} \simeq r_{c((\phi,\phi^{\perp}))}$. La représentation $r^{\perp}_{c((\phi,\phi^{\perp}))}$ est aussi une extension non triviale de $\phi^{\perp}$ par ϕ, qui apparaît comme sous-quotient de $\bar{\rho}_{t(x)}$ d'après (10). L'assertion ii) du lemme 7.5 conclut. On est donc dans le cas a. de la proposition 7.1.

Soit $(\phi, \phi^{\perp}) \notin A$, auquel cas (ϕ, ψ) et $(\psi, \phi^{\perp})$ sont dans A. L'assertion iii) du lemme 7.5 implique qu'il existe $x \in c((\phi, \psi)) \cap c((\psi, \phi^{\perp})) \cap S$. Ainsi, $\bar{\rho}_x$ contient une extension non triviale de ψ par $\phi^{\perp}$, et une extension non triviale de ϕ par ψ. Cela entraîne que la première (resp. la seconde) est l'unique sous-extension (resp. quotient) de longueur 2 de $\bar{\rho}_x$. Pour conclure que l'on est bien dans le cas b. de la proposition 7.1, il suffit donc de voir que $t(x) = x$ (cf. formule (10)). Mais par le lemme 7.5 ii) et (10), $t(c((\phi, \psi))) = c((\psi, \phi^{\perp}))$, car $\psi \simeq \psi^{\perp}$. De même, $t(c((\psi, \phi^{\perp}))) = c((\phi, \psi))$. En particulier, $t(x) = x$. $\square$

8. Déformation p-adique de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^{\perp}$

8.1. Notations pour les espaces de formes automorphes.

8.1.1. On fixe encore $p = v_1 v_2$ décomposé dans E, N un entier premier à p, ainsi qu'un isomorphisme de corps $\iota : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

La donnée de v_1 nous permet d'identifier canoniquement $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ comme dans 4.2.1. Soit K_f un compact ouvert de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$, décomposé place par place, égal à un compact maximal hyperspécial aux places ne divisant pas $pN\mathrm{disc}(E)$, et à l'Iwahori I des éléments triangulaires supérieurs modulo p de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$ en p. On notera de plus K_f^p le sous-groupe des éléments de K_f de p-composante égale à 1.

On fixe une représentation irréductible complexe lisse J de K_f définie sur $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, triviale restreinte aux places ne divisant pas N. La représentation J est de dimension finie, ι nous permet de la voir à coefficients dans un corps local fixé F_0 et de considérer $J(F)$ pour chaque $F_0 \subset F \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ comme étant une F-représentation lisse de K_f. On note $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions complexes lisses sur $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$, vu comme représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$ par translation à droite.

8.1.2. Si $w = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, *l'espace des formes automorphes pour* $U(3)$ de "poids automorphes" w et de type (K_f, J) est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$S_w(K_f, J, \mathbb{C}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(3)(\mathbb{R}) \times K_f}(V_w(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} J, \mathcal{B})$$

On note $\mathcal{H}'$ l'algèbre de Hecke globale (sur $\mathbb{Z}$) hors de pN, et $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}(p)$, où $\mathcal{A}(p)$ est l'algèbre d'Atkin-Lehner introduite en 5.1. C'est un anneau commutatif, et on notera

$\mathcal{H}_A := \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A$, pour tout anneau commutatif A. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel[16] $S_w(K_f, J, \mathbb{C})$ est de manière naturelle un module sur $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Si V est un $A[(I\Delta^+ I)K_f]$-module, on notera $H^0(V)$ le $\mathcal{H}_A$-module des fonctions

$$\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f) \to V, \text{ telles que } \ \forall x \in \mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f),\ \forall u \in K_f,\ u.f(xu) = f(x)$$

Notons que $H^0(V)$ dépend aussi de K_f, bien que la notation ne le laisse pas apparaître. C'est une vérification classique que la donnée de ι permet de voir $H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0))$ comme une F_0-structure de $S_w(K_f, J, \mathbb{C})$, et ce comme $\mathcal{H}_{F_0}$-module. On pose[17]

$$S_w^{cl} := H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0))$$

8.1.3. Par la finitude du nombre de classes ([Bor1] 5.1), $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$ s'écrit comme réunion finie

$$\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f) = \coprod_{i=1}^{h} \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}) x_i K_f$$

de plus $\Gamma_i := (x_i \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}) x_i^{-1}) \cap K_f$ est un groupe fini car compact discret. Pour un $A[I\Delta^+ I, K_f]$-module V, l'application A-linéaire

$$\varphi_V : H^0(V) \to \oplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i}, \quad f \to (f(x_1), ..., f(x_h))$$

est un isomorphisme A-linéaire fonctoriel en V. On en déduit que sur les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, le foncteur $V \mapsto H^0(V)$ est exact et commute à l'extension des scalaires en A.

Enfin, on en déduit aussi que S_w^{cl} est de dimension finie sur F_0. De plus, si V est normé par $|.|$, on munit $H^0(V)$ de la norme par

$$|f| := \mathrm{Sup}_{i=1}^h |f(x_i)|$$

8.2. **Familles p-adiques typées pour U(3).**

8.2.1. Soit $w = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Q}^3$, on note $S_w^{cl,\alpha}$ le plus grand sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module de $S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p$ sur lequel chaque U_i^w (cf. 6.2.4), $1 \leq i \leq 3$, n'a que des valeurs propres de valuation α_i. On dira que w est α-régulier si $\delta(w) > \alpha_1 + \alpha_2 - 1$. On rappelle que pour tout $w' \in \mathbb{Z}^{3,+}$, on a défini en 6.2.4 un caractère $\nu_{w'} : \Delta^+ \to p^{\mathbb{Z}}$. Si $r \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{C}_p^3$, on note $B(x,r)$ la boule fermée de $\mathbb{C}_p^3$ de centre x de rayon r.

[16] La représentation $V_w(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ est définie en 2.3. On la voit ici comme une représentation de $U(3)(\mathbb{R})$ par le plongement $U(3)(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_3(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, la dernière flèche étant donnée par le plongement de E dans $\mathbb{C}$ suivant : $E \stackrel{v_1}{\to} \overline{\mathbb{Q}}_p \stackrel{\iota^{-1}}{\to} \mathbb{C}$.

[17] Noter le $-w$ dans la définition

8.2.2. Fixons $f \neq 0 \in S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p$ une forme propre pour $\mathcal{H}$.

Proposition 8.1. *Il existe un corps local F, $r \in |F| \cap]0,1[$, X un F-affinoide réduit, $\pi : X \to B(w,r)$ un F-morphisme fini, un morphisme d'anneau $a : \mathcal{H} \to A(X)^0$, et $x_f \in X(F)$ tels que :*

i) Pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$, $a([Iu_iI])$ est un inversible de $A(X)$ et $x \mapsto v(a([Iu_iI])(x)) \in \mathbb{Q}$ est constante sur $X(\mathbb{C}_p)$, disons égale à α_i. On pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

ii) Si $w' \in B(w,r) \cap (w+(p-1)\mathbb{Z}^{3,+})$ est α-régulier, l'application $X(\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C}_p)$,

$$x \mapsto (\chi_x : [IuI] \otimes h' \in \mathcal{A}(p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}' \mapsto \nu_{w'}(u) a([IuI]h')(x))$$

induit une bijection entre $\pi^{-1}(w')(\mathbb{C}_p)$ et l'ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$-valués de $\mathcal{H}$ apparaissant dans $S_{w'}^{cl,\alpha} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p$, comptés sans multiplicité,

iii) χ_{x_f} est le caractère de $\mathcal{H}$ sur f.

iv) L'image de $\mathcal{H}$ dans $A(X)^0$ est d'adhérence compacte.

v) La restriction de π a chaque composante irréductible de X est surjective sur $B(w,r)$. Cette propriété est de plus encore vérifiée pour le changement de base de π à tout fermé irréductible de $B(w,r)$.

vi) $\pi^{-1}(B(w,r)(\mathbb{Q}_p)) \subset X(F)$.

8.2.3. Un point de $X(F)$ sera dit *classique* si $\pi(x) \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$ et si le caractère χ_x de $\mathcal{H}$ qui lui correspond par le ii) de la proposition 8.1 est réalisé dans $S_{\pi(x)}^{cl} \otimes_{F_0} F$.

Corollaire 8.1. *Les points classiques sont Zariski-denses dans $X(\mathbb{C}_p)$.*

Preuve: L'ensemble des points $w' \in (w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}) \cap B(w,r)$ qui sont α-réguliers est Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}(A(B(w,r)))$. Les propriétés ii) et v) de la proposition 8.1, ainsi que [Che][lemme 6.2.8] concluent. $\square$

8.2.4. La proposition 8.1 est essentiellement une conséquence des techniques de [Che], à ceci près que nous expliquons ici comment gérer la présence du type J, et le fait que le niveau n'est pas nécessairement net. Le reste de cette section est consacré à sa preuve. Afin de faciliter le travail du lecteur, nous reprenons en détail certaines des constructions faites *loc.cit.* .

Le cheminement de la preuve est le suivant. On commence par rappeler au §8.2.5 les propriétés essentielles de la famille des séries principales p-adiques de l'Iwahori de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, que l'on note M. Cette dernière nous permet de définir au §8.2.8 la famille S des espaces de formes automorphes p-adiques de type J et niveau K_f. La famille de formes automorphes recherchée est obtenue, à la Coleman, en découpant dans S une famille de "vecteurs propres" pour l'opérateur compact U_p, ce qui est achevé au lemme 8.9.

8.2.5. Soit $B := B(0,1)/\mathbb{Q}_p$ d'algèbre affinoide $A(B) := \mathbb{Q}_p\langle X_1, X_2, X_3\rangle$. Si $w' \in \mathbb{Z}^{3,+}$, nous avons défini en §6.2.4 un caractère $\nu_{w'} : \Delta^+ \to p^{\mathbb{Z}}$. Comme $I\Delta^+ I = \coprod_{u\in\Delta^+} IuI$ (cf. [Che] §2.5, ce qui est noté ici I, Δ^+ et $I\Delta^+I$, est respectivement noté $\Gamma_0(p)$, U et $\mathbb{M}$ *loc.cit.*), ce caractère se prolonge de manière unique en un caractère $I\Delta^+I \to p^{\mathbb{Z}}$ trivial sur I, que l'on notera encore $\nu_{w'}$.

Lemme 8.1. *Il existe un $A(B)$-module de Banach orthonormalisable M, muni d'une opération $A(B)$-linéaire du monoïde $I\Delta^+I$, tel que :*

(i) La spécialisation $M_{w'}$ de M en tout $w' \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+} \subset B(\mathbb{Q}_p)$ contient un sous $\mathbb{Q}_p[I\Delta^+I]$-module $M_{w'}^{cl}$ qui a la propriété que $M_{w'}^{cl} \otimes \nu_{w'}$ est $\mathbb{Q}_p[I\Delta^+I]$-isomorphe à $V_{-w'}(\mathbb{Q}_p)$.

(ii) Les éléments de $I\Delta^+I$ agissent par des endomorphismes continus de norme ≤ 1 de M. Si $a < b < c \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{diag}(p^a, p^b, p^c)$ agit par un endomorphisme compact.

(iii) Soient $w' = (k_1' \geq k_2' \geq k_3') \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$ et $s := 1 + \mathrm{Min}(k_1' - k_2', k_2' - k_3')$, alors $\frac{\mathrm{diag}(1,p,p^2)}{p^s}$ est de norme ≤ 1 sur $M_{w'}/M_{w'}^{cl}$.

Preuve: Soit M' le $A(B)$-module noté

$$\mathcal{S}(1)_\chi, \ \ \chi = (\tau^{-k_3}, \tau^{-k_2}, \tau^{-k_1})$$

dans [Che] §3.6. On le munit de la représentation $A(B)$-linéaire de $I\Delta^+I$ notée [.] *loc. cit.*. Remarquons que si $w' = (k_1' \geq k_2' \geq k_3')$, le plus haut poids de $V_{-w'}$ est $(k_2' - k_3', k_1' - k_2', -k_1') \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$ dans les notations *loc. cit.* C'est pourquoi l'on considère le $A(B)$-module $M := M' \otimes_{A(B)} A(B)$, l'application $A(B) \to A(B)$ étant le $\mathbb{Q}_p$-isomorphisme $(X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_2 - X_3, X_1 - X_2, -X_1)$. Ainsi $M_{(k_1' \geq k_2' \geq k_3')} = M'_{(k_2'-k_3', k_1'-k_2', -k_1')}$.

L'orthonormalisabilité de M, ainsi que l'assertion (ii), découlent de [Che][prop. 3.6.2]. L'assertion (i) est une conséquence de la combinaison du lemme 3.3.1 *loc.cit.* et du cinquième point de la proposition 3.6.2, la présence de la torsion par $\nu_{w'}$ étant expliquée en §3.5. Il reste à prouver iii). Soit $t = (k_2' - k_3', k_1' - k_2')$, il s'agit de démontrer, dans les notations de *loc.cit.* §3.3 et §3.5, que $\frac{\mathrm{diag}(1,p,p^2)}{p^s}$ est de norme ≤ 1 sur $(\mathcal{S}^t/S_t) \otimes \nu_t$. Il suffit de démontrer la même assertion sur le $\mathbb{Q}_p$-Banach $(\mathcal{N}^t/B_t) \otimes \nu_t$, dont c'est un quotient. Mais ce dernier admet une base orthonormale explicite propre pour $\mathrm{diag}(1,p,p^2)$, formée de monômes en les $z_{i,j}$, $i > 1$, sur lesquels l'action est donnée par le lemme 2.5.1 *loc.cit.* . Un calcul immédiat conclut (ce calcul est de plus explicité dans la preuve de la proposition 4.7.4). $\square$

8.2.6. Soient A une $\mathbb{Q}$-algèbre et V un $A[(I\Delta^+I)K_f]$-module, on aura à considérer la suite :

$$\begin{tikzcd} H^0(V) \arrow[r, "\varphi_V", "\sim"'] & \oplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i} \arrow[r, bend left, hook, "i_V"] & V^h \arrow[l, bend left, two heads, "p_V"] \end{tikzcd} \tag{11}$$

où φ_V est l'isomorphisme A-linéaire introduit en 8.1.3, i_V l'inclusion canonique, et $p_V := (\frac{\sum_{x\in\Gamma_i} x}{|\Gamma_i|})_i$ la projection $(\prod_i \Gamma_i)$-équivariante canonique, bien définie car V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On a $p_V.i_V = id$, ce qui identifie le A-module $H^0(V)$ à un facteur direct de V^h, et ce fonctoriellement en le $A[(I\Delta^+I)K_f]$-module V, si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Le lemme qui suit donne une description (non canonique) de l'action des opérateurs de Hecke sur $H^0(V)$ en terme de φ_V et d'endomorphismes de V^h :

Lemme 8.2. *Soit $\zeta \in U(3)(\mathbb{A}_f)$ tel que $\zeta_l = 1$ si $l|N$ et $\zeta_p \in IuI$, avec $u \in \Delta^+$. Notons $T(\zeta)$ l'opérateur de Hecke associé à la double classe $K_f\zeta K_f$, c'est un endomorphisme A-linéaire de $H^0(V)$. Il existe un entier r, ainsi que des $\sigma_j : V^h \to V^h$ et $T_j : V \to V$, $j = 1...r$, chacun dépendant de ζ, tels que :*

(i) σ_j est la composée d'une permutation des h-coordonnées sur V^h par la projection sur l'un des h facteurs V,

(ii) T_j est la multiplication par un élément de $(IuI)K_f^p$,

(iii) $\sum_{j=1}^r T_j.\sigma_j$ est un endomorphisme de V^h préservant $\oplus_i V^{\Gamma_i}$, dont la restriction à ce dernier est $\varphi_V.T(\zeta).\varphi_V^{-1}$.

Preuve: La preuve est identique à celle de [Che] lemme 4.5.2, auquel nous renvoyons donc le lecteur. □

8.2.7. On suppose dans ce qui suit que A est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach A noethérienne commutative ultramétrique (cf. [Col] A.1) dont la norme induit la norme usuelle sur $\mathbb{Q}_p$, et que V est un A-module de Banach normé par $|.|$, muni d'une action de $(I\Delta^+I)K_f$ par endomorphismes A-linéaires continus de V. La norme sup. sur V^h en fait un A-module de Banach, orthonormalisable si V l'est.

Lemme 8.3. *Sous les hypothèses ci-dessus, $H^0(V)$ est un A-module de Banach facteur direct topologique de V^h.*

Preuve: La norme de V^h induit la norme de $H^0(V)$ définie en 8.1.3. L'inclusion i_V est continue par définition, et p_V l'est aussi car les éléments de $\Gamma_i \subset K_f$ le sont. On en déduit que $H^0(V)$ est un facteur direct topologique de V^h, et donc que c'est un sous-A-module de Banach de V^h.

8.2.8. Fixons une norme de F_0-espace vectoriel sur $J^*(F_0)$ telle que $|J^*(F_0)| = |F_0|$. Notons $A(B/F_0) := F_0\langle X_1, X_2, X_3\rangle$. On munit M (resp. $J^*(F_0)$) de l'unique action de $(I\Delta^+I)K_f$ prolongeant celle de $I\Delta^+I$ (resp. de K_f), triviale sur K_f^p (resp. sur $I\Delta^+I$). Cela munit naturellement $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$ d'une structure de $(I\Delta^+I)K_f$-module. On définit le $A(B/F_0)$-module normé des formes automorphes p-adiques pour U(3), de type J, comme étant

$$S := H^0(M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)),$$

muni de la norme discutée en §8.1.3.

Lemme 8.4. *(i) Le $A(B_0/F)$-module normé S est un $A(B/F_0)$-module de Banach, facteur direct topologique d'un $A(B/F_0)$-module de Banach orthonormalisable.*

(ii) Soit $\zeta \in U(3)(\mathbb{A}_f)$ comme dans le lemme 8.2, l'opérateur de Hecke $T(\zeta)$ agit sur S par un endomorphisme $A(B_0/F)$-linéaire continu de norme ≤ 1. Si $\zeta_p = \mathrm{diag}(p^a, p^b, p^c)$ avec $a < b < c$, alors $T(\zeta)$ est compact.

Preuve: D'après le lemme 8.1, M est $A(B)$-orthonormalisable. Comme $J^*(F_0)$ est un F_0-espace vectoriel de dimension finie tel que $|J^*(F_0)| = |F_0|$ (donc F_0-orthonormalisable), il vient que $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0) = M \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$ est aussi un $A(B/F_0)$-module de Banach orthonormalisable. Le lemme 8.1 (ii) assure que les éléments de $(I\Delta^+ I)K_f$ agissent par endomorphismes continus sur M, et il est évident qu'ils agissent aussi de manière continue sur $J^*(F_0)$. Ainsi, $(I\Delta^+ I)K_f$ agit sur $M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)$ par endomorphismes continus. Le (i) découle alors du lemme 8.3.

Soient ζ comme dans le lemme 8.1, et $T(\zeta) = \sum_j T_j \sigma_j$ la décomposition donnée par le lemme 8.2. Il est évident que les σ_j sont des endomorphismes continus de V^h de norme ≤ 1. L'assertion (ii) du lemme 8.1, ajoutée au fait que les éléments de $(I\Delta^+ I)K_f$ agissent sur $J^*(F_0)$ par des automorphismes d'ordre fini et donc continus de norme 1, assurent que les T_j sont aussi continus de norme ≤ 1 sur V. Ainsi, $\sum_j T_j \sigma_j$ est un endomorphisme de V^h de norme ≤ 1, et c'est à fortiori encore le cas de sa restriction à $\oplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i}$, ce qui conclut par 8.2 (iii). Sous l'hypothèse supplémentaire $\zeta_p \in I\mathrm{diag}(p^a, p^b, p^c)I$ avec $a < b < c$, l'assertion de compacité se déduit de la compacité des T_j, qui découle de (ii) *loc. cit.*, du lemme 8.1 (ii), et de ce que $J^*(F_0)$ est de dimension finie sur F_0. $\square$

8.2.9. Nous aurons besoin de deux types d'extension des scalaires pour le module S : l'évaluation en un point $x \in B(\mathbb{C}_p)$ et la restriction à un ouvert affinoide $\Omega \subset B$. Le contexte général est le suivant. On se replace dans le cadre du paragraphe 8.2.7, et on fixe A' une algèbre de Banach ayant même propriété que A, munie d'un morphisme contractant $A \to A'$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^0(V)\widehat{\otimes}_A A' \arrow[r, "\varphi_V \otimes 1", "\sim"'] \arrow[d, "can"'] & (\oplus_{i=1}^h V^{\Gamma_i})\widehat{\otimes}_A A' \arrow[r, "i_V \otimes 1"] \arrow[d, "can"'] & (V^h)\widehat{\otimes}_A A' \arrow[d, "can"'] \\
H^0(V\widehat{\otimes}_A A') \arrow[r, "\varphi_{V\widehat{\otimes}_A A'}", "\sim"'] & \oplus_{i=1}^h (V\widehat{\otimes}_A A')^{\Gamma_i} \arrow[r, hook, "i_{V\widehat{\otimes}_A A'}"] & (V\widehat{\otimes}_A A')^h
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Lemme 8.5. *Les flèches verticales sont des isométries, celle de gauche est Hecke-équivariante, et $i_V \otimes 1$ est injective.*

Preuve: C'est évident pour la flèche verticale de droite. Les relations $p_{V'} i_{V'} = id$ pour $V' = V$ et $V\widehat{\otimes}_A A'$ entraînent que $i_V \otimes 1$ est injective, puis que la flèche verticale du centre est une isométrie. Comme $\varphi_{V\widehat{\otimes}_A A'}$ et $\varphi_V \otimes 1$ sont des isométries par définition, cela entraîne que la flèche verticale gauche est une isométrie. L'assertion de commutativité aux opérateurs de Hecke est triviale. $\square$

8.2.10. Soient U_1, U_2 et $U_p \in \mathcal{A}(p) \subset \mathcal{H}$ les opérateurs de Hecke associés respectivement aux éléments de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$ triviaux à toutes les places sauf en p où ils valent $u_1 = \mathrm{diag}(1, 1, p)$, $u_2 = \mathrm{diag}(1, p, p)$ et $u_1 u_2 = \mathrm{diag}(1, p, p^2)$. On a $U_p = U_1 U_2$ (cf. 5.1). Le lemme 8.4 (ii) implique en particulier le :

Corollaire 8.2. *U_p agit sur S par un endomorphisme compact.*

En particulier, si $F_0 \subset F \subset \mathbb{C}_p$ est un corps complet et $A(B/F_0) \to F$ est l'évaluation en un point $x \in B(F)$, U_p agit sur $S_x := S\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)} F = H^0(M_x \otimes_{F_0} J^*(F_0))$ (cette dernière égalité découlant du lemme 8.5) par un endomorphisme compact. Soit $w' \in w+(p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$. D'après le lemme 8.1 (ii), et par exactitude du foncteur $V \mapsto H^0(V)$ sur les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, nous disposons d'une inclusion $\mathcal{H}'$-linéaire[18] :

$$S^{cl}_{w'} \hookrightarrow H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$$

Elle commute de plus à l'action de $[IuI]$, $u \in \Delta^+$, si l'on renormalise ce dernier agissant sur $S^{cl}_{w'}$, en le divisant par $\nu_{w'}(u)$ (toujours d'après 8.1 (ii)). On a alors le

Lemme 8.6. *Soient $s \in \mathbb{Q}$, $w' = (k'_1 \geq k'_2 \geq k'_3) \in w + (p-1)\mathbb{Z}^3$ et $S^s_{w'}$ le plus grand sous-espace de dimension finie U_p-stable de $H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$ sur lequel U_p n'a que des valeurs propres de valuation s. Si* $\mathrm{Min}(k'_1 - k'_2, k'_2 - k'_3) > s-1$, *alors $S^s_{w'} \subset S^{cl}_{w'}$.*

Preuve: Le foncteur $V \mapsto H^0(V)$ étant exact sur les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to S^{cl}_{w'} \to H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \to H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \to 0, \tag{13}$$

la flèche $H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0)) \to H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$ étant U_p-équivariante[19]. La décomposition de U_p agissant sur $H^0((M/M_{w'}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$ donnée par le lemme 8.2.6, combinée au lemme 8.1 (iii), montre alors que

$$\frac{U_p}{p^{1+\mathrm{Min}(k'_1-k'_2,k'_2-k'_3)}}$$

est de norme ≤ 1 sur $H^0((M/M_{w'})\otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$. En particulier, sous l'inégalité de l'énoncé, U_p ne peut admettre de valeur propre de valuation $\leq s$ sur ce dernier. L'exactitude au centre de (13) conclut. $\square$

8.2.11. Maintenant que nous savons que U_p est compact sur S, nous voudrions lui appliquer le théorème spectral de Coleman, afin de "découper" dans S une famille de vecteurs propres contenant f. Un léger problème technique est que S n'est pas orthonormalisable, mais simplement facteur direct d'un tel module. La généralisation adéquate des résultats de Coleman dans ce cadre a été reprise par Buzzard dans un travail en préparation ([Bu]). Nous nous ramenons ici de manière *ad hoc* au cas traité par Coleman.

Soient A une $\mathbb{Q}$-algèbre, V un $A[(I\Delta^+I)K_f]$-module et U un endomorphisme de $H^0(V)$. La donnée de φ_V nous permet de le prolonger par 0 en un endomorphisme $\widetilde{U}$ de V^h défini par

$$\widetilde{U} := i_V\, \varphi_V\, U\, \varphi_V^{-1}\, p_V$$

On se replace dans les hypothèses de §8.2.7. Si U est un endomorphisme continu (resp. compact) de $H^0(V)$, alors $\widetilde{U}$ a la même propriété car i_V et p_V sont continus. Fixons V orthonormalisable et U un endomorphisme compact de V, on peut alors définir la série caractéristique

[18] Le $\mathbb{Q}_p$-vectoriel $V_{-w'}(\mathbb{Q}_p)$ étant une représentation absolument irréductible de I, cette inclusion est canonique à la multiplication par un élément de $\mathbb{Q}_p^*$ près. Cependant, le choix, pour chaque w', d'une quelconque d'entre elle, suffit à nos besoins.

[19] La première l'est seulement à multiplication par $\nu_{w'}(\mathrm{diag}(1,p,p^2))$ près.

$$\det(1 - TU_{|H^0(V)}) := \det(1 - T\widetilde{U}_{|V^h}) \in 1 + TA\{\{T\}\}, \tag{14}$$

par [Col] théorème A.2.1.[20].

Remarques :

i) Dans le cas particulier où A est un corps local, on rappelle que tout A-module de Banach W tel que $|W| = |A|$ est orthonormalisable ([Ser1] proposition 1). Cela vaut donc en particulier pour $H^0(V)$ si $|V| = |A|$, auquel cas la notation ci-dessus est cohérente, *i.e.* $\det(1 - TU_{|H^0(V)})$ est bien la série caractéristique de U sur $H^0(V)$ (cf. [Ser1] lemme 2).

ii) Si $A \to A'$ est un morphisme contractant d'algèbre de Banach comme en 8.2.9, alors $V\widehat{\otimes}_A A'$ est A'-orthonormalisable si A l'est par [Col] proposition A.1.3. Le lemme 8.5 montre alors que si U est un opérateur de Hecke agissant de manière compacte sur V, la formation de $\det(1 - TU_{|H^0(V)}) \in 1 + TA\{\{T\}\}$ commute à l'extension des scalaires par des morphismes d'algèbre de Banach contractants. Afin de ne pas alourdir la rédaction, nous utiliserons dans ce qui suit librement ce fait, ainsi que le lemme 8.5, sans le mentionner explicitement.

Le corollaire 8.2 autorise à poser :

$$g := \det(1 - TU_{p|S}) \in 1 + TA(B/F_0)\{\{T\}\}$$

Corollaire 8.3. *g est l'unique fonction analytique sur $B \times \mathbb{A}^1_{rig}$ telle que pour tout $w' \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$,*

$$g(w', T) = \det(1 - TU_{p|H^0(M_{w'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))})$$

Preuve: L'égalité ci-dessus découle des deux remarques précédant le corollaire. L'unicité vient de la Zariski-densité de $w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$ dans $B(\mathbb{C}_p)$. Elle ne sera pas utilisée dans ce qui suit. □

8.2.12. Soient λ_1, λ_2 et $\lambda = \lambda_1\lambda_2$ les valeurs propres respectives dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de U_1, U_2 et U_p sur f. Le lemme suivant assure que f est *de pente finie*.

Lemme 8.7. *La valeur propre $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ de U_p agissant sur f n'est pas nulle.*

Preuve: La forme automorphe complexe correspondant à f par ι (cf. 8.1.1) engendre une somme finie de représentations automorphes irréductibles de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$. Soit π_p la composante locale en p d'une quelconque de ces représentations. C'est une représentation complexe lisse irréductible de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ ayant un vecteur I-invariant non nul sur lequel U_p agit par $\iota^{-1}(\lambda)$. Mais la représentation de $\mathcal{A}(p)$ sur π_p^I se prolonge à toute l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{C}^\infty(I\backslash G/I)$. Cela conclut car les $[IuI]$ sont inversibles dans cette dernière si $u \in \Delta^+$ (cf.5.1). □

Le corollaire 8.3 appliqué à $w' = w$ entraîne alors le :

[20] Noter que la condition (*) de *loc. cit.* est automatiquement vérifiée sous nos hypothèses car $A^m \supset \mathbb{Q}_p^*$ qui est non borné. De plus, comme Buzzard l'a remarqué, le théorème A.2.1 *loc.cit.* repose sur le lemme A.1.6. *loc.cit.*, qui est incorrect si l'on omet de supposer que A est noethérien.

Corollaire 8.4. $g(w, \lambda^{-1}) = 0$.

Le lemme 8.7 entraîne de plus que les λ_i sont non nuls. On pose $\beta_i = v(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$, $\beta := \beta_1 + \beta_2 = v(\lambda) \in \mathbb{Q}$. Dans l'exemple de la figure ci-contre, (w, λ^{-1}) est le point marqué de l'hypersurface de Fredholm associée à g.

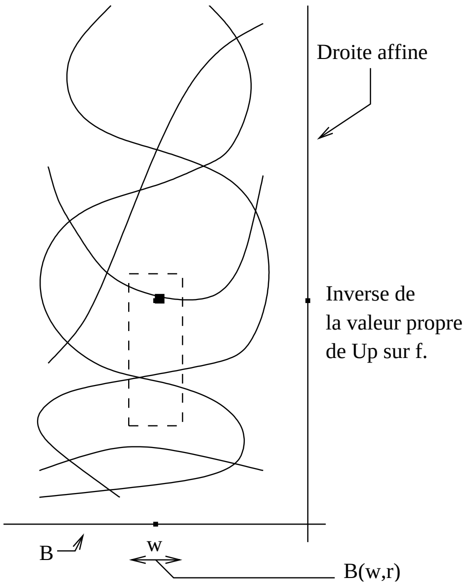

FIG. 2. L'hypersurface de Fredholm $g(x,t) = 0$ dans $B \times \mathbb{A}^1_{rig}$

8.2.13. Nous allons montrer dans ce qui suit comment factoriser g "au voisinage de (w, λ^{-1})". Soit $F \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ un corps local contenant F_0 et les λ_i.

Lemme 8.8. *Il existe une boule F-affinoide $B(w,r) \subset B$ ainsi qu'une factorisation $g_{|A(B(w,r))} = PQ$ dans $A(B(w,r))\{\{T\}\}$ tels que :*

(a) $P \in 1 + TA(B(w,r))[T]$ est de coefficient dominant inversible,

(b) $(P,Q) = 1$ dans $A(B(w,r))\{\{T\}\}$,

(c) $\forall x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, $P(x,T)$ a toutes ses racines de valuation $-\beta$, et $Q(x,T)$ n'en a pas.

Preuve: On applique le lemme 8.11 (reporté à la fin de cette section) à la donnée du F_0-affinoide $X = B/F_0$, la série g, $x_0 = w$, et $s = \beta$. Il nous fournit un ouvert F_0-affinoide Ω de B contenant x_0, tel que le polygone de Newton de chacune des évaluations $g(x,T)$, $x \in \Omega(\mathbb{C}_p)$, ait même partie de pente $\leq s$ que $g(w,T)$. Cette propriété vaut donc encore pour toute boule F_0-affinoide $B(w,r)$ assez petite incluse dans Ω, on fixe un tel $r \in |F_0|$ avec cette propriété. La proposition 5.4.1 de [Che] s'applique à $K = F$, $X = B(w,r)/F$, à la série g et nous fournit la décomposition désirée. Il suffit en effet de prendre pour

P l'unique P_i de la proposition *loc.cit.* admettant la pente β, et pour Q le produit des autres P_i avec le S *loc.cit.* . $\square$

Nous sommes finalement en mesure de démontrer le :

Lemme 8.9. *Quitte à diminuer r, $S\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)}A(B(w,r))$ admet un sous-$A(B(w,r))$-module $\mathcal{M}$ facteur direct topologique, tel que :*

(i) $\mathcal{M}$ est projectif de rang fini sur $A(B(w,r))$,

(ii) $\mathcal{M}$ est stable sous l'action des opérateurs de Hecke, et U_p y agit par un inversible,

(iii) Pour tout $x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, $\mathcal{M}_x$ est le plus grand sous-espace de S_x sur lequel U_p, U_1 et U_2 n'ont que des valeurs propres de valuation β, β_1 et β_2 respectivement.

Preuve: Appliquons les théorèmes A.4.3 et A.4.5 de [Col] à l'endomorphisme compact $\widetilde{U_p}$ du $A(B(w,r))$-module de Banach orthonormalisable

$$((M\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)}A(B(w,r))) \otimes_{F_0} J^*(F_0))^h,$$

ainsi qu'à la factorisation $g_{|A(B(w,r))} = PQ$ donnée par les points (a) et (b) du lemme 8.2.13. On en déduit qu'il existe une décomposition en somme directe de sous-$A(B(w,r))[U_p]$-modules fermés

$$(M\widehat{\otimes}_{A(B)}A(B(w,r)) \otimes_{F_0} J^*(F_0))^h = M_1 \oplus M_2,$$

tels que :

(a') M_1 est projectif de rang fini $\deg(P)$, $\det(1 - T\widetilde{U_p}_{|M_1}) = P(T)$,

(b') Si $P^*(T) = T^{\deg(P)}P(1/T)$, alors $P^*(\widetilde{U_p})_{|M_2}$ est inversible.

L'assertion (a') assure que $\widetilde{U_p}$ est inversible sur M_1, et donc que $M_1 \subset S\widehat{\otimes}_{A(B/F_0)}A(B(w,r))$ et sur ce dernier $\widetilde{U_p}$ coïncide avec U_p. De plus, (a') et (b') montrent que $M_1 = \mathrm{Ker}(P^*(U_p))$, il est donc stable par $\mathcal{H}$. Le $A(B(w,r))$-module M_1 remplit donc les conditions (i) et (ii) de l'énoncé, mais pas tout à fait (iii).

Soit $g' := \det(1-TU_{1|M_1})$, il est de degré $\deg(P)$ car $U_1U_2 = U_p$ est inversible restreint à M_1. En réutilisant le lemme 8.11, il vient que quitte à diminuer r, on peut supposer que les polygones de Newton des polynômes $g'(x,T)$, $x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, sont tous égaux. Dans ce cas, [Che][prop. 5.4.1] s'applique et nous fournit une décomposition $g' = RR' \in A(B(w,r))[T]$, avec $R \in 1 + TA(B(w,r))[T]$ correspondant à la pente β_1, et $(R, R') = 1$. Une relation de Bezout entre R et R' nous donne un élément $e \in A(B(w,r))[U_1]$ idempotent avec la propriété que $\det(1 - TU_{1|eM_1}) = R$. De plus, eM_1 est encore $\mathcal{H}$-stable, et projectif de rang fini. Le $A(B(w,r))$-module $\mathcal{M} := eM_1$ satisfait donc encore à (i) et (ii). Soit $x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, les propriétés (a') et le lemme 8.8 (c) assurent que U_p n'admet que des valeurs propres de valuation β sur $M_x \supset \mathcal{M}_x$. De même, le choix de R montre que $\mathcal{M}_x$ est le plus grand sous $\mathbb{C}_p$-espace de M_x sur lequel U_1 n'admet que des valeurs propres de valuation β_1. L'assertion sur U_2 découle de ce que $U_p = U_1U_2$, ce qui conclut (iii).$\square$

8.2.14. Nous en venons (enfin !) à la preuve proprement dite de la proposition 8.1. Nous renvoyons à [Che] §6.2.3 pour plus de détails. On reconsidère le $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}} A(B(w,r))$-module $\mathcal{M}$ donné par le lemme 8.9, qui est projectif de rang fini sur $A(B(w,r))$.

L'image de $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A(B(w,r))$ dans $\mathrm{End}_{A(B(w,r))}(\mathcal{M})$, munie de la norme induite par ce dernier, est une sous-$A(B(w,r))$-algèbre de Banach commutative finie. Elle est donc F-affinoide, pour un certain F-affinoide que l'on note X. Par construction, on dispose d'un morphisme fini $\pi : X \to B(w,r)$, déduit de l'inclusion $A(B(w,r)) \subset A(X)$, ainsi que d'une application canonique $a : \mathcal{H} \to A(X)$. L'image de a est constituée d'éléments de norme ≤ 1 d'après le lemme 8.4 (ii), et donc $a(\mathcal{H}) \subset A(X)^0$.

Soit $x \in B(w,r)(\mathbb{C}_p)$, m l'idéal maximal de $A(B(w,r))\widehat{\otimes}_F\mathbb{C}_p$ noyau de l'évaluation en x, [Che][lemme 6.2.5] assure que l'application canonique

$$(A(X)\widehat{\otimes}_F\mathbb{C}_p)/m(A(X)\widehat{\otimes}_F\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{M}_x)$$

est de noyau nilpotent. En particulier,

Lemme 8.10. *L'application qui à $z \in \pi^{-1}(\{x\})(\mathbb{C}_p)$ associe le caractère $\chi_z : \mathcal{H} \to \mathbb{C}_p$ donné par l'évaluation en z induit une bijection sur l'ensemble des caractères $\mathbb{C}_p$-valués de $\mathcal{H}$ apparaissant dans $\mathcal{M}_x$, comptés sans multiplicité.*

Montrons la première assertion de la propriété 8.1. Par le (ii) du lemme 8.9, $a(U_p) = a(U_1)a(U_2)$ est un inversible de $\mathrm{End}_{A(B(w,r))}(\mathcal{M})$, et donc de $A(X)$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Cela montre que $a([Iu_iI])$ est un inversible de $A(X)$ si $i = 1$ et 2. C'est encore vrai pour $i = 0$ et 3, mais c'est trivial, car ils agissent sur S par l'identité. On peut en particulier définir les F_i comme dans l'énoncé. Pour conclure i), il reste à voir que les applications $x \in X(\mathbb{C}_p) \mapsto v(a([Iu_i])(x))$ sont constantes si $i = 1, 2$. Mais cela découle du lemme 8.10 et de la propriété (iii) du lemme 8.9. On a $\alpha_i = \beta_i$, si $i = 1, 2$, $\alpha_3 = 0$.

Soit $x = w' \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$, si w' est α-régulier, on est exactement dans les hypothèses du lemme 8.6 avec $s = \alpha_1 + \alpha_2$. L'assertion (iii) du lemme 8.9 entraîne donc que $\mathcal{M}_x \subset S^{cl}_{w'} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p$. Comme on l'a vu en §8.2.10, cette inclusion commute à l'action de $\mathcal{H}'$, ainsi qu'à celle de $\mathcal{A}(p)$ si on la tord par $\nu_{w'}$ sur $S^{cl}_{w'} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p$. Le lemme 8.10 implique alors l'assertion ii) de la proposition 8.1.

D'après le lemme 8.9 (iii), $f \in \mathcal{M}_w$. Comme elle est propre pour $\mathcal{H}$ par hypothèse, le lemme 8.10 lui associe un unique point $x_f \in X(\mathbb{C}_p)$, ce qui définit ce dernier et montre l'assertion iii).

Prouvons l'assertion iv). Soit $0 < r' < r \in |F|$, alors l'inclusion $B(w,r') \hookrightarrow B(w,r)$ est compacte sur les algèbres affinoides, et a donc la propriété d'envoyer tout ensemble borné de $A(B(w,r))$ dans un ensemble compact de $A(B(w,r'))$, d'après [Ser1] prop. 5. Le choix d'une quelconque surjection $A(B(w,r))$-linéaire stricte (cf. [BGR] 3.7.3 cor. 5)

$$A(B(w,r))^n \to A(X) \to 0$$

montre immédiatement que $A(X) \to A(X)\widehat{\otimes}_{A(B(w,r))}A(B(w,r'))$ a encore la propriété énoncée ci-dessus. Notons que l'application canonique

$$A(X) \otimes_{A(B(w,r))} A(B(w,r')) \to \mathrm{End}_{A(B(w,r'))}(\mathcal{M} \otimes_{A(B(w,r))} A(B(w,r')))$$

est injective par platitude de $A(B(w,r)) \to A(B(w,r'))$ (cf.[BGR] 7.3.2 cor. 6). Ainsi, quitte à choisir au début du §8.2.14 un r strictement plus petit que celui choisi jusqu'à présent, ce que l'on fait, on a montré que l'on peut supposer que $a(\mathcal{H}) \subset A(X)^0$ est à valeur dans un ensemble compact de ce dernier, *i.e.* l'assertion iv).

La première assertion de la propriété v) de la proposition 8.1 est une conséquence de [Che][lemme 6.2.10] et de ce que les algèbres affinoides sont des anneaux de Jacobson par [BGR] chap. 6 proposition 3 (en particulier, X est Zariski-dense dans $\mathrm{Spec}(A(X))$). Pour la seconde assertion de v), on applique le lemme 6.2.5 *loc.cit.* à $A = A(B(w,r))$, $M = \mathcal{M}$, $\mathfrak{h} = A(X)$, et I l'idéal premier définissant le fermé de $B(w,r)$ de l'énoncé. On en conclut que l'application canonique de $A(X)/IA(X)$ vers son image dans $\mathrm{End}_{A(B(w,r))/I}(\mathcal{M}/I\mathcal{M})$ est un isomorphisme sur les spectres. L'assertion v) s'en déduit en appliquant le lemme 6.2.10 *loc.cit.* à cette $A(B(w,r))/I$-algèbre image.

Prouvons vi). On rappelle (cf. 8.2.13) que F est un corps local contenant F_0 et les λ_i, qu'il nous reste à fixer. En particulier, $A(X)$ est défini sur $F_0[\lambda_1, \lambda_2]$, ainsi que $\pi : X \to B(w,r)$. Comme ce dernier est un morphisme fini, ses fibres sont de degré borné. Comme il n'existe qu'un nombre fini d'extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ de degré donné, on peut choisir le corps local F de façon à ce que $\pi^{-1}(B(w,r)(F_0)) \subset X(F)$, ce que l'on fait. Cela implique l'assertion vi), et aussi que $x_f \in X(F)$.

Enfin, si X n'est pas réduit, on le remplace par sa nilréduction, ce qui n'affecte aucune des propriétés de l'énoncé de la proposition 8.1. $\square$

Lemme 8.11. *Soient F un corps local, X un F-affinoide réduit, et $g \in 1+TA(X)\{\{T\}\}$ une fonction rigide-analytique sur $X \times \mathbb{A}^1$. On fixe $s \in \mathbb{Q}$, $x_0 \in X(F)$, et on note $\mathcal{P}$ la partie de pente $\leq s$ du polygone de Newton de $g(x_0, T) \in 1 + TF\{\{T\}\}$.*

Il existe un ouvert F-affinoide $\Omega \subset X$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in \Omega(\mathbb{C}_p)$, la partie de pente $\leq s$ du polygone de Newton de $g(x,T) \in 1 + T\mathbb{C}_p\{\{T\}\}$ coïncide avec $\mathcal{P}$.

Preuve: Soient $s'' \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ la plus petite pente de $g(x_0,T)$ strictement supérieure à s, et $s' \in \mathbb{Q}$ tel que $s' \in]s, s''[$. On écrit $g = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$, $a_n \in A(X)$. Comme g converge sur $X \times B(0, p^{-s'})$, on a $|a_n| p^{ns'} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in X(\mathbb{C}_p)$, $\forall n > N \in \mathbb{N}$, $v(a_n(x)) \geq n(s+s')/2$. Ainsi, pour tout $x \in X(\mathbb{C}_p)$, la partie de pente $\leq s$ du polygone de Newton de $g(x,T) \in 1 + T\mathbb{C}_p\{\{T\}\}$ est de longueur $\leq N$ (cf. figure ci-contre).

Soit $N' > s$ un entier, Ω l'ouvert F-affinoide de X défini par les conditions :

(i) $\forall i \leq N$ tel que $a_i(x_0) \neq 0$, $|a_i/a_i(x_0) - 1| \leq 1/p$,

(ii) $\forall i \leq N$ tel que $a_i(x_0) = 0$, $|a_i| \leq p^{-iN'}$.

Alors $x_0 \in \Omega(F)$ et Ω convient. $\square$

8.3. **Pseudo-caractères galoisiens.**

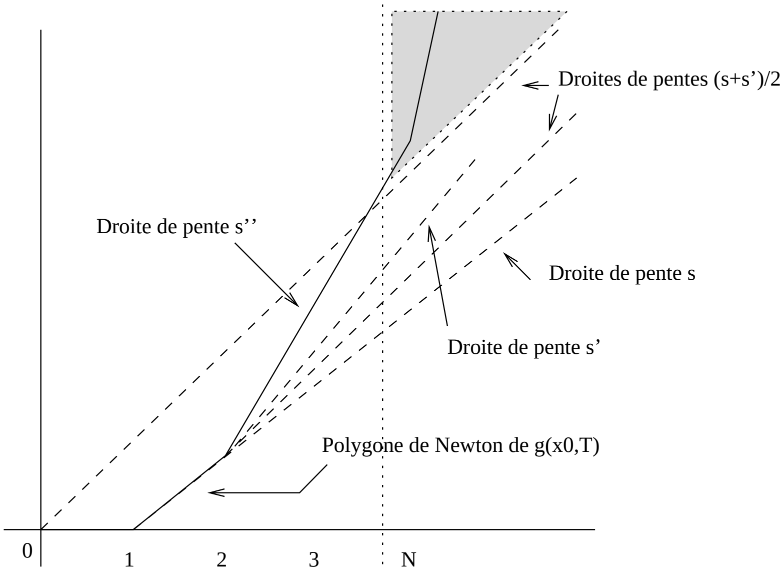

FIG. 3. Illustration de la preuve du lemme.

8.3.1. On se replace dans les hypothèses du paragraphe précédent. Fixons $x \in X(F)$ un point classique, et $f \in S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$ un vecteur de caractère χ_x sous $\mathcal{H}$. On peut considérer un constituant irréductible Π de la représentation automorphe de U(3) engendrée par f, Π_l est alors déterminée par χ pour tout l premier ne divisant pas N. En particulier, la représentation galoisienne p-adique continue semi-simple associée à Π dans 3.2.2, que nous noterons disons $V(x)$, ne dépend que de x et pas du Π choisi, par le théorème de Cebotarev. Soit $T(x) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to F$ la trace de cette représentation, elle est continue et la détermine. Si v est une place finie décomposée de E, divisant un premier $l \in \mathbb{Z}$, on identifie $G(\mathbb{Q}_l)$ avec $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_l)$ au moyen de l'isomorphisme $\mathbb{Q}_l \to E_l$. D'après §3.2.2 (3) et 5.2.1, si l ne divise pas Np, on a la relation :

$$T(x)(\mathrm{Frob}_v) \quad = \quad l^{-1}a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1,1,l)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])(x) \tag{15}$$

Si $T : E \to A(X)$ est une application d'un ensemble E à valeur dans $A(X)$, $x \in X(F)$, on notera T_x la composition de T par l'évaluation en x. On renvoie en 7.2.1 pour les généralités sur les pseudo-caractères.

Corollaire 8.5. *Il existe un unique pseudo-caractère continu de dimension* 3,

$$T : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \to A(X)$$

tel que pour tout $x \in X(F)$ *classique,* $T_x = T(x)$. *Il satisfait* $\forall g \in G$, $T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$.

Preuve : Nous allons appliquer [Che][prop. 7.1.1]. L'espace rigide est l'affinoide X, $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$, S' est l'ensemble des places finies de E décomposées sur $\mathbb{Q}$ ne divisant pas Np, et si $v \in S'$ divise $l \in \mathbb{Z}$, $F_v := \mathrm{Frob}_v$ et $a_v := l^{-1}a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1,1,l)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])$, où l'on a identifié $G(\mathbb{Q}_l)$ avec $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_l)$ via l'isomorphisme $\mathbb{Q}_l \to E_v$.

Notons que X étant affinoide, la topologie de $\mathcal{O}_X^{rig}(X) = A(X)$ utilisée *loc. cit.* est simplement la topologie d'algèbre de Banach de $A(X)$ (prendre $\Omega = X$). La réunion des classes de conjugaison des F_v avec $v \in S'$ est dense dans Γ par le théorème de Cebotarev. Soient $n = 3$, Z l'ensemble des points classiques de X (cf. §8.2.3), $\rho(z) := V(z)$ défini dans §8.3.1, alors le lemme 8.1 et la formule (15) assurent que l'hypothèse (H) *loc. cit.* est satisfaite. On en déduit l'existence de $T : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to A(X)$ satisfaisant la première assertion du corollaire.

Si $g \in G$, la relation $T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$ se vérifie sur un ensemble Zariski-dense car X est réduit. Mais si $x \in Z$, nous venons de montrer que T_x est la trace de $V(x)$ qui satisfait $V(x)^\perp \simeq V(x)$ par §3.2.2, ce qui conclut la seconde assertion du corollaire. □

8.3.2. Nous aurons besoin d'un dernier fait,

Proposition 8.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X(F)$ classique, si $\delta(\pi(x)) > C$ alors $V(x)$ est cristalline. En particulier ces points sont Zariski-dense.*

Preuve : Soit $x \in X(F)$ classique, on choisit $f \in S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$ comme en §8.3.1, ainsi que Π. On sait que Π_p est engendrée par ses I-invariants, c'est donc un sous-quotient d'une induite complète du Borel $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ pour un certain ψ comme dans 5.2.1 (cf. [Cas] prop. 2.6). Pour voir que $V(x)$ est cristalline il suffit de montrer que Π_p est non ramifiée d'après 3.3, ou mieux que $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ est irréductible. Or on sait que ceci se produit dès que $\forall i \neq j,\ \ \psi_i(p)/\psi_j(p) \neq p$ ([Ze] 4.2). Il se trouve que si $\pi_i(x) = (k_1, k_2, k_3)$, $(a_1, a_2, a_3) := (-k_1 - 1, -k_2, -k_3 + 1)$ alors §6.2.4 montre que

$$p^{a_i}\iota(\psi_i(p)) = \frac{\chi_x(U_i^{\pi(x)})}{\chi_x(U_{i-1}^{\pi(x)})}$$

La proposition 8.1 i) conclut l'existence de C. La seconde assertion s'en déduit à la manière du corollaire 8.1. □

8.4. Déformations de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^\perp$.

8.4.1. On reprend les notations de 8.2.1, avec $N := \mathrm{cond}(\chi_0)$, $K_f = \prod K_l$ où :
- Si est l premier à $p\mathrm{cond}(\chi_0)$, K_l est le sous-groupe défini en 4.2.3, 4.3.2, 4.3.3 selon que l est décomposé, inerte ou ramifié,
- Si l divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, K_l est le sous-groupe $K_J(l)$ défini en 4.2, $J := \otimes_{l|N}(J(l) \otimes \chi_0 \circ \det)$ où $J(l)$ est la représentation de $K_J(l)$ définie aussi en 4.2.

On reconsidère la représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ de U(3), et on fixe dans tout ce qui suit $\sigma \in \{1, (2, 3), (1, 3, 2)\}$ accessible pour $\pi(\chi_0)$ (cf. §6.2.3). On pose

$$w := (\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1) \in \mathbb{Z}^{3,+}$$

On peut choisir un $f \neq 0 \in \pi(\chi_0)^I \cap (S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p)$ propre pour $\mathcal{H}$, de caractère sous $\mathcal{A}(p)$ correspondant à σ comme dans 6.2.3. On applique alors la proposition 8.1 à ce f, puis 8.5 et 8.3.2 aux conclusions de 8.1, ce qui nous fournit un corps local F, un F-affinoide

X, $x_f \in X(F)$, $B(w,r) \subset \mathbb{A}^3$, un morphisme F-affinoide fini $\pi : X \to B(w,r)$, un pseudo-caractère T, et $C > 0$ comme dans ces propositions. On pose :

$$F_i := a([Iu_iI])/a([Iu_{i-1}I]) \in A(X),\ i \in \{1,2,3\}$$

Les F_i sont des inversibles de $A(X)$ d'après 8.1 i).

8.4.2. Il sera commode de raisonner en terme des poids de Hodge-Tate des $V(x)$ plutôt que de leurs "poids automorphes" $\pi(x)$. On définit à cet effet (cf. §6.2.2) $\kappa : X \to B(\kappa(w), r)$ comme étant la composée de π avec $(x,y,z) \to (-x-1, -y, -z+1)$. Ainsi, si $x \in X(F)$ est classique, $V(x)$ est de Hodge-Tate de poids $\kappa(x)$. On pose

$$\kappa_0 := \kappa(w) = (-\frac{k+1}{2}, -\frac{k-1}{2}, 0)$$

8.4.3. Quitte à prendre une extension finie de F, comme le précisera sa preuve, on a la

Proposition 8.3. *Il existe :*

a) Un F-affinoide Y intègre régulier de dimension 1, $y_0 \in Y(F)$,

b) Une représentation continue semi-simple

$$\rho_{K(Y)} : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \to GL_3(K(Y))$$

satisfaisant (ABS), $\rho_{K(Y)}^{\perp} \simeq \rho_{K(Y)}$ et $tr(\rho_{K(Y)}(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E))) \subset A(Y)$,

c) Un F-morphisme

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) : Y \longrightarrow \mathbb{A}^3,\ \kappa_3 := 0,\ \kappa(y_0) = \kappa_0,$$

d) Une partie $Z \subset Y(F)$ telle que $\kappa(Z) \subset \kappa_0 + (p-1)\mathbb{Z}^{3,--}$,

e) Des fonctions F_1, F_2 et F_3 dans $A(Y)$, chacune de valuation constante sur X,

f) Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\lambda_i \in F^*$ tel que $|F_i/\lambda_i - 1| < 1$,

le tout satisfaisant aux propriétés suivantes :

i) Pour tout ouvert affinoide Ω de Y contenant y_0, la fonction

$$x \in Z \mapsto \mathrm{Min}(\kappa_2(x) - \kappa_1(x), \kappa_3(x) - \kappa_2(x)) \in \mathbb{N}$$

est non majorée sur $Z \cap \Omega$, d'image incluse dans $\mathbb{N}^{\geq Max(C,k)}$. En particulier, $Z \cap \Omega$ est Zariski-dense dans Ω,

ii) Si $z \in Z \cup \{y_0\}$, $\rho_z^{ss} := \rho_{K(Y),z}^{ss}$ (cf. 7.1) est la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe π irréductible de $U(3)$ telle que $Hom_{K_f}(J, \pi_f) \neq 0$,

iii) $\rho_{y_0}^{ss} \simeq 1 \oplus \chi_p \oplus \chi_p^{\perp}$.

iv) Si $z \in Z \cup \{y_0\}$, $(\rho_z^{ss})_{|D_{v_1}}$ est cristalline de poids de Hodge-Tate $\kappa(z)$. Elle est raffinée par

$$(p^{\kappa_1(z)}F_1(z), p^{\kappa_2(z)}F_2(z), p^{\kappa_3(z)}F_3(z))$$

v) Ce raffinement est $\mathcal{R}(\sigma)$ en y_0.

Preuve : Soit $B \subset B(\kappa_0, r) \subset \mathbb{A}^3$, le fermé affinoide de $B(\kappa_0, r)$ défini par $x_3 = 0$, et $x_2 = 2x_1 + \frac{k-3}{2}$. Alors $\kappa_0 \in B(F)$. On pose :

$$\mathcal{Z} := \{z \in B(F) \cap (\kappa_0 + (p-1)\mathbb{Z}^{3,--}),\ -\delta(z) > \mathrm{Max}(C, k, \alpha_1 + \alpha_2 - 1)\}$$

Le choix de B, assez arbitraire, est tel que les fonctions $x_2 - x_1$ et $-x_2$ sont non bornées sur $U \cap \mathcal{Z}$ pour tout U ouvert affinoide de B contenant κ_0.

On considère $X_B := X \times_{B(\kappa_0, r)} B$, c'est un F-affinoide de dimension 1, $x_f \in X_B(F)$. Le morphisme déduit par extension des scalaires $\kappa_B : X_B \to B$ est encore fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de X_B d'après la proposition 8.1 v). On choisit alors X' une composante irréductible (réduite) de dimension 1 de X_B contenant x_f.

Le pseudo-caractère T peut être vu à valeurs dans $A(X')$, par composition $A(X) \to A(X_B) \to A(X')$, et on peut appliquer le lemme 7.2 à la donnée de $A(X')$ et T. Il nous fournit un F-affinoide intègre Y, régulier de dimension 1, muni d'un morphisme fini et surjectif $h : Y \to X'$, ainsi qu'une représentation semi-simple $\rho : G \to \mathrm{GL}_3(K(Y))$ de trace T, satisfaisant (ABS). Quitte à remplacer F par une extension finie, on peut choisir $y_0 \in Y(F)$ tel que $h(y_0) = x$. Notant que $T(g^{-1}) = T(\tau.g.\tau)$ d'après 8.5, on a prouvé a) et b).

On définit κ comme étant la composée $Y \overset{h}{\to} X' \hookrightarrow X_B \overset{\kappa_B}{\to} B$. Cela prouve c). Notons que $\kappa : Y \to B$ est fini et surjectif, car on a vu que h est $X' \to B$ le sont. De plus, κ est plat, car c'est le cas des extensions finies d'anneaux de Dedekind. On pose $Z := \kappa^{-1}(\mathcal{Z})$, il satisfait d) par 8.4.2 et i) par choix de $\mathcal{Z}$ et platitude de κ. X' étant un fermé de X, on peut y restreindre les F_i de 8.4.1, et les définir sur Y en les composant au morphisme $h : Y \to X'$. Ce sont ces derniers que l'on choisit pour e), l'assertion sur les valuations des F_i est déjà satisfaite sur X par construction (cf. prop. 8.1 i)), ainsi que f).

Soit $z \in Z \cup \{y_0\}$, $\rho^{ss}_{K(Y),z}$ est la représentation semi-simple de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$ de trace $T_z = T_{h(z)}$ (cf. 7.1, 8.5). Par choix de Z et 8.1 iii), $h(z) \in X(F)$ est un point classique, et l'assertion ii) découle donc de 8.3.1 et 8.5. On déduit alors iii) de ii), 8.1 iii) et du choix de f dans 8.4.1.

La première assertion de iv) est alors une conséquence de ii), 6.2.2, 8.4.2, ainsi que 8.3.2 et le fait que $\mathrm{Min}(\kappa_2(z) - \kappa_1(z), \kappa_3(z) - \kappa_2(z)) > C$ par i). La seconde assertion, ainsi que v), découlent de 6.2.3 et 6.1.2.

Enfin, quitte à remplacer Y par un ouvert F-affinoide de ce dernier contenant y_0, ce qui n'affecte aucune des propriétés de l'énoncé, on peut supposer que f) est satisfaite. $\square$

Remarques : On rappelle que toute la construction ci-dessus dépend du choix initial du $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ accessible pour $\pi(\chi_0)$. Ceci fait, le second choix réellement effectué dans la construction ci-dessus est celui de la composante irréductible X' de X'_B passant par x_f. Il semble difficile d'évaluer le nombre de composantes irréductibles de X (ou de X_B) au voisinage de x. En ce qui concerne ce texte, chaque choix de composante permet de conclure dans la section 9.

9. Construction de l'extension

On reprend les notations de la proposition 8.3, où l'on a fixé $\sigma = (2, 3)$.

9.1. **Irréductibilité générique.**

Proposition 9.1. $\rho_{K(Y)}$ *est absolument irréductible.*

Preuve : D'après 8.3 b), $\rho_{K(Y)}$ vérifie la propriété (ABS) (voir 7.1.1). Il suffit donc de montrer que $\rho_{K(Y)}$ est irréductible. Supposons par l'absurde que $\rho_{K(Y)} \simeq \rho_{1,K(Y)} \oplus \rho_{2,K(Y)}$, $\rho_{i,K(Y)}$ étant une $K(Y)$-représentation de G de dimension $\neq 0$. Le lemme 7.1 ii) montre que $\mathrm{tr}(\pi_i(G)) \subset A(Y)$, car $A(Y)$ est régulier d'après 8.3 a). Soit $z \in Z$, l'évaluation en z de $\mathrm{tr}(\rho(g))) = \mathrm{tr}(\rho_1(g)) + \mathrm{tr}(\rho_2(g)), g \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$ a un sens et montre que ρ_z^{ss} est réductible (cf. 7.1). Nous allons montrer que c'est absurde par notre choix du raffinement.

D'après 8.3 e), $v(F_i(.)) : X(F) \to \mathbb{Q}, x \mapsto v(F_i(x))$ est constante, on la note α_i. En évaluant en y_0, 8.3 iv), v) ainsi que 5.2.4 appliqué à (3, 2) montrent que :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, \frac{k-1}{2}, -\frac{k+1}{2})$$

Notons qu'avec ce choix, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i \neq 0$ et $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$. De plus, si $i \neq j$, $|\alpha_i| < k$ et $|\alpha_i + \alpha_j| < k$.

D'après 8.3 iv), ρ_z^{ss} est cristalline de poids de Hodge-Tate $k_i := \kappa_i(z)$, avec $k_1 < k_2 < k_3$, et les valeurs propres de son Frobenius cristallin ont pour valuation $k_1 + \alpha_1$, $k_2 + \alpha_2$ et $k_3 + \alpha_3$. Pour voir que ρ_z^{ss} est irréductible, il suffit de voir que $D := D_{cris}(\rho_z^{ss})$ n'admet pas de sous-module filtré faiblement admissible. Si D' est un tel sous-module de rang 1, alors par faible admissibilité $t_H(D') = t_N(D')$ (cf. *loc. cit.*) entraîne $k_i = k_j + \alpha_j$ pour un couple (i, j). Mais par 8.3 i), $|k_i - k_j| > k$, les inégalités sur les α_i entraînent donc $i = j$ puis $\alpha_i = 0$, ce qui est absurde. De même, si D' est un sous-module filtré faiblement admissible de rang 2 de D, on arrive à une contradiction en résolvant $k_{i'} + k_{j'} = k_i + k_j + \alpha_i + \alpha_j$. □

Remarques : Une légère modification de la preuve montrerait qu'en fait $\rho_{K(Y)|D_{v_1}}$ est irréductible. Notons de plus que l'argument d'irréductibilité étant local en p, il n'utilise pas le fait que les représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes stables tempérées sont globalement irréductibles, mais simplement 3.3. Le point clé est que nous disposons d'un σ accessible tel que le raffinement $\mathcal{R}(\sigma)$ est aussi éloigné que possible du raffinement ordinaire au point y_0.

9.2. **L'inertie aux places ne divisant pas p.**

9.2.1. Nous allons préciser l'action de l'inertie aux places de E ne divisant pas p. Pour énoncer commodément nos résultats, on introduit

$$\rho'_{K(Y)} := \rho_{K(Y)} \otimes_F (\chi_p^{\perp})^{-1}.$$

Proposition 9.2. *Soit w une place de E au-dessus de $l \neq p$. Alors*
- *Si w ne divise pas cond(χ_0), $\rho_{K(Y)}$ et $\rho'_{K(Y)}$ sont non ramifiées en w.*
- *Si w divise cond(χ_0), on a*

$$\dim_{K(Y)}(\rho'_{K(Y)})^{I_w} = 2.$$

Le reste de la sous-section est consacré a la preuve de cette proposition. D'après 8.3 a), b) et 7.1 iv) appliqué en l'idéal maximal de y_0, on peut trouver $g \in A(Y)$ avec $g(y_0) \neq 0$, tel que $\rho_{K(Y)}$ admette un $A(Y)_g$-réseau stable. On note ρ la représentation de G définie par ce réseau, S l'ensemble fini des zéros de g, et pour $y \in Y\backslash S$, ρ_y la réduction de ρ en y.

Remarquons que ρ_y est bien définie à isomorphisme près, et non plus seulement à semi-simplification près. De plus, $\rho_{K(Y)}$ étant semi-simple, ρ_z l'est aussi pour un sous-ensemble infini de $Z \cap (Y\backslash S)$, que l'on note Z'. Enfin, si $z \in Z'$, alors $\rho_z^{ss} \simeq \rho_z$ est par 8.3 ii) la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe notée $\Pi(z)$ de $\mathrm{U}(3)$, comme en 8.3.1.

9.2.2. *Le cas w ne divisant pas cond(χ_0).* Il suffit de montrer que les ρ_z sont non ramifiées pour $z \in Z'$. Par construction (cf. 8.4.1), $\Pi(z)$ a un vecteur fixe par le compact maximal K_l. Si l est non ramifié dans E, K_l est hyperspécial (4.2.3, 4.3.2) et $\Pi(z)$ est non ramifié, si bien que la représentation galoisienne ρ_z associée l'est aussi, d'après la propriété (3) §3.2.2. Si l est ramifié, K_l est le groupe défini en 4.3.3. D'après le lemme 4.1, le changement de base π_E est non ramifié, et on en déduit encore que ρ_z est non ramifiée, cette fois d'après la proposition 3.1.

9.2.3. *Le cas w divisant cond(χ_0).* Par construction (cf. 8.4.1), on a

$$\mathrm{Hom}_{K_{J(l)}}(J(l), (\Pi(z) \otimes (\chi_0 \circ \det)^{-1})_l) \neq 0$$

D'après 4.2, il existe un sous-groupe ouvert I'_w de I_w tel que pour tout $z \in Z'$ on a $\rho'_z(I'_w) = 1$. On en tire $\rho'_{K(Y)}(I'_w) = 1$.

Notons que pour démontrer la proposition, il suffit de le faire après une extension finie de $K(Y)$. Mais il existe une extension finie F'/F telle que la représentation $\rho'_{K(Y)_{|I_w}}$, qui se factorise par le groupe *fini* I_w/I'_w, soit définie sur F'. Autrement dit, si L est une extension composée de $K(Y)$ et F' et $\rho'_L := \rho'_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$, alors $\rho'_{L|I_w}$ est isomorphe à $\theta \otimes_{F'} L$, où θ est une représentation de I_w sur F' triviale sur I'_w. Comme θ est nécessairement semi-simple, on en déduit par évaluation des traces en y_0 que $(\rho'_{|I_w})^{ss}_{y_0} \simeq \theta$. En particulier, d'après 8.3 point iii) :

$$\theta \simeq 1 \oplus 1 \oplus ((\chi_p^{\perp})^{-1})_{|I_w}$$

La proposition en découle.

9.3. **Application des méthodes à la Ribet et Kisin.** Dans ce paragraphe on tire les fruits de la variante du lemme de Ribet démontré dans la proposition 7.1, et la proposition 6.1 "à la Kisin". Introduisons encore quelques notations : on pose

$$u := \chi^{\perp}(\mathrm{Frob}_{v_1})$$

Notons alors qu'on a $\chi(\mathrm{Frob}_{v_1}) = up^{-1}$. Notons D_{cris,v_1} le foncteur

$$D_{cris,v_1}(V) := D_{cris}(V_{|D_{v_1}}),$$

il est exact à gauche. L'action du Frobenius cristallin φ sur les droites $D_{cris,v_1}(\chi_p^{\perp})$, $D_{cris,v_1}(\chi_p)$ et $D_{cris,v_1}(1)$ est la multiplication respectivement par u, up^{-1} et 1 (cf. §2.6). Ces trois nombres sont deux à deux distincts, puisque leur valuations (respectivement $-(k-1)/2$, $-(k+1)/2$ et 0) le sont.

Proposition 9.3. *Il existe une représentation continue $\bar{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to GL_3(F)$ vérifiant*
i. Pour toute place w de E ne divisant pas p on a

$$\dim_F(\bar{\rho} \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w} \geq 2 \text{ si } w|disc(\chi_0) \tag{16}$$

$$\dim_F(\bar{\rho} \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w} = 3 \text{ si } w \not| disc(\chi_0) \tag{17}$$

ii. $D_{cris,v_1}(\bar{\rho})^{\phi=u}$ est non nul.
iii. On a $\bar{\rho}^{ss} \simeq \chi_p \oplus \chi_p^{\perp} \oplus 1$. Une des deux assertions suivantes est vraie :
a. Soit $\bar{\rho}$ admet un sous-quotient r de dimension 2, vérifiant $r \simeq r^{\perp}$ et tel que r est une extension non triviale de $\chi_p^{\perp}$ par χ_p.
b. Soit $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}^{\perp}$, $\bar{\rho}$ admet une unique sous-représentation r_1 de dimension 2 et un unique sous-quotient r_2 de dimension 2, avec r_1 extension non triviale de 1 par χ_p, r_2 extension non triviale de $\chi_p^{\perp}$ par 1, et $r_1 \simeq {r_2}^{\perp}$.

Preuve : Notons $\mathcal{O}$ l'anneau local rigide de Y en y_0, L le corps des fractions de cet anneau, et $\rho_L := \rho_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$. L'anneau $\mathcal{O}$ est de valuation discrète, de corps résiduel F. Le représentation ρ_L est irréductible d'après la proposition 9.1

D'après la proposition 8.3 iii), $\overline{\rho_L}^{ss}$ est la somme de trois caractères, χ_p, $\chi_p^{\perp}$ et 1. Ces trois caractères sont deux à deux distincts (ils n'ont pas les mêmes poids) et on est donc en mesure d'appliquer la proposition 7.1 à ρ_L. Cette proposition affirme précisément l'existence d'un $\mathcal{O}$-réseau $\Lambda \subset L^3$ stable par ρ_L, tel que la représentation réduite associée $\bar{\rho} := \overline{\rho_L}_{\Lambda}$ vérifie soit la condition iii.a soit la condition iii.b de 9.3. $\mathcal{O}$ étant de valuation discrète, il résulte immédiatement de la proposition 9.2 que $\bar{\rho}$ vérifie la propriété ii.

Nous allons montrer que $\bar{\rho}$ vérifie ii. Le lemme 7.3 appliqué à ρ_L a y_0 et à la classe d'homothéties s du réseau Λ donne l'existence d'un ouvert affinoide $\Omega \subset Y$ contenant y_0, telle que la représentation ρ_L admet un $A(\Omega)$-réseau stable M ; notant ρ la représentation $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}(M)$, le lemme 7.3 assure que $\rho_{y_0} \simeq \bar{\rho}$. $\bar{\rho}$ est continue d'après le corollaire 7.2.

Nous allons maintenant appliquer la proposition 6.1 à la donnée de $\rho_{|D_{v_1}} : D_{v_1} \to \mathrm{GL}_3(A(\Omega))$, de $\kappa_{|\Omega}$ et des $F_{i|\Omega}$ (cf. §6.3.2). On choisit pour ensemble noté Z *loc. cit.* l'ensemble $Z \cap \Omega$ auquel on enlève le sous-ensemble des z tels que ρ_z n'est pas semi-simple. Ce dernier est fini car $\rho_{K(\Omega)}$ est semi-simple. La proposition 8.3 assure que les hypothèses i) à vi) de 6.3.2 de la proposition 6.1 sont vérifiées, iii) par notre choix de Z. On voit donc que

$$D_{cris,v_1}(\rho_{y_0})^{\phi=F_1(y_0)p^{\kappa_1(y_0)}} \text{ est non nul,}$$

où κ_1 et F_1 sont ceux donnés par la proposition 8.3. D'après les points iv) et v) de 8.3, $p^{\kappa_1(y_0)}F_1(y_0)$ est la première valeur propre du raffinement $\mathcal{R}((3,2))$ de $\rho_{y_0|D_{v_1}}$, donc d'après 5.2.4, $p^{\kappa_1(y_0)}F(y_0) = \chi^{\perp}(p) = u$, ce qui prouve ii. $\square$.

9.4. **Élimination du cas a.** Nous voulons montrer, par l'absurde, que l'on n'est pas dans le cas iii. a. de la proposition précédente. On se place donc dans ce cas. La représentation $\bar{\rho}$ admet comme sous-quotient une extension non triviale r de $\chi_p^{\perp}$ par χ_p. Par conséquent, $\bar{\rho}' := \bar{\rho} \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1}$ contient comme sous-quotient $r' := r \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1}$, extension non triviale de F (la représentation triviale sur F) par $F(1)$ (le caractère cyclotomique sur F).

Lemme 9.1. *La représentation r' est cristalline en v_1 et en v_2.*

Preuve : Il suffit de le prouver pour r, car $\chi_p^\perp$ est cristallin en v_1 et v_2, $\chi^\perp$ étant non ramifié en ces places. De plus, comme $r \simeq r^\perp$, il suffit de le prouver en v_1. Comme D_{cris,v_1} est exact à gauche, ainsi que le foncteur $V \mapsto D_{cris,v_1}(V)^{\phi=u}$, on voit que

$$\dim_F D_{cris,v_1}(\bar{\rho})^{\phi=u} \leq \dim_F D_{cris,v_1}(r)^{\phi=u} + \dim_F D_{cris,v_1}(1)^{\phi=u}.$$

Comme $D_{cris,v_1}(1)^{\phi=u} = 0$ car $u \neq 1$, il résulte de 9.3 ii) que $D_{cris,v_1}(r)^{\phi=u}$ est non nul.

Utilisant encore que D_{cris,v_1} est exact à gauche il vient

$$D_{cris,v_1}(\chi_p) \subset D_{cris,v_1}(r)$$

et il y a donc dans $D_{cris,v_1}(r)$ deux droites sur lesquelles φ agit par u et par up^{-1} ce qui implique qu'elles sont distinctes. On en déduit que $\dim_F D_{cris,v_1}(r) = 2$, i.e. r est cristalline en v_1. $\square$

Lemme 9.2. *La représentation r' est non ramifiée en toutes les places w ne divisant pas p.*

Preuve : Si w ne divise pas $\mathrm{cond}(\chi_0)$, $\bar{\rho}'$ est non ramifiée en w d'après ii., et r' non plus.

Si w divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, l'exactitude à gauche du foncteur des invariants sous I_w donne

$$\dim_F(\bar{\rho}')^{I_w} \leq \dim_F {r'}^{I_w} + \dim_F((\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w}$$

Comme $((\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w} = 0$, il découle de i. que r' est non ramifié. $\square$.

L'existence de r' est alors en contradiction avec le lemme bien connu suivant,

Lemme 9.3. *Soit E est un corps quadratique imaginaire, $F/\mathbb{Q}_p$ un corps local, alors il n'existe pas d'extension non triviale de représentations continues de* $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ *de F par $F(1)$ qui soit non ramifiée hors de p et cristalline en les places divisant p.*

Preuve : Soit r une extension non triviale comme dans le lemme, vue comme $\mathbb{Q}_p$-représentation. Elle contient en particulier comme sous-quotient une $\mathbb{Q}_p$-représentation r' continue, extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$. r' est non ramifiée hors de p et cristalline en p car r l'est. Mais par la théorie de Kummer, le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des classes de telles extensions a pour dimension le rang de $\mathcal{O}_E^*$. Ce dernier groupe est fini si E est quadratique imaginaire. $\square$

Remarque 9.1. *Dans le lemme précédent, il est essentiel que les extensions considérées soient non ramifiées (resp. cristallines) à toutes les places. Si on relâche la condition à une place quelconque, de telles extensions non triviales existent. Par ailleurs il est essentiel que le corps de base E soit quadratique imaginaire. Pour tout autre corps, à part $\mathbb{Q}$, l'énoncé précédent serait mis en défaut : on construirait par la théorie de Kummer une extension non triviale, en partant d'une unité de E qui n'est pas racine de 1. En fait, l'énoncé précédent correspond, par les conjectures de Bloch-Kato, au fait que* *la fonction ζ du corps E ne s'annule pas en $s = 0$. Comme on le sait, ceci n'est vrai que pour E quadratique imaginaire ou $\mathbb{Q}$. C'est ici, et ici seulement à part la formule de multiplicité 4.1, que l'on utilise dans ce papier l'hypothèse que E est quadratique imaginaire. Tout le reste marcherait tout aussi bien en travaillant avec E/F extension CM, et le groupe unitaire $U(3)$ compact à toutes les places à l'infini sur F. Dans ce cadre, la preuve de 4.1 montre que l'analogue de la représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ existe si et seulement si $\varepsilon = (-1)^{\dim_{\mathbb{Q}} F}$. En particulier, si $\dim F$ est pair, on peut avoir $L(\chi_0, 1/2) \neq 0$, et on ne s'attend alors pas à ce qu'une extension de 1 par χ_p cristalline existe. On voit que dans ce cas, c'est un élément non trivial de $H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \mathbb{Q}_p(1))$ qu'aurait construit notre méthode.*

9.5. **Fin de la preuve.** On est donc dans le cas b. de la proposition.

Lemme 9.4. *r_1 et r_2 sont cristallines en v_1 et en v_2.*

Preuve : Comme $r_1 \simeq r_2^{\perp}$, la cristallinité de r_1 en v_2 (resp. v_1) équivaut à celle de r_2 en v_1 (resp. v_2). Il suffit donc de prouver que r_1 et r_2 sont cristallines en v_1.

Prouvons d'abord que r_2 est cristalline en v_2. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 9.1, on voit à l'aide du point ii. de la proposition 9.3 que $D_{cris,v_1}(r_2)$ content une droite sur laquelle $\phi = u$. Par ailleurs, par exactitude à gauche, $D_{cris,v_1}(r_2)$ contient la droite $D_{cris,v_1}(1)$ sur laquelle on a $\phi = 0$, ce qui prouve la cristallinité de r_2

En ce qui concerne r_1, extension non triviale de 1 par χ_p, on observe que les poids de Hodge-Tate en v_1 de χ_p et 1 sont respectivement $-(k+1)/2$ et 0, avec $-(k+1)/2 \leq -2 = 0 - 2$ car k est impair et > 1. Une telle extension est automatiquement cristalline d'après [PR, proposition 3.1].

Variante : Pour prouver la critallinité de r_1 en v_1, on peut aussi reprendre l'argument prouvant le point ii. de la proposition 9.3, en appliquant, au lieu de la proposition 6.1, la remarque finale du §6.3.8. On obtient ainsi que

$$D_{cris,v_1}(\bar{\rho}^*)^{\phi=(up^{-1})^{-1}} \neq 0.$$

On montre alors en raisonnant comme pour r_2 que r_1^* est cristalline en v_1, ce qui implique que r_1 est cristalline en v_1. Cette variante a l'avantage de ne pas utiliser l'hypothèse $k > 1$ à ce stade de la preuve. Cette dernière hypothèse est cependant nécessaire pour la proposition 4.1, parce que l'on travaille avec la forme compacte à l'infini du groupe unitaire. Ainsi, si nous pouvions effectuer l'argument de déformation p-adique du §8 pour le groupe $U(2,1)$, cela supprimerait l'hypothèse $k > 1$. □

La représentation r_1 fournit une extension de 1 par χ_p, non triviale, qui a bonne réduction aux deux places divisant p d'après le lemme précédent. Comme χ_p n'est pas le caractère cyclotomique, un argument élémentaire montre qu'une telle extension a automatiquement bonne réduction (voir l'introduction) aux places ne divisant pas p : cf. par exemple [Ru2, lemme 1.3.5]. Cette dernière affirmation peut aussi se démontrer directement. C'est immédiat aux places ne divisant pas $p.\mathrm{cond}(\chi_0)$ par la proposition 9.2. Si w divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, le paragraphe 9.2.3 montre que $(r_1)_{|I_w}$ est d'image finie, donc semi-simple. Cela implique que r_1 a bonne réduction en w, et prouve le théorème 1.1.

Exercice : On a $\zeta_E(-1) = 0$, et le zéro est d'ordre 1. Les conjectures de Bloch et Kato (cf. [FP, 3.4.5]) impliquent donc que $H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \mathbb{Q}_p(2))$ est de dimension 1. Montrer en utilisant la méthode de cet article, quand p est décomposé dans E, que $H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \mathbb{Q}_p(2)) \neq 0$.

Indication : Au lieu de déformer la représentation endoscopique non tempérée $\pi(\chi_0)$, on déformera la représentation triviale de U(3) (elle aussi non tempérée). Pour prouver la cristallinité aux deux places v_1 et v_2 de l'extension construite, on utilisera la variante de la preuve du lemme 9.4.

Références

[AC] J. Arthur & L. Clozel *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*
PUP Annals of math. studies 120 (1989)

[AT] E. Artin & J. Tate *Class field theory*
W. A. Benjamin (1968).

[Be1] J. Bellaïche *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*
Thèse de l'université Paris 11, janvier 2002.

[Be2] J. Bellaïche *À propos d'un lemme de Ribet*
Preprint DMA, École normale supérieure, no. 02-17

[BeG] J. Bellaïche et P. Graftieaux *Représentations sur un anneau de valuation discrète complet*
Preprint de l'université de Nice.

[BZ] I.N. Bernstein & A. V. Zelevinsky *Induced representations of reductive p-adic groups I*
Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 10, pages 441-472 (1977)

[Bl] L. Blasco *Description du dual admissible de* $\mathrm{U}(2,1)(F)$ *par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko*
Manuscripta Math. 107, no. 2, pages 151-186 (2002)

[BR1] D. Blasius et J.Rogawski *Tate class and arithmetic quotient of two-ball*
[ZFPMS] pages 421-443

[BR2] D. Blasius et J. Rogawski *Zeta functions of Shimura Varieties*
[Mot], pages 525-571

[BR3] D. Blasius et J. Rogawski *Motives for Hilbert modular forms*
Inventiones mathematicae 114, pages 55-87 (1993)

[Bor1] A. Borel *Some finiteness properties of adele groups over number fields*
IHES Publ.math. 16, pages 5-30 (1963)

[Bor2] A. Borel *Admissible representations of a semi-simple group over a loal field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*
Inventiones math. 35, 233-259 (1976)

[AFRL] A. Borel & W. Casselman *Automorphic forms, representations, and L-functions*
Proceedings of Symp. in Pure Maths. 33, Corvallis (1977)

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert *Non archimedian analysis*
Springer Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261

[Bus] C. Bushnell *Smooth representations of p-adic group*
ICM 1998, pages 770-779

[BK1] C. Bushnell & P. Kutzko *Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types*
Proc. Lond. Math. Soc (3) 77, pages 582-634 (1997)

[BK2] C. Bushnell & P. Kutzko *Semi-simple types*
Compositio Math. 119, pages 53-117 (1999)

[Bu] K. Buzzard *Eigenvarieties*
En préparation (2002)

[Ca] P. Cartier *Representations of p-adic groups : A survey*
[AFRL] Part I, 111-155

[Cas] W. Casselman *The unramified principal series of p-adic groups. I. The spherical function.*
Compositio Math. 40, no. 3, pages 387–406 (1980).

[Che] G. Chenevier *Familles p-adiques de formes automorphes et applications aux conjectures de Bloch-Kato*
Thèse de l'université Paris 7, Chapitre I (2003)

[Cho] F. Choucroun *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits.*
Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 58 (1994), 170 pp.

[Cl] L. Clozel *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$*
Publications math. I.H.E.S. 73, pages 97-145 (1991)

[CL] L. Clozel & J.-P. Labesse *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*
Asterisque 257, SMF, Appendice A (1998)

[Col] R. Coleman *P-adic Banach spaces & families of modular forms*
Inventiones math. 127, pages 417-479 (1997)

[CR] C. Curtis et I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*
Wiley-Interscience, 1962

[Fa] G. Faltings *Cristalline cohomology and p-adic Galois representations*
Algebraic analysis, and number theory, JAMI conference , pages 25-90 (1988)

[Fo1] J.-M. Fontaine *Le corps des périodes p-adiques*
Périodes p-adiques [PP], exposé 2, pages 59-111

[Fo2] J.-M. Fontaine *Représentations p-adiques semi-stables*
Périodes p-adiques [PP], exposé 3, pages 113-184

[FP] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou *Autour des conjectures de Bloch-Kato : cohomologie Galoisienne et valeurs de fonctions L*
[Mot] part 1, pages 599-706 (1994)

[Go] B.B. Gordon *Canonical models of Picard modular surfaces*
[ZFPMS], pages 1-27.

[Ha] M. Harris *On the local Langlands correspondence*
Proceedings ICM 2002, vol. 2, pages 583-597 (2002)

[HT] M. Harris & R. Taylor *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*
PUP Annals of Math. Studies. 151 (2001)

[HK] A. Huber & G. Kings *Bloch-Kato conjecture and Main conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters*
Prébublication (2002)

[Hum] J.E. Humphreys *Reflection Groups and Coxeter Groups*
Cambridge studies in advanced mathematics 29

[KM] N. Katz & W. Messing *Some consequences of the Riemann Hypothesis for varieties over finite fields*
Inventiones math. 23, pages 73-77 (1974)

[Ke] D. Keys *Principal series representations of special unitary groups over local fields,*
Compositio mathematica 51, no. 1, pages 115-130 (1984)

[Ki] M. Kisin *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*
Inventiones math. 153, pages 363-454 (2003)

[Ko] R. Kottwitz *Points on some Shimura varieties over finite fields*
Journal AMS 5, n^o 2 (1992)

[Lab] J.-P. Labesse *Cohomologie, stabilisation et changement de base*
Astérisque 257, SMF (1998)

[ZFPMS] Ed. R. Langlands & D. Ramakhrisnan, *The Zeta functions of Picard modular surfaces, 1992, CRM*
Publications C.R.M., Montréal

[Mat] H. Matsumura *Commutative ring theory*
Cambridge studies in adv. math. 8 (1980)

[Ma] B. Mazur *The theme of p-adic variation*
Mathematics : Frontiers and perspectives
V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax & B. Mazur Ed., AMS (2000)

[Mot] *Motives*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 55

[PP] *Périodes p-adiques*
Société mathématique de France, Astérisque 223 (1994)

[PR] B. Perrin-Riou *Représentations p-adiques ordinaires*
Périodes p-adiques [PP], exposé 4, pages 209-220

[Ri] K. Ribet *A modular construction of unramified extensions of* $\mathbb{Q}(\zeta_p)$
Inventiones math. 34, no. 3, pages 151-162 (1976)

[Rog] J. Rogawski *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*
Inventiones math. 79, pages 443-465 (1985)

[Rog1] J. Rogawski *Analytic expression for the number of points mod p*
[ZFPMS], pages 65-109

[Rog2] J. Rogawski *The multiplicity formula for A-packets*
[ZFPMS], pages 395-419

[Rog3] J. Rogawski *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*
Inventiones math. 79, pages 443-465 (1985)

[Rog4] J. Rogawski *Automorphic representations of unitary groups in three variables,*
Annals of math. studies 123, Princeton University Press (1990)

[Rou] R. Rouquier *Caractérisations des caractères et pseudo-caractères*
Journal of algebra 180, pages 571-586 (1996)

[Ru1] K. Rubin *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields.*
Inventiones math. 103, no. 1, pages 25-68 (1991)

[Ru2] K. Rubin *Euler systems*
Annals of math. studies 147 (2000)

[Ser1] J.-P. Serre *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*
Publications Math. I.H.E.S. 12, pages 69-85 (1962)

[Sen1] S. Sen *Continous cohomology and p-adic Galois representations*
Inventiones math. 62, pages 89-116 (1980)

[Sen2] S. Sen *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*
Bull. Soc. math. France, 121, pages 13-34 (1993)

[Sen3] S. Sen *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*
Bull. Soc. math. France, 121, pages 13-34 (1993)

[SGA4] A. Grothendieck, M. Artin & J.-L. Verdier Théorie des topos et cohomologie étale des schémas
Séminaire de géométrie algébrique IV, exposé XVI.

[SU] C. Skinner & E. Urban Sur les déformations p-adiques des formes de Saito-Kurokawa
C.R.A.S Paris I 335, pages 581-586 (2002)

[Ta] J. Tate *Number theoretic background*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 33,
Automorphic forms, representations and L-functions Part 2, pages 3-26 (1977)

[Tay] R. Taylor *Galois representations attached to Siegel modular forms of low weight*
Duke math. Journal 63, pages 281-332 (1991)

[T] J. Tits *Reductive groups over local fields*
[AFRL] Part I, pages 29-69

[Ze] A. V. Zelevinsky *Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of $GL(n)$*
Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 13, pages 165-210 (1980)