AUGMENTATION DU NIVEAU POUR U(3)

JOËL BELLAÏCHE ET PHILLIPE GRAFTIEAUX

Résumé : Nous démontrons pour la forme compacte à l'infini du groupe unitaire à trois variables attaché à une extension CM un résultat d'augmentation du niveau analogue à celui obtenu par Taylor ([Tay]) dans le cas de GL_2. Nous donnons une application aux représentations automorphes non tempérées.

Abstract : We prove, for the unitary group in three variables attached to a CM extension which is compact at infinity, a level-raising theorem analogous to the one of Taylor ([Tay]) in the case of GL_2. We give an application to non tempered automorphic forms.

AMS MSC : 11FXX

Table des matières

1. Introduction

Soit E/F une extension CM, et $G = U(3)$ le groupe unitaire à trois variables sur F attaché à E qui est compact à toutes les places à l'infini (cf. 2.2). Pour toute place finie v de F, on note F_v le complété de F en v et on pose $G_v = G(F_v)$.

Soient $K = \prod_{v \text{ place finie de } F} K_v$ un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_{F,f})$ (*le niveau*), Σ l'ensemble fini des places v où K_v n'est pas un compact maximal hyperspécial, J une représentation complexe lisse irréductible de $\prod_{v\in\Sigma} K_v$ (*le type*), et ρ une représentation complexe continue irréductible de $G(\mathbb{A}_{F,\infty})$ (*le poids*). Pour tout ensemble fini Σ' de places de F contenant Σ, soit $\mathcal{H}^{\Sigma'}$ l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\prod'_{v\notin\Sigma'} G_v, \prod_{v\notin\Sigma'} K_v)$.

Soient $v_0 \notin \Sigma$ une place finie de F **inerte** dans E, q le cardinal du corps résiduel de F_{v_0}, B_{v_0} un sous-groupe d'Iwahori de K_{v_0}, $B = B_{v_0} \prod_{v\neq v_0} K_v$ et $T_{v_0} \in \mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0})$ l'opérateur de Hecke standard en v_0.

Nous notons $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$ (resp. $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$) l'espace des formes automorphes pour G de niveau K (resp. B), type J et poids ρ, et $O_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ (resp. $N_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$) les sous-espaces de $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ des formes anciennes (resp. nouvelles) en v_0 (cf. 5.1.2 et 5.3.6). Ces espaces sont munis d'une action naturelle de $\mathcal{H}^{\Sigma}$. En particulier, on dispose d'une décomposition en sous-espaces propres généralisés (cf. 2.4)

$$(1) \qquad S_{K,J,\rho,\mathbb{C}} = \oplus_\eta S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}(\eta),$$

où η décrit un ensemble fini de caractères complexes de $\mathcal{H}^\Sigma$, ainsi que d'une décomposition analogue de $O_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$.

Il existe un corps de nombres $L \subset \mathbb{C}$ et un ensemble fini S de place de L (L et S ne dépendant que de (K, J, ρ) et pas de v_0) tels que pour toute place finie μ de L hors S, l'espace $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ (resp. $O_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$, $N_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$) admette un modèle $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ (resp. $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$, $N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$) sur $\mathcal{O}_\mu$, stable sous l'action de $\mathcal{H}^{\Sigma_\mu}$, où Σ_μ désigne la réunion de Σ et des places de v premières à μ, et $\mathcal{O}_\mu$ l'anneau du complété L_μ de L en μ. Les caractères η intervenant en (1) sont donc à valeurs dans $\mathcal{O}_\mu$ et on a une décomposition $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu} = \oplus_\eta O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\eta)$.

Théorème 1. *Supposons que v_0 est première à μ. Soit ψ un caractère de $\mathcal{H}^\Sigma$ tel que $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}(\psi)$ est non nul. Posons $\lambda := \psi(T_{v_0}) \in \mathcal{O}_\mu$ et supposons que $\lambda \neq q(q^3+1)$. Notons c le plus petit entier vérifiant*

$$c \geq \mathrm{val}_\mu(\lambda - q(q^3+1))/2.$$

Il existe une congruence[1] modulo μ^c entre $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)$ et $N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ dans $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$.

Nous renvoyons le lecteur au théorème 5.4.1 pour des compléments à cet énoncé.

Le cas $c = 1$ du théorème 1, combiné avec le fameux lemme de Deligne-Serre, donne en particulier le résultat suivant.

Corollaire 2. *Soit π une représentation automorphe pour G, v_0 une place inerte de F où π est non ramifiée, et soit λ la valeur propre de T_{v_0} sur π_{v_0}. Il existe un corps de nombres L et un ensemble finie de place S de L, ne dépendant que de π, tel que si $\mu \notin S$ est une place finie de L vérifiant*

$$\lambda \equiv q(q^3+1) \pmod{\mu},$$

alors il existe une représentation automorphe π', de même poids, et de même niveau hors v_0 que π, vérifiant $\pi_{v_0}^{B_{v_0}} \neq 0$ mais $\pi_{v_0}^{K_{v_0}} = 0$ et qui est congrue[2] à π modulo μ. De plus, si π contient un certain type hors v_0, on peut aussi supposer qu'il en va de même pour π'.

Ce corollaire généralise [Clo, théorème 2.4], qui traite le cas[3] où le poids de π et le type considéré sont triviaux, et qui surtout suppose que μ est une place *banale* pour G_{v_0}, i.e. $(q-1)(q^3+1) \not\equiv 0 \pmod{\mu}$. Dans [Bel1, Théorème VII.1.4.6], l'hypothèse de banalité de μ avait été affaiblie en une hypothèse de *normalité* $(q^3+1) \neq 0 \pmod{\mu}$.

La méthode que nous utilisons pour prouver le théorème n'est pas la même que celle de [Clo] (ou de [Bel1]) basée sur les propriétés du *module universel* et sur un argument de densité, inspiré de Serre, jouant le rôle du *lemme d'Ihara.* Il semble aux auteurs que cette méthode ne peut permettre de lever l'hypothèse de *normalité* de μ, ni d'obtenir des congruences modulo μ^c avec $c > 1$. Notre méthode se rapproche au contraire de celle de [Tay], avec quelques différences importantes. La principale est que le lemme d'Ihara ([Tay, lemme 4]) est *faux* pour $G = \mathrm{U}(3)$ en caractéristique non normale, même pour des formes de poids trivia. Nous devons en quelque sorte majorer son défaut

[1] i.e. il existe $f \in O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)$, $g \in N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$, avec $f - g \in \mu^c S_{B,J,\rho,\mu}$, $f \notin \mu S_{B,J,\rho,\mu}$.

[2] i.e. les matrices de Hecke de π et de π' en toute place non ramifiée ont leurs polynômes caractéristiques dans L et congrues modulo μ

[3] À vrai dire, Clozel énonce son théorème pour la forme quasi-déployée du groupe unitaire G. Mais c'est bien le théorème analogue pour le groupe compact qui est prouvé, et Clozel en déduit son énoncé pour la forme quasi-déployée par un argument de transfert entre les formes intérieures.

(lemme 5.4.5), ce que nous faisons à l'aide d'une étude combinatoire d'opérateurs entres espaces de fonctions sur l'arbre bihomogène attaché à G_{v_0} (lemme 3.5.3). Notons aussi que le fait de traiter des poids quelconques, qui ne sont pas nécessairement auto-duaux au caractère central près comme dans la situation de [Tay], nécessite aussi quelques arguments supplémentaires.

Notons enfin que le théorème 1 et son corollaire restent valables, avec la même preuve, pour n'importe quel groupe algébrique connexe G sur F, compact aux places à l'infini et de rang un en la place v_0 de F. Il suffit de remplacer dans l'énoncé du théorème et de son corollaire $q(q^3+1)$ par $q^{d'}(q^d+1)$, où $q^{d'}+1$ et q^d+1 sont les valences de l'arbre de Bruhat-Tits[4] de G_{v_0}, avec $d' \leq d$.

Revenons au cas $G = U(3)$. À l'aide de la représentation galoisienne attachée par Blasius et Rogawski à une représentation automorphe π de G, on peut montrer qu'il existe une infinité de places v_0 où l'on peut augmenter le niveau de π. Plus précisément :

Théorème 3. *Gardons les notations du théorème 1. Soit $\mu \notin S$ une place de L, et n un entier. Alors il existe un ensemble de densité non nulle de places v_0 de F inertes dans E telle que $\lambda \equiv q(q^3+1) \pmod{\mu^n}$ et $q+1 \equiv 0 \pmod{\mu^n}$.*

En particulier, en appliquant le théorème 1, les réductions modulo μ^n du caractère ψ apparaissent dans des espaces de formes nouvelles pour presque tout μ et pour n arbitrairement grand. À cause de l'hypothèse de banalité, Clozel ne pouvait démontrer ce résultat (avec $n = 1$) que sous une hypothèse de surjectivité de la représentation galoisienne attachée à ψ modulo μ.

Enfin, nous donnons une application arithmétique : toute représentation endoscopique non tempérée de G est congrue en presque toute place à une représentation tempérée (voir le théorème 6.3.2). Les congruences entre formes endoscopiques non tempérées et formes tempérées ont une signification arithmétique importante, en ce qu'elles traduisent et permettent de montrer des cas des conjectures de Bloch-Kato ([Bel1, chapitre VIII], [Bel-Che]). Une version plus faible du théorème précédent, valable seulement pour un ensemble de densité non nulle de l, était obtenue dans chacune des deux références ci-dessus, par une augmentation du niveau en une place décomposée dans la première référence, par l'utilisation de familles l-adiques de représentations automorphes dans la seconde. Obtenir ce résultat pour presque tout l était une des motivations initiales de ce travail.

Dans un article en préparation, nous montrons comment on peut utiliser le théorème 1 pour montrer en toute place la compatibilité (à semi-simplification près) de la construction de Blasius-Rogawski d'une représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe pour G avec la correspondance de Langlands locale (qui n'est connue jusqu'à présent que pour les places non ramifiées, ou bien en toute place si l'on suppose que la représentation automorphe a son changement de base à E de carré intégrable en au moins une place finie, d'après les travaux de Harris et Taylor [H-T])

Remerciements : Les auteurs remercient chaleureusement Laurent Clozel et Gaëtan Chenevier pour de nombreuses et éclairantes conversations.

[4]Rappelons ([Tit]) que cet arbre est un arbre attaché à G_{v_0} qui est soit homogène soit bihomogène. On ramène le premier cas au second en introduisant un sommet au milieu de chaque arête, ce qui revient à poser $d' = 0$.

2. Notations

Sauf mention explicite du contraire, tous les anneaux ou algèbres considérés sont commutatifs et unitaires.

2.1. **Corps.** Dans tout l'article, E/F désigne une extension CM, $\mathcal{O}_E$ (resp. $\mathcal{O}_F$) l'anneau des entiers de E (resp. F), et c l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}\,(E/F)$. On fixe une clôture algébrique $\bar{E}$ de E. Pour toute représentation ρ de $\mathrm{Gal}\,(\bar{E}/E)$, on note ρ^c la représentation $g \mapsto \rho(\gamma g \gamma^{-1})$, où γ est un relevé de c dans $\mathrm{Gal}\,(\bar{E}/F)$; la représentation ρ^c ne dépend du choix de γ qu'à isomorphisme près.

La lettre v (resp. w), éventuellement munie d'indices, désigne une place finie de F (resp. de E) ; on note F_v (resp. E_w) le complété de F en v (resp. de E en w), d'anneau local $\mathcal{O}_v$ (resp. $\mathcal{O}_w$). La lettre σ désigne une place archimédienne de F, ce que l'on note $\sigma|\infty$.

On note $\mathbb{A}_F$ (resp. $\mathbb{A}_{F,f}$, $\mathbb{A}_{F,\infty}$) l'anneau des adèles de F (resp. les sous-anneaux des adèles triviaux à l'infini, aux places finies).

La lettre L désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, dont les places sont désignées par la lettre μ. on note L_μ le complété de L en μ d'anneau local $\mathcal{O}_\mu$.

2.2. **Groupe unitaire.** On notera G l'unique groupe unitaire à trois variables sur F, compact à l'infini associé à l'extension E/F, qu'on peut définir ainsi : pour toute F-algèbre R, on pose $G(R) = \{g \in \mathrm{GL}_n(E \otimes_F R),\ c(g)g = 1\}$.

On notera aussi G le modèle de G sur $\mathcal{O}_F$ tel que $G(R) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_F} R),\ c(g)g = 1\}$ pour tout $\mathcal{O}_F$-algèbre R.

Pour toute place finie v de F, on note G_v le groupe $G(F_v)$ et Z_v son centre.

2.3. **Applications linéaires localement finies.** Soit R un anneau. Pour tout ensemble X, on note $\mathcal{C}(X,R)$ (resp. $\mathcal{CC}(X,R)$) le R-module des fonctions sur X à valeurs dans R (resp. nulles en dehors d'un sous-ensemble fini de X). Nous munissons R de la topologie discrète et $\mathcal{C}(X,R)$ de la topologie de la convergence simple, de sorte que $\mathcal{CC}(X,R)$ est dense dans $\mathcal{C}(X,R)$. Pour tout $x \in X$, on note δ_x la fonction caractéristique de $\{x\} \subset X$.

Si X et Y sont deux ensembles, on dit qu'une application linéaire $U\colon \mathcal{C}(X,R) \to \mathcal{C}(Y,R)$ est *localement finie* si elle est continue et prolonge une application linéaire $\mathcal{CC}(X,R) \to \mathcal{CC}(Y,R)$. Ceci équivaut à dire que la famille $U(\delta_x)_{x\in X}$ est à valeurs dans $\mathcal{CC}(Y,R)$ et détermine U. L'ensemble des application linéaires localement finies sur $\mathcal{C}(X,R)$ est donc en bijection avec $\mathcal{CC}(Y,R)^X$.

En particulier, si $U\colon \mathcal{C}(X,R) \to \mathcal{C}(Y,R)$ est une application linéaire localement finie, on définit sa transposée $U^*\colon \mathcal{C}(Y,k) \to \mathcal{C}(X,k)$ comme étant l'application linéaire localement finie définie par $U^*(\delta_y) = \sum_{x\in X} U(\delta_x)(y)\delta_x$ pour tout $y \in Y$. L'application U^* est l'adjoint de U pour les produit naturels de $\mathcal{C}(X,R)$ et $\mathcal{C}(Y,R)$ et on a l'égalité $(U^*)^* = U$.

2.4. **Espaces propres généralisés.** Soit R un anneau, M un R-module et $\mathcal{H}$ un anneau agissant sur M par R-endomorphismes.

Pour tout caractère η de $\mathcal{H}$ à valeurs dans R, on définit le *sous-espace propre généralisé* $M(\eta)$ de M pour η comme le sous-module des vecteurs m de M tels que pour tout $T \in \mathcal{H}$, il existe $n \geq 0$ vérifiant l'égalité $(T - \eta(T))^n m = 0$. Si R est un corps et M est de dimension finie, il existe une extension finie R' de R et une décomposition

$M \otimes R' = \oplus_\eta (M \otimes R')(\eta)$, où η décrit une famille finie de caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans R'.

3. Préliminaires locaux

Dans toute cette partie (sauf en 3.8), on fixe une place finie v de F inerte dans E. On note w la place de E au dessus de v et q le cardinal résiduel du corps F_v, complété de F en v. Le groupe $G(F_v)$ est alors l'unique groupe unitaire à trois variables sur F_v qui se déploie sur E_w.

Pour ne pas alourdir les notations, et dans cette partie uniquement, on note simplement G le groupe $G_v = G(F_v)$, et Z le centre de G, qui est compact.

3.1. **Arbre.** Soit $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-Tits de G. D'après [Tit] ou [Cho, 1.4], c'est un arbre, et l'on a une décomposition de l'ensemble de ses sommets en deux parties $X \coprod X'$, tout sommet de X (resp. X') a q^3+1 (resp. $q+1$) voisins qui sont tous dans X' (resp. X). Les points de X sont les points *hyperspéciaux* au sens de [Tit], ceux de X sont les points spéciaux qui ne sont pas hyperspéciaux.

L'arbre $\mathcal{X}$ est muni d'une action par automorphisme de G, le centre Z agissant par l'identité. L'action de G sur X (resp. X') est transitive et le stabilisateur d'un sommet x agit encore transitivement sur les sommets de $\mathcal{X}$ à distance n de x ([Cho, 1.4, 1.5])

3.2. Sous-groupes compacts.

3.2.1. *Compacts maximaux.* D'après [B-T], un sous-groupe compact maximal de G fixe un sommet de $\mathcal{X}$ et un seul, et ceci définit une bijection entre compacts maximaux de G et sommets de X. Il y a donc deux classes de conjugaisons de sous-groupes compacts maximaux de G, ceux qui fixent un sommet de X qu'on appelle *hyperspéciaux* et ceux qui fixent un sommet de X', qu'on appelle *spéciaux*.

On suppose désormais donné $O \in X$ (resp. $O' \in X'$). On note K (resp K') le sous-groupe compact maximal de G qui fixe O' (resp O'). Le fixateur de O (resp. O') dans G est K (resp. K'), on a donc les identifications canoniques $K\backslash G = X$ et $K'\backslash G = X'$.

3.2.2. *Sous-groupe d'Iwahori.* On suppose aussi que O et O' sont voisins. Le stabilisateur $B = K \cap K'$ de l'arête (O, O') est un sous-groupe d'Iwahori de G. Comme G est transitif sur les arêtes (voir ci-dessus), on a une identification de G/B avec l'ensemble A des arêtes (non orientées) de $\mathcal{X}$.

3.3. Algèbres de Hecke.

3.3.1. *Algèbre de Hecke sphérique.* On note $\mathcal{H}$ l'algèbre de convolution (pour la mesure de Haar μ_K de volume 1 sur K) des fonctions sur G à valeurs dans $\mathbb{Z}$, à support compact, bi-K-invariantes

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{CC}(K\backslash G/K, \mathbb{Z}).$$

Soit T la fonction caractéristique dans $\mathcal{CC}(G/K, \mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(X, \mathbb{Z})$ de l'ensemble des sommets à distance 2 de O. On a $T \in \mathcal{H}$ et les propriétés de transitivité de 3.1 impliquent l'égalité $\mathcal{H} = \mathbb{Z}[T]$.

3.3.2. *Algèbre de Hecke-Iwahori.* On appelle algèbre de Hecke-Iwahori le $\mathbb{Z}$-module muni du produit de convolution

$$\mathcal{H}(G,B) = \mathcal{CC}(B\backslash G/B,\mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(B\backslash A,\mathbb{Z}).$$

Soit $a \in \mathcal{CC}(B\backslash A,\mathbb{Z})$ (resp. a') la caractéristique l'ensemble des éléments de A de source O (resp. O') et distincts de (O,O'). On définit $T_B \in \mathcal{H}(G,B)$ par la formule

$$T_B := -a'a - aa' - (q^3-1)a' - (q-1)a - q^3(q-1).$$

On vérifie aisément que a et a' engendrent $\mathcal{H}(G,B)\otimes\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-algèbre et que T_B est dans le centre de $\mathcal{H}(G,B)$.

Remarque. En faitm T_B en est même un générateur (sur $\mathbb{C}$), mais nous n'utiliserons pas ce fait. Ceci, ainsi que le point (vi) du lemme 3.5.3, est d'ailleurs un petit fragment de la théorie du centre de Bernstein.

3.4. Combinatoire des formes anciennes.

3.4.1. Dans $\mathcal{CC}(X,\mathbb{Z})$, soit U_1 la fonction caractéristique de O, et U_2 la fonction caractéristique de l'ensemble des voisins de O' distincts de O. Il est clair que ces fonctions sont B-invariantes, i.e. appartiennent à $\mathcal{CC}(B\backslash X,\mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(B\backslash G/KZ,\mathbb{Z})$ qui est un muni d'une structure de $\mathcal{H}$-module.

Proposition 3.4.2. *Le $\mathcal{H}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$-module $\mathcal{CC}(B\backslash X,\mathbb{C})$ est libre de base (U_1,U_2).*

Démonstration — D'après [Laz, prop. 7.2.4], le module $\mathcal{CC}(B\backslash X,\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ est libre de rang 2 sur $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}$. Pour conclure que (U_1,U_2) est une base, il suffit de prouver que cette famille est génératrice, ce qui se vérifie après passage au quotient par tous les idéaux maximaux de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[T]$. Autrement dit, il suffit de montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, (U_1,U_2) est une base, c'est-à-dire une famille libre, du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $[\mathcal{CC}(X,\mathbb{C})/(T-\lambda)\mathcal{CC}(X,\mathbb{C})]^B$ qui est de dimension 2. Or, l'égalité $\lambda_1U_1+\lambda_2U_2 = (T-\lambda)f$, avec $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ et $f\in\mathcal{CC}(X,\mathbb{C})$ implique $\lambda_1=\lambda_2=0$ par un argument de support. □

Remarque. Dans [Bel1, IV.4.8.2], cette proposition est démontrée plus généralement en remplaçant $\mathbb{C}$ par un anneau R.

Lemme 3.4.3. *Si l'on voit U_1 et U_2 comme des fonctions de $\mathcal{CC}(KZ\backslash G/B,\mathbb{Z}) = \mathcal{CC}(K\backslash A,\mathbb{Z})$, Alors U_1 est la fonction caractéristique de l'ensemble des arêtes passant par O, et U_2 est l'ensemble des arêtes passant par un voisin de O, mais pas par O.*

Démonstration — C'est un calcul évident. □

3.5. Opérateurs et relations.

Soit R un anneau commutatif. Les fonctions a support fini $T\in\mathcal{H}$, $T_B\in\mathcal{H}(G,B)$, $U_1,U_2\in\mathcal{CC}(K\backslash G/B)$ induisent par convolution à droite des opérateurs localement finis G-équivariants à gauche entres les espaces $\mathcal{C}(X,R)$, $\mathcal{C}(X',R)$ et $\mathcal{C}(X',R)$ que l'on note de la même façon. Le lemme suivant est une traduction immédiate des définitions.

Lemme 3.5.1. *On a*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathcal{C}(X,R) & \to & \mathcal{C}(X,R) \\ & \delta_x & \mapsto & \displaystyle\sum_{d(y,x)=2} \delta_y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} U_1: & \mathcal{C}(X,R) & \to & \mathcal{C}(A,R) \\ & \delta_x & \mapsto & \displaystyle\sum_{d(x,x')=1} \delta_{(x,x')} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} U_2: & \mathcal{C}(X,R) & \to & \mathcal{C}(A,R) \\ & \delta_x & \mapsto & \displaystyle\sum_{d(x',x)=1,\ d(y,x)=2} \delta_{(x',y)} \end{array}$$

$$\text{et} \qquad T_B = -a'a - aa' - (q^3-1)a' - (q-1)a - q^3(q-1)\mathrm{Id},$$

où $a, a'\colon \mathcal{C}(X,A) \to \mathcal{C}(X,A)$ *sont définis par les formules*

$$a\colon \delta_{(x,x')} \mapsto \sum_{d(y',x)=1, y'\neq x'} \delta_{(x,y')} \quad \text{et} \quad a'\colon \delta_{(x,x')} \mapsto \sum_{d(y,x')=1, y\neq x} \delta_{(y,x')}$$

pour toute arête (x,x') *avec* $x \in X$ *et* $x' \in X'$.

3.5.2. *Définitions.* On définit les opérateurs finis G-équivariants suivants :

$$\begin{array}{rccc} U: & \mathcal{C}(X,R) & \to & \mathcal{C}(X',R) \\ & \delta_x & \mapsto & \displaystyle\sum_{d(x',x)=1} \delta_{x'} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} U' & : \mathcal{C}(X',R) & \to & \mathcal{C}(X,R) \\ & \delta_{x'} & \mapsto & \displaystyle\sum_{d(x',x)=1} \delta_x. \end{array}$$

Lemme 3.5.3. *(i)* $U'U = T + (q^3+1)$.

(ii) L'opérateur T *est auto-adjoint et* U *est l'adjoint de* U'.

(iii) Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,R)$. *On a* $U_1 f_1 + U_2 f_2 = 0$ *si et seulement si il existe une constante* C *telle que* $Uf_2 = C$ *et* $f_1 - f_2 = -C$.

(iv) Si R *est un corps,* $U_1 f_1 + U_2 f_2 = 0$, *et* $Tf_2 = \lambda f_2$, *avec* $\lambda \in R$ *et* $f_2 \neq 0$, *on a* $\lambda = q(q^3+1)$ *ou bien* $\lambda = -(q^3+1)$.

(v) Les opérateurs U_1 *et* U_2 *sont injectifs.*

(vi) $U_i T = T_B U_i$ *pour* $i = 1, 2$.

Démonstration — Les preuves de (i), (ii) et (vi) sont des calculs évidents et laissées au lecteur et (v) est triviale. Prouvons (iii). Soit (x,x') une arête de A, $x \in X$, $x' \in X'$. Le fait que $(U_1 f_1 + U_2 f_2)(\delta_{x',x}) = 0$ s'écrit aussi

$$f_1(x) + \sum_{y\neq x,\ y \text{ voisin de } x'} f_2(y) = 0,$$

soit

$$f_1(x) - f_2(x) + (Uf_2)(x') = 0.$$

Comme $\mathcal{X}$ est connexe, on en déduit qu'il existe une constante C tel que $Uf_2 = C$ sur X', $f_1 - f_2 = -C$ sur X.

Prouvons (iv). On a d'après (i) $U'Uf_2 = U'(C) = (q^3+1)C = Tf_2 + (q^3+1)f_2 = (\lambda + q^3 + 1)f_2$, d'où nous tirons

$$(q^3+1)C = (\lambda + q^3 + 1)f_2 \tag{2}$$

Si $\lambda \neq -(q^3+1)$, alors la relation (2) implique que f_2 est constante, ce qui implique $Tf_2 = q(q^3+1)f_2$ et comme f_2 est non nul, on a $\lambda = q(q^3+1)$. □

Proposition 3.5.4.

$$\begin{pmatrix} U_1^*U_1 & U_1^*U_2 \\ U_2^*U_1 & U_2^*U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^3+1 & T \\ T & q(q^3+1)+(q-1)T \end{pmatrix}$$

Démonstration — Pour toute arête (x,x') de A, avec $x \in X$, l'adjoint U_1^* (resp. U_2^*) envoie $\delta_{(x,x')}$ sur δ_x (resp. sur $\sum_{y \neq x,\ d(y,x')=1} \delta_y$). La proposition est alors un calcul évident et laissé au lecteur. □

Remarque. Le déterminant de cette matrice est un polynôme en T dont les racines sont $-(q^3+1)$ et $q(q^3+1)$.

3.6. **Représentations non ramifiées.**

3.6.1. *Notations.* Soit R un anneau commutatif et π une représentation lisse à droite de G sur R. Pour tout vecteur u de l'espace de π et toute fonction f sur G localement constante à support compact, on définit

$$u * f := \int_G f(g)(\pi(g)v)d\mu_K(g)$$

et pour tout sous-espace vectoriel V de l'espace de π, on pose $V * f := \{u * f;\ u \in V\}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note encore f l'opérateur $u \mapsto u * f$. Ainsi, T (resp. T_B) désigne l'opérateur de convolution par T (resp. T_B) sur l'ensemble π^K (resp. π^B) des K-invariants (resp. B-invariants) de π.

Proposition 3.6.2. *Soit π une représentation complexe lisse de G (éventuellement réductible) d'espace V, π' la sous-représentation de G engendrée par le sous-espace π^K de V. Alors ${\pi'}^B = \pi^K * U_1 + \pi^K * U_2$.*

Démonstration — L'espace de π' est l'image de l'application

$$\pi^K * \mathcal{CC}(K\backslash G, \mathbb{C}) \to V,$$

et ${\pi'}^B$ est donc l'image de l'application $\pi^K * \mathcal{CC}(K\backslash G/B, \mathbb{C}) \to V$. Le résultat découle donc de la proposition 3.4.2. □

3.6.3. *Tore maximal et sous-groupe de Borel.* On choisit un vecteur isotrope non nul $e_1 \in E_w^3$ pour la forme hermitienne standard, e_2 tel que e_1 et e_2 engendrent $(e_1)^\perp$, et enfin e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base. Dans toute cette section, on décrit les éléments de G par leur matrice dans la base (e_1, e_2, e_3). Le tore diagonal

$$D = \{\mathrm{diag}(a, b, c(a)^{-1})\ ; a \in E_w^*, b \in E_w^*, bc(b) = 1\}$$

est un tore maximal de G, qui contient $Z = \{\mathrm{diag}(b,b,b)\ ; bc(b) = 1\}$. Soit P le stabilisateur dans G de la droite (e_1) : c'est un sous-groupe de Borel contenant D.

3.6.4. *Induites non ramifiées.* Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit $I(\alpha)$ comme la représentation induite unitaire de P à G du caractère de D :

$$\mathrm{diag}(a, b, c(a)^{-1}) \mapsto \alpha^{\mathrm{val}(a)}.$$

Comme ce caractère est trivial sur Z, $I(\alpha)$ est de caractère central trivial.

3.6.5. *Structure des induites non ramifiées.* Soit $\alpha \in \mathbb{C}$; d'après [Key, page 126] ou [Cho, th. 2.4.6 et prop 2.4.7], la représentation $I(\alpha)$ est indécomposable et vérifie les propriétés suivantes.

(1) Si $\alpha \neq q^{\pm 2}$ et $\alpha \neq -q^{\pm 1}$, alors $I(\alpha)$ est irréductible.
(2) Si $\alpha = q^{\pm 2}$, alors $I(\alpha)$ a deux facteurs de Jordan-Hölder, la Steinberg St et la représentation unité.
(3) Si $\alpha = -q^{\pm 1}$, alors $I(\alpha)$ a deux facteurs de Jordan-Hölder, l'un non ramifié noté π^n et l'autre ramifié noté π^s. D'après [Rog2, page 396], la représentation π^n est non tempérée et la représentation π^s est de carré intégrable.

3.6.6. *Invariants des induites non ramifiées.*

(1) Une représentation admissible irréductible possède un vecteur B-invariant si et seulement si c'est un facteur de $I(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$. ([Car]).
(2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\dim I(\alpha)^K = \dim I(\alpha)^{K'} = 1$ et $\dim I(\alpha)^B = 2$ ([Car] ou [Bel1, IV.4.8.2 et IV.6.2.5])
(3) $\mathrm{St}^K = \dim \mathrm{St}^{K'} = 0$, $\dim(\pi^n)^K = \dim(\pi^s)^{K'} = 1$, $(\pi^n)^{K'} = (\pi^s)^K = 0$. ([Cho, prop. 2.4.7] ou [Bel1, IV.4.8.2 et IV.6.2.5]).

3.6.7. *Matrices de Hecke.* Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, définissons la matrice de Hecke mat_π (à conjugaison près) de l'unique sous-quotient non ramifié π de $I(\alpha)$ comme

$$\mathrm{mat}_\pi = \mathrm{diag}(\alpha, 1, \alpha^{-1}) \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}).$$

Ainsi $\mathrm{mat}_{\pi^n} = \mathrm{diag}(-q, 1, -q^{-1})$.

Par exception, dans la théorie globale, on notera $\mathrm{mat}_{\pi,w}$ pour mat_π au lieu de $\mathrm{mat}_{\pi,v}$: cela tient à ce que, à strictement parler, mat_π est la matrice de Hecke du changement de base de π à E_w et non celle de π.

3.7. Transformation de Satake.

Lemme 3.7.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$; l'opérateur T agit sur la droite $I(\alpha)^K$ par l'homothétie de rapport*

$$q^2(\alpha + \alpha^{-1}) + q - 1.$$

En particulier, si $\alpha = q^{\pm 2}$ (resp. $\alpha = -q^{\pm 1}$), alors la valeur propre de T est $q(q^3 + 1)$ (resp. $-(q^3 + 1)$).

Démonstration — Voir [Cho, prop 3.1.2]. □

Lemme 3.7.2. *L'opérateur T_B agit sur St^B (resp. $(\pi^s)^B$) par l'homothétie de rapport $q(q^3 + 1)$ (resp. $-(q^3 + 1)$).*

Démonstration — Comme $I(\alpha)$ est indécomposable (cf. 3.6.5), il découle de [Bor2] que $I(\alpha)^B$ est un module indécomposable sur $H(G, B) \otimes \mathbb{C}$, donc T_B y agit par une homothétie. En particulier, par le lemme 3.5.3 (vi), le rapport de T_B agissant sur $I(\alpha)^B$ est égal à celui de T agissant sur $I(\alpha)^K$. Le lemme 3.7.2 découle donc du lemme précédent. □

3.8. **Théorie locale en une place décomposée.** Soit v une place décomposée de F. Le choix d'une place w de E détermine (à isomorphisme intérieur près) un isomorphisme $G_v \simeq \mathrm{GL}_3(E_w) = \mathrm{GL}_3(F_v)$. Si π est une représentation non ramifiée de G_v, on note $\mathrm{mat}_{\pi,w}$ la matrice de Hecke de π vue comme représentation de $\mathrm{GL}_3(E_w)$ via l'isomorphisme précédent. Si $\bar{w}$ est l'autre place de E au-dessus de v, on a, à conjugaison près, $\mathrm{mat}_{\pi,w} = \mathrm{mat}_{\pi,\bar{w}}^{-1}$.

4. Sorites sur les congruences

Dans cette section on rappelle pour le confort du lecteur quelques résultats faciles, bien connus et souvent utilisés dans le contexte des congruences entre formes automorphes (voir les travaux de Hida, Ribet, etc.), et on les étend quelque peu.

Dans cette partie, $\mathcal{O}$ désigne un produit fini d'anneaux de valuation discrète et L (resp. μ_0) le produit des corps de fractions (resp. des idéaux maximaux) de ces anneaux. On désigne par M un $\mathcal{O}$-module libre de type fini.

4.1. **Sous-modules saturés.** Pour tout sous-module N de M, on pose $N^{\mathrm{sat}} := (N \otimes L) \cap M$ dans $M \otimes L$. On a $N = N^{\mathrm{sat}}$ si et seulement si N est facteur direct de M.

Lemme 4.1.1. *Soit $u\colon N \to M$ un morphisme injectif de $\mathcal{O}$-module libre de rang fini. Pour tout entier α assez grand, $u(N)^{\mathrm{sat}}/u(N)$ et $\mathrm{Ker}\,(u \otimes (\mathcal{O}/{\mu_0}^{\alpha}))$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{O}$-modules.*

Démonstration — On peut supposer que $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation discrète et que $u(N)^{\mathrm{sat}} = M$. Par le théorème des diviseurs élémentaires, nous sommes ramenés à ne traiter que le cas évident où $M = \mathcal{O}$. □

4.2. **Congruences.** Jusqu'à la fin de cette partie, A et B désignent des sous modules de M vérifiant $A = A^{\mathrm{sat}}$, $B = B^{\mathrm{sat}}$ et $A \cap B = 0$, μ désigne un idéal maximal de $\mathcal{O}$ et $c \geq 1$ un entier.

4.2.1. On dit qu'il existe une *congruence modulo μ^c* entre A et B dans M, s'il existe $f \in A \setminus \mu A$, $g \in B \setminus \mu B$, avec $f - g \in \mu^c M$. On appelle *module de congruence* entre A et B (dans M) le $\mathcal{O}$-module $(A \oplus B)^{\mathrm{sat}}/(A \oplus B)$. Ce module tient son nom du lemme suivant.

Lemme 4.2.2. *Il existe des congruences modulo μ^c entre A et B dans M si et seulement si le module de congruence contient un sous-module isomorphe à $\mathcal{O}/\mu^c$.*

Démonstration — Soit π un générateur de μ. Si le module de congruence contient un sous-module isomorphe à $\mathcal{O}/\mu^c$ alors il existe $h \in (A \oplus B)^{\mathrm{sat}}$, avec $\pi^c h \in A \oplus B$ mais $\pi^{c-1}h \notin A \oplus B$. On a alors $\pi^c h = f + g$ avec $f \in A$ et $g \in B$, et puisque $B = B^{\mathrm{sat}}$, on a $f \in \pi A$ si et seulement si $g \in \pi B$, ce qui n'est pas car $\pi^{c-1}h \notin A + B$. On a donc une congruence modulo π^c entre f et g.

Réciproquement, si f et g sont en congruences modulo π^c, alors l'élément $h := (f - g)/\pi^c \in (A \oplus B)^{\mathrm{sat}}$ est tel que $\pi^{c-1}h \notin (A \oplus B)$. □

4.3. **Produit hermitien et congruences.** Soit $\gamma\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ un automorphisme involutif d'anneaux. Pour tout module N libre de type fini sur $\mathcal{O}$, on note $N^{\overline{*}}$ le $\mathcal{O}$ module des formes γ-linéaires (i.e. telles que $f(an) = \gamma(a)f(n)$ pour $a \in \mathcal{O}$, $n \in N$) sur N et on appelle *produit hermitien* sur N tout morphisme $\mathcal{O}$-linéaire $p_N : N \to N^{\overline{*}}$ tel que $p_N(x)(y) = \gamma(p_N(y)(x))$ pour tout $x, y \in M$; on dit que p_N est *non dégénéré* s'il est bijectif. Pour toute partie P de N, on note alors $P^{\perp}$ l'ensemble des $x \in N$ tel que $p_N(P)(x) = 0$; c'est un sous-module facteur direct de N. Si P est un sous-module de N, on note $p_P : P \to P^{\overline{*}}$ la restriction de p_N à P.

Jusqu'à la fin de cette partie, on désigne par p_M un produit hermitien non dégénéré sur M tel que $B \subset A^{\perp}$.

Lemme 4.3.1. *On suppose que $(A+B)^{\perp} \oplus A$ est facteur direct dans M. Alors le module de congruence entre A et B dans M est isomorphe à $A^{\overline{*}}/p_A(A)$.*

Démonstration — Le morphisme naturel de $\mathcal{O}$-modules $(A\oplus B)^{\mathrm{sat}}/(A\oplus B) \to A^{\overline{*}}/p_A(A)$ induit par p_M est injectif car B est orthogonal à A et surjectif car toute forme antilinéaire sur A se prolonge par hypothèse en une forme antilinéaire sur M nulle sur $(A \oplus B)^{\perp}$, qui du fait de la non-dégénérescence de p_M est l'image par p_M d'un élément de $(A \oplus B)^{\mathrm{sat}}$. □

Si $u : N \to M$ est un morphisme injectif de modules libres munis de produit scalaires p_N et p_M non dégénérés, on note ${}^t u\colon M^{\overline{*}} \to N^{\overline{*}}$ la transposée de u et on appelle *adjoint* de u le morphisme $u^* = p_N^{-1} \circ {}^t u \circ p_M$.

Lemme 4.3.2. *Pour tout entier α et tout idéal maximal μ de $\mathcal{O}$, on a*

$$\mathrm{long}\Big(\mathrm{Ker}\,(u \otimes (\mathcal{O}/\mu^{\alpha}))\Big) \leq \frac{1}{2}\mathrm{val}_{\mu}(\det(u^* u)).$$

Démonstration — Soit $P = u(N)^{\mathrm{sat}}$. Par le lemme 4.1.1, la longueur à calculer est majorée par la μ-valuation du déterminant de $u_P\colon N \to P$ dans deux bases quelconques de N et P. Or, puisque p_N est non dégénéré, $u_P^*\colon P \to N$ est bien défini et $u^* u = u_P^* u_P$. Puisque $\det(u_P)$ divise $\det(u_P^*)$ dans $\mathcal{O}$, le lemme est prouvé. □

5. Augmentation du niveau

5.1. Espaces de formes automorphes.

5.1.1. *Niveau, type et poids.* On fixe un sous-groupe compact ouvert $K = \prod_v K_v$ de $G(\mathbb{A}_{F,f})$ (*le niveau*). On note Σ l'ensemble fini ([Tit]) des places v où K_v n'est pas un compact maximal hyperspécial et pour toute place μ d'un corps de nombres L, on désigne par Σ_{μ} la réunion de Σ et des places finies v de F ayant même trace sur $\mathbb{Q}$ que μ. Pour tout ensemble Σ' de places de F contenant Σ on définit l'algèbre de Hecke

$$\mathcal{H}^{\Sigma'} := \mathcal{H}(\textstyle\prod'_{v\notin S} G_v, \prod_{v \notin S} K_v)$$

qui est aussi le produit tensoriel restreint des $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ pour $v \notin \Sigma'$. Cette algèbre contient les opérateurs de Hecke T_v, $v \notin \Sigma'$, v inerte dans E, définis en 3.3.

On fixe aussi une représentation complexe lisse irréductible (J, V) de $\prod_{v\in\Sigma} K_v$ (*le type*), que l'on voit aussi comme une représentation de K. Enfin, on fixe une représentation complexe continue irréductible (ρ, W) de $G(\mathbb{A}_{F,\infty})$ (*le poids*). On note ρ^* (resp. J^*) la représentation duale de ρ (resp. J).

5.1.2. *Espaces de formes automorphes complexes.* On appelle espace des *formes automorphes complexes* de niveau K, de type J et de poids ρ l'espace vectoriel

$$S_{K,J,\rho,\mathbb{C}} := \mathrm{Hom}_{K\times G(\mathbb{A}_{F,\infty})}(J\otimes\rho,\mathcal{B}),$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'espace des fonctions complexes lisses (i.e. invariante par translation par un ouvert de $G(\mathbb{A}_{F,f})$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $G(\mathbb{A}_{F,\infty})$) sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$. De manière trivialement équivalente, on peut voir $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$ comme l'espace des fonctions complexes lisses f sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ à valeur dans $V^*\otimes W^*$ et vérifiant

$$f(gku_\infty) = (J^*(k)^{-1}\otimes\rho^*(u_\infty)^{-1})f(g) \text{ pour } g\in G(\mathbb{A}_F),\ k\in K,\ u_\infty\in G(\mathbb{A}_{F,\infty}). \tag{3}$$

On peut ainsi voir $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$ comme le sous-espace des $\prod_{v\neq\Sigma}K_v$-invariants d'un espace de fonctions complexes sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ sur lequel $G(\mathbb{A}_F)$ agit à gauche par translation à droite, de sorte que $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$ est muni d'une structure de $\mathcal{H}^\Sigma$-module à gauche.

Si f vérifie l'équation fonctionnelle (3), la restriction f' de f à $G(\mathbb{A}_{F,f})$ vérifie

$$f'(ugk) = (J^*(k)^{-1}\otimes\rho^*(u_\infty))f(g) \text{ pour tout } g\in G(\mathbb{A}_{F,f}),\ u\in G(F),\ k\in K. \tag{4}$$

et détermine f par densité.

5.1.3. *Modèle sur un corps de nombres.* La représentation (J,V) de K se factorise par un quotient fini. Il existe donc un L-sous-espace V_L de V, et un modèle (J_L,V_L) de (J,V) sur un corps de nombres $L\subset\mathbb{C}$. Quitte à grossir L, on peut supposer qu'il est stable par la conjugaison complexe, ce qui permet de parler de produit hermitien sur V_L. On choisit un produit hermitien sur V_L stable par J_L (ce qui existe car $J_L(K)$ est fini).

La représentation ρ du groupe algébrique réel $G(\mathbb{A}_{F,\infty}) = \prod_{\sigma|\infty}G(\mathbb{R})$ sur V se prolonge en une représentation algébrique $\rho_\mathbb{C}$ du complexifié $\prod_{\sigma|\infty}G(\mathbb{C})$ sur le même espace W. Cette représentation admet un modèle (ρ_L,W_L) sur un corps de nombres L assez gros. Quitte à grossir L, on peut supposer de plus que L contient le corps de définition de J considéré au paragraphe précédent, qu'il est galoisien sur $\mathbb{Q}$, qu'il contient F et qu'il n'est pas inclus dans $\mathbb{R}$.

Notons L_0 le sous-corps $L\cap\mathbb{R}$ de L ; on a $[L:L_0]=2$ d'après nos hypothèses. La restriction de ρ_L a $\prod_{\sigma|\infty}G(L_0)$ laisse stable un produit hermitien sur W_L, car c'est le cas sur $W_L\otimes\mathbb{C}$, puisque ρ est unitaire.

Pour tout $u\in G(F)$, et tout plongement σ de F dans $\mathbb{C}$, on a $\sigma(u)\in L\cap\mathbb{R}=L_0$; il s'ensuit que l'élément $\sigma^*(u_\infty)$ de $\mathrm{GL}(W)$ est en fait un élément de $\mathrm{GL}(W_L)$, unitaire qui plus est. Par ailleurs, [Bor, 5.1] assure que $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{F,f})$ est compact, et donc est muni d'une unique mesure de probabilité invariante à droite. Ceci donne un sens à la définition suivante.

Définition. Soit $S_{K,J,\rho,L}$ le L-espace vectoriel des fonctions lisses de $G(\mathbb{A}_{F,f})$ dans $V_L^*\otimes W_L^*$ vérifiant l'équation fonctionnelle (4), muni du produit hermitien obtenu en intégrant celui de $V_L^*\otimes W_L^*$ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{F,f})$. Pour toute L-algèbre R, on définit le R-module $S_{K,J,\rho,R}$ des formes automorphes à valeurs dans L par

$$S_{K,J,\rho,R} := S_{K,J,\rho,L}\otimes_L R,$$

c'est un R-module hermitien si R est muni d'une involution prolongeant la conjugaison complexe de L.

Procédant comme en 5.1.2, on peut voir $S_{K,J,\rho,R}$ comme le sous-espace des $\prod'_{v\neq\Sigma} K_v$ invariants d'une représentation unitaire de $\prod'_{v\neq\Sigma} G_v$. Puisque $\mathcal{H}^\Sigma$ est commutative, ses éléments agissent normalement sur $S_{K,J,\rho,R}$, qui est donc un $\mathcal{H}^\Sigma \otimes_{\mathbb{Z}} R$-module semi-simple lorsque R est un corps.

5.1.4. Explicitons maintenant cette définition. Puisque $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{F,f})$ est compact, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_h$ de $G(\mathbb{A}_{F,f})$ tels que

$$G(\mathbb{A}_{F,f}) = \coprod_{i=1}^{h} G(F)x_i K.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, h$, le groupe $\Gamma_i = (x_i^{-1}G(F)x_i) \cap K$ est fini car compact et discret, et on a un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} S_{K,J,\rho,L} & \to & \oplus_{i=1}^{h} (V_L^* \otimes W_L^*)^{\Gamma_i} \\ f & \mapsto & (f(x_1), \ldots, f(x_h)). \end{array} \tag{5}$$

D'autre part, le produit hermitien sur $S_{K,J,\rho,L}$ est à une constante rationnelle près la somme sur $i = 1, \ldots, h$ de ceux des espaces $(V_L^* \otimes W_L^*)^{\Gamma_i}$, pondérée par les inverses des cardinaux des sous-groupes Γ_i.

Quitte à remplacer L par une extension finie, on peut supposer que, pour tout $i = 1, \ldots, h$, on a l'égalité

$$(V_L^* \otimes W_L^*)^{\Gamma_i} \otimes_L \mathbb{C} = (V_{\mathbb{C}}^* \otimes W_C^*)^{\Gamma_i}.$$

On a alors l'énoncé suivant.

Lemme 5.1.5. *L'espace $S_{K,J,\rho,L}$ est un $\mathcal{H}^\Sigma$-modèle de $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$.*

5.1.6. *Décomposition de $S_{K,J,\rho,L}$.* Appliquant 2.4 au $\mathcal{H}^\Sigma \otimes L$-module $S_{K,J,\rho,L}$, on peut supposer, quitte à remplacer L par une extension finie, qu'il existe une décomposition

$$S_{K,J,\rho,L} = \oplus_\eta S_{K,J,\rho,L}(\eta),$$

où la somme porte sur un ensemble fini $X_{K,J,\rho,L}$ de caractères de $\mathcal{H}^\Sigma$ à valeurs dans L.

En fait, puisque $S_{K,J,\rho,L}$ est un $\mathcal{H}^\Sigma \otimes L$-module semi-simple, les sous-espaces propres généralisés $S_{K,J,\rho,L}(\eta)$ sont de simples sous-espaces propres pour l'action de $\mathcal{H}^\Sigma$.

En particulier, dans le cas où $J = 1_{\mathbb{C}}$ et $\rho = 1_{\mathbb{C}}$ sont les actions triviales sur $\mathbb{C}$, la droite des fonctions constantes est un sous-$\mathcal{H}^\Sigma \otimes_{\mathbb{Z}} L$-module de $S_{K,1_{\mathbb{C}},1_{\mathbb{C}},L}$ sur lequel $\mathcal{H}^\Sigma$ agit par un caractère à valeurs dans $\mathbb{Z}$ noté η_{const}. Pour v inerte, $v \notin \Sigma$, q cardinal résiduel de F_v, on a $\eta_{\mathrm{const}}(T_v) = q(q^3 + 1)$.

Le lemme suivant est utile pour séparer les caractères de $\mathcal{H}^\Sigma$.

Lemme 5.1.7. *Soient η, η' deux caractères de $X_{K,J,\rho,L}$ Si pour presque toute place v de F on a $\eta(T_v) \equiv \eta'(T_v) \pmod{\mu}$ alors on l'a pour toute place finie $v \notin \Sigma$, autrement dit $\eta \equiv \eta' \pmod{\mu}$.*

Démonstration — Cela résulte immédiatement de l'existence des représentations galoisiennes de $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ attachées à η et à η' (cf 6.2.1) et du théorème de Cebotarev. □

Rappelons qu'on dit que deux éléments x et y de L sont congrus modulo μ si $x - y \in \mu\mathcal{O}_L$, où $\mathcal{O}_L$ désigne l'anneau des entiers de L. Le lemme suivant est alors évident.

Lemme 5.1.8. *Il existe un ensemble fini S_1 de nombres premiers (ne dépendant que de (K, J, ρ), tel que pour toute place μ de L divisant $l \notin S_1$ et tout couple de caractères η, η' de $X_{K,J,\rho,L} \cup \{\eta_{\mathrm{const}}\}$, η est congru à η' si et seulement si $\eta = \eta'$.*

5.2. **Modèles entiers.** Nous n'allons pas définir de structures entières "globales" des espaces précédents, mais seulement en presque toute place de L.

5.2.1. *Définition de ρ_{μ_0}.* Soit μ_0 une place finie de $L_0 = L \cap \mathbb{R}$. Notons L_{μ_0} le complété de L en μ_0 et $\mathcal{O}_{\mu_0}$ son anneau d'entiers, qui est une algèbre semi-locale sur l'anneau des entiers du corps local $(L_0)_{\mu_0}$, munie d'une unique involution prolongeant celle de $\mathcal{O}_L$.

Pour toute place infinie σ de F correspondant à un plongement $F \to L_0$, notons $\sigma^{-1}(\mu_0)$ la trace de μ_0 sur F par ce plongement, de sorte que $F_{\sigma^{-1}(\mu_0)}$ est plongé dans L_{μ_0}. On a donc un morphisme naturel de groupes, compatible aux plongements de $G(F)$,

$$G(\mathbb{A}_{F,f}) \to \prod_{\sigma|\infty} G(F_{\sigma^{-1}(\mu_0)}) \to \prod_{\sigma|\infty} G(L_{\mu_0}). \tag{6}$$

Définissons une représentation ρ_{μ_0} de $G(\mathbb{A}_{F,f})$ sur $W^*_{L_{\mu_0}}$ en composant (6) avec

$$\rho_{L_{\mu_0}} \colon \prod_{\sigma|\infty} G(L_{\mu_0}) \to \mathrm{GL}(W^*_{L_{\mu_0}}).$$

Pour tout $u \in F$, l'élément $\rho_{\mu_0}(u)$ de $\mathrm{GL}(W^*_{L_{\mu_0}})$ est en fait dans $\mathrm{GL}(W^*_L)$ et on a l'égalité

$$\rho_{\mu_0}(u) \quad = \quad \rho(u_\infty) \tag{7}$$

Pour toute L_{μ_0}-algèbre R, on voit ρ_{μ_0} comme une représentation de $G(\mathbb{A}_{F,f})$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(V^*_R \otimes W^*_R)$.

Enfin, on fixe un $\mathcal{O}_L$-réseau $V^*_{\mathcal{O}_L}$ (resp. $W^*_{\mathcal{O}_L}$) de V^*_L (resp. W^*_L).

5.2.2. *Définition des modèles entiers.*

Définition. Pour toute place μ_0 de L_0, soit $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ le sous $\mathcal{O}_{\mu_0}$-module de $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$ constitué des fonctions f telles que

$$\rho^*_{\mu_0}(g)^{-1} f(g) \in V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes W^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \text{ pour tout } g \in G(\mathbb{A}_{F,f}).$$

Par définition, ρ_{μ_0} se factorise par $\prod_v G(F_v)$, où v décrit l'ensemble des places de F ayant même trace sur $\mathbb{Q}$ que μ_0, de sorte que l'on peut donc encore voir $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ comme l'ensemble des $\prod'_{v \notin \Sigma_{\mu_0}} K_v$-invariants d'un espace de fonctions sur $G(\mathbb{A}_{F,f})$ sur lequel $\prod'_{v \notin \Sigma_{\mu_0}} G_v$ agit par translation à droite. On en déduit que l'algèbre $\mathcal{H}^{\Sigma_{\mu_0}}$ respecte le sous-module $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ de $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$.

5.2.3. *Définition de S_2.* Le morphisme de L-schémas en groupes

$$\prod_{\sigma|\infty} G_L \to \mathrm{GL}(V^*_L \otimes W^*_L)$$

induisant ρ_L se prolonge en un morphisme

$$\prod_{\sigma|\infty} G \to \mathrm{GL}(V^*_{\mathcal{O}_L} \otimes W^*_{\mathcal{O}_L})$$

au dessus d'un ouvert de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_L$, d'où l'existence d'un ensemble fini S_2 de nombres premiers, ne dépendant que de (K,J,ρ), tel que pour toute place finie μ_0 de $L\cap\mathbb{R}$ ne divisant aucun élément de S_2, le réseau $V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}}\otimes W^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}}$ de $V^*_{L_{\mu_0}}\otimes W^*_{L_{\mu_0}}$ est stable sous la restriction de $J^*_{L_{\mu_0}}\otimes\rho^*_{L_{\mu_0}}$ au sous-groupe $\prod_{\sigma|\infty}G(\mathcal{O}_{\mu_0})$ de $\prod_{\sigma|\infty}G(L_{\mu_0})$.

5.2.4. *Définition de S_3.* Par définition de la topologie adélique, il existe un ensemble S_3 de nombres premiers tel que pour toute place finie v de F ne divisant aucun élément de S_3, on a l'égalité $K_v = G((\mathcal{O}_F)_v)$. Pour toute place finie μ_0 de L_0 ne divisant aucun élément de $S_2\cup S_3$, 5.2.3 montre alors que la restriction de $\rho_{\mu_0}\otimes J_L$ à K est à valeurs dans $\mathrm{GL}(V^*_{\mathcal{O}_L}\otimes W^*_{\mathcal{O}_L})$.

5.2.5. *Définition de S_4.* Comme en 5.1.3, considérons une famille $x_1,\dots,x_h$ de représentants de $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{F,f})/K$. Pour $i=1,\dots,h$, en posant

$$\Gamma_i = (x_i^{-1}G(F)x_i)\cap K,$$

le sous-$\mathcal{O}_L$-module $(V^*_{\mathcal{O}_L}\otimes W^*_{\mathcal{O}_L})^{\Gamma_i}$ du L-espace vectoriel $(V^*_L\otimes W^*_L)^{\Gamma_i}$ en est un réseau. De plus, il existe un ensemble fini de nombres premiers S_4, tel que pour toute place μ_0 de $L\cap\mathbb{R}$ ne divisant aucun élément de S_4 et pour tout $i=1,\dots,h$, la restriction du produit scalaire de $V^*_{L_{\mu_0}}\otimes W^*_{L_{\mu_0}}$ à $(V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}}\otimes W^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}})^{\Gamma_i}$ est à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mu_0}$ et non-dégénérée. Quitte à remplacer S_4 par un ensemble le contenant, on suppose de plus que S_4 ne contient aucun des diviseurs des cardinaux des groupes finis $\Gamma_1,\dots,\Gamma_h$.

Lemme 5.2.6. *Soit μ_0 une place finie de L_0 ne divisant aucun élément de $S_2\cup S_3\cup S_4$, alors $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ est un $\mathcal{H}^{\Sigma_{\mu_0}}$-modèle de $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$, sur lequel le produit hermitien est non dégénéré.*

Démonstration — Montrons que $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ est un réseau de $S_{K,J,\rho,L_{\mu_0}}$. Pour tout $f\in S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$, tout $g\in G(\mathbb{A}_{F,f})$, $u\in G(F)$ et $k\in K$, on a par (4) et (7)

$$\begin{aligned}\rho^*_{\mu_0}(ugk)^{-1}f(ugk) &= (J^*(k)^{-1}\otimes\rho^*_{\mu_0}(k)^{-1}\rho^*_{\mu_0}(g)^{-1}\rho^*_{\mu_0}(u)^{-1}\rho^*(u_\infty))f(g)\\ &= (J^*(k)^{-1}\otimes\rho^*_{\mu_0}(k)^{-1})(\rho^*_{\mu_0}(g)^{-1}f(g)).\end{aligned}$$

Reprenons les notations de 5.1.4 : le calcul précédent et 5.2.4 impliquent que $f\in S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ si et seulement si $\rho^*_\mu(x_i)^{-1}f(x_i)\in V_{\mathcal{O}_{\mu_0}}\otimes W_{\mathcal{O}_{\mu_0}}$ pour $i=1,\dots,h$, et donc l'isomorphisme (5), avec $R=L_{\mu_0}$, induit un isomorphisme

$$S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}\simeq\bigoplus_{i=1}^{h}\Big(\rho^*_{\mu_0}(x_i)(V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}}\otimes W^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}})\Big)^{\Gamma_i}.$$

Or, pour $i=1,\dots,h$, le $\mathcal{O}_{\mu_0}$-module $\Big(\rho^*_{\mu_0}(x_i)(V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}}\otimes W^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}})\Big)^{\Gamma_i}$ est un réseau du L_{μ_0}-espace vectoriel $(V^*_{L_{\mu_0}}\otimes W^*_{L_{\mu_0}})^{\Gamma_i}$.

Il reste à prouver que la restriction du produit hermitien $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ à $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ est à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mu_0}$ et non dégénérée, ce qui découle de 5.2.5 puisque ce produit hermitien est une somme directe, pondérée par des éléments inversibles de $\mathcal{O}_{\mu_0}$, de produits hermitiens à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mu_0}$ et non dégénérés. □

5.2.7. Le lemme précédent permet de poser, sans conflit de notations, $S_{K,J,\rho,R} = S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} R$ pour tout $\mathcal{O}_{\mu_0}$-algèbre R.

Remarque. Le lemme 5.2.6 montre en particulier que la restriction à $\mathcal{H}^{\Sigma_{\mu_0}}$ des caractères de $\mathcal{H}^{\Sigma}$ définis en (5.1.6) est à valeurs dans l'anneau localisé en v de $\mathcal{O}_L$ pour presque toutes les places v de F.

5.3. **Formes anciennes et nouvelles en v_0.**

5.3.1. *Définition.* On appelle corps de définition pour le triplet (K, J, ρ) tout corps de nombres $L \subset \mathbb{C}$ comme en 5.1.3, 5.1.4. On appelle bonne place relativement à (K, J, ρ) toute place finie de L ou L_0 ne divisant aucun nombre premier des ensembles S_i, $i = 1, \dots, 4$, définis en 5.1.8, 5.2.3, 5.2.4 et 5.2.5.

5.3.2. *Notations.* Dans ce paragraphe, on conserve toutes les notations de 5.1.1, on fixe un corps de définition L pour (K, J, ρ) satisfaisant de plus la condition de 5.1.6 et une bonne place μ_0 de L_0. On fixe aussi une place finie $v_0 \notin \Sigma_{\mu_0}$, un sous-groupe compact maximal spécial K'_{v_0} de G_{v_0} tel que les points de X_{v_0} fixés par K_{v_0} et K'_{v_0} soient voisins, et nous notons B_{v_0} le sous-groupe d'Iwahori $K_{v_0} \cap K'_{v_0}$. Nous reprenons les notations $X = G_{v_0}/K_{v_0}$, $X' = G_{v_0}/K'_{v_0}$ et $A = G_{v_0}/B_{v_0}$ du paragraphe 3 pour la place v_0.

Nous posons enfin $K' := \prod_{v \neq v_0} K_v \times K'_{v_0}$ et $B := \prod_{v \neq v_0} K_v \times B_{v_0}$. Puisque $v_0 \notin \Sigma$, la représentation J de K induit une représentation de K' (resp. B) que l'on désigne par la même lettre et le corps de nombres L (resp. la place μ_0 de $L \cap \mathbb{R}$) est aussi un corps de définition (resp. une bonne place) pour (K', J, ρ) et (B, J, ρ).

5.3.3. *Interprétation locale en termes d'arbre.* Soit Γ l'image dans G_{v_0} du sous groupe de $G(F)$ défini par l'intersection $G(F) \cap \prod'_{v \neq v_0} K_v$ dans $G(\mathbb{A}_{F,f})$. Comme $G(F)G_{v_0}$ est dense dans $G(\mathbb{A}_{F,f})$, et puisque la représentation ρ_{μ_0} se factorise par $\prod'_{v \cap \mathbb{Z} \neq \mu \cap \mathbb{Z}} G_v$, on a pour toute $\mathcal{O}_{\mu_0}$-algèbre R l'égalité

$$S_{K,J,\rho,R} \;=\; \mathrm{Hom}_{\Gamma}(J_L \otimes \rho_L, \mathcal{C}(X, R)).$$

Ceci nous permet voir $S_{K,J,\rho,R}$ comme le sous-module $\mathcal{C}(X, R) \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} (V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}})$ des fonctions covariantes sous Γ. Lorsque R est muni d'une involution prolongeant celle de $\mathcal{O}_{\mu_0}$, le produit hermitien sur $S_{K,J,\rho,R}$ est l'intégrale sur $\Gamma \backslash X$ du produit tensoriel du produit $\mathcal{C}(X, \mathbb{Z}) \times \mathcal{C}(X, \mathbb{Z}) \to \mathcal{C}(X, \mathbb{Z})$ par le produit hermitien de $(V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes W^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} R$.

De même, on a

$$\begin{aligned} S_{K',J,\rho,R} &= \mathrm{Hom}_{\Gamma}(J_L \otimes \rho_L, \mathcal{C}(X', R)), \\ S_{B,J,\rho,R} &= \mathrm{Hom}_{\Gamma}(J_L \otimes \rho_L, \mathcal{C}(A, R)). \end{aligned}$$

5.3.4. *Opérateurs entre espaces de formes automorphes.* Les R-morphismes T, U_1, U_2, U, U et T_B définis en 3.5 entres les modules $\mathcal{C}(X, R)$, $\mathcal{C}(X', R)$ et $\mathcal{C}(A, R)$ commutent à l'action de G_{v_0}, donc de Γ, sur X, X', A' respectivement. Les morphismes qu'ils induisent par tensorisation par $V^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes W^*_{\mathcal{O}_{\mu_0}}$ définissent donc des R-morphismes entre $S_{K,J,\rho,R}$, $S_{K',J,\rho,R}$ et $S_{B,J,\rho,R}$ que nous noterons par les mêmes lettres. Ainsi, l'opérateur $T : S_{K,J,\rho,R} \to S_{K,J,\rho,R}$ est simplement l'opérateur de Hecke $T_{v_0} \in \mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0} Z_{v_0})$ défini en 3.3 et 5.1.1.

Notons que $\mathcal{H}^{\Sigma \cup \{v_0\}}$ agit sur $S_{K,J,\rho,R}$, $S_{K',J,\rho,R}$ et $S_{B,J,\rho,R}$. On fait de $S_{B,J,\rho,R}$ un $\mathcal{H}^{\Sigma}$-module en faisant agir T par T_B.

Lemme 5.3.5. *Les R-morphismes T, T_B, U_1, U_2, U, U' satisfont les assertions du lemme 3.5.3. De plus, U_1 et U_2 (resp. U et U') sont des morphismes de $\mathcal{H}^{\Sigma_{\mu_0}}$-modules (resp. $\mathcal{H}^{\Sigma_{\mu_0}\cup\{v_0\}}$).*

Démonstration — La première assertion du lemme résulte de 5.3.3. La deuxième résulte de ce que les éléments de G_v et G_{v_0} commutent dans $G(\mathbb{A}_{F,f})$ pour tout $v \neq v_0$. □

5.3.6. *Formes anciennes et formes nouvelles.* Nous définissons l'espace $O_{B,J,\rho,R}$ des *formes anciennes* et l'espace $N_{B,J,\rho,R}$ des *formes nouvelles* à valeurs dans R.

On pose tout d'abord

$$O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} := (U_1 \oplus U_2)(S^2_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}})^{\mathrm{sat}} \subset S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}},$$

$$N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} := O^{\perp}_{B,J,K,\mathcal{O}_{\mu_0}} \subset S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}.$$

Puis, pour toute $\mathcal{O}_{\mu_0}$-algèbre R,

$$O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} := O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} R \subset S_{B,J,\rho,R},$$

$$N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} := N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} R \subset S_{B,J,\rho,R},$$

On a, si R est une L_{μ_0}-algèbre (mais pas si $R = \mathcal{O}_{\mu_0}$ par exemple) l'égalité $O_{B,J,\rho,R} := (U_1 \oplus U_2)(S^2_{K,J,\rho,R})$ et, puisque le produit hermitien sur $S_{B,J,\rho,\mathbb{C}}$ est défini positif, la décomposition $S_{B,J,\rho,R} = O_{B,J,\rho,R} \oplus N_{B,J,\rho,R}$,

5.4. **Le théorème.**

Théorème 5.4.1. *Soit (K,J,ρ) un niveau, un type, et un poids comme dans 5.1.1. Soit L un corps de définition pour (K,J,ρ) et μ une bonne place de L relativement à (K,J,ρ) au sens de la définition 5.3.1. Soit Σ la réunion de l'ensemble des places où K n'est pas hyperspécial et soit ψ un caractère de $\mathcal{H}^{\Sigma}$ tel que $S_{K,J,\rho,L}(\psi)$ soit non nul. Soit enfin v_0 une place de F inerte dans E, hors de Σ et n'ayant pas même trace sur $\mathbb{Q}$ que μ, et $\lambda = \psi(T_{v_0}) \in \mathcal{O}_{\mu}$. Si $\lambda \notin \{q(q^3+1), -(q^3+1)\}$, notons c le plus petit entier vérifiant*

$$c \geq \mathrm{val}_{\mu}(\lambda - q(q^3+1))/2,$$

et si $\lambda = -(q^3+1)$, soit $c = \mathrm{val}_{\mu}(q^3+1)$. Alors il existe une congruence modulo μ^c entre $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu}}(\psi)$ et $N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu}}$ dans $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu}}$.

5.4.2. *Remarques.*

(1) Si $\lambda = -(q^3+1)$, alors $\mathrm{val}_{\mu}(q^3+1)^2 \geq \mathrm{val}_{\mu}(\lambda - q(q^3+1))$, de sorte que l'on peut toujours prendre pour c la partie entière supérieure de $\mathrm{val}_{\mu}(\lambda - q(q^3+1))/2$, ce qui donne bien le théorème 1 de l'introduction. Ce cas correspond aux représentations endoscopiques non tempérées, cf (6.3.1).

(2) Si q^3+1 n'est pas nul modulo μ, i.e. si l'on est en caractéristique normale, alors le théorème reste vrai en prenant $c = \mathrm{val}_{\mu}(\lambda - q(q^3+1))$ (voir la remarque 5.4.10).

(3) Soit $\mathcal{H}$ un anneau commutatif contenant $\mathcal{H}^{\Sigma}$ et agissant sur $S_{K,J,\rho,L}$ et $S_{B,J,\rho,L}$ en respectant les structures entières, et en faisant de U_1 et U_2 des $\mathcal{H}$-morphismes. Dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer le caractère ψ par un caractère de $\mathcal{H}$ tel que le sous-espace propre généralisé $S_{K,J,\rho,L}(\psi)$ (cf. 2.4) est non nul. On obtient ainsi des formes nouvelles sur lesquelles on connaît l'action modulo μ^c de l'algèbre $\mathcal{H}$ tout entière. Cette précision peut être utile dans les applications, en particulier si on prend pour $\mathcal{H}$ le produit tensoriel de $\mathcal{H}^{\Sigma}$, avec un ou plusieurs

anneaux $\mathcal{Z}_v$, $v \in \Sigma$, où $\mathcal{Z}_v$ est le centre de l'algèbre de Hecke du type (K_v, J_v) (voir la remarque 5.4.11).

(4) On peut vraisemblablement étendre le théorème à toutes les places μ de L à condition de prendre pour c le plus petit entier plus grand que $\mathrm{val}_\mu(\lambda - q(q^3+1))/2 - n_\mu$, où n_μ est un entier dépendant de $\mu \in S$ (et de (K, J, ρ)) mais pas de v_0. Les détails sont laissés au lecteur intéressé.

Le reste de cette partie est consacrée à la preuve du théorème précédent.

5.4.3. *Notations.* On pose

$$\begin{array}{rcl} m & := & \mathrm{val}_\mu(\lambda + (q^3+1)), \\ n & := & \mathrm{val}_\mu(\lambda - q(q^3+1)) \\ d & := & \dim_L S_{K,J,\rho,L}(\psi) \end{array}$$

On note μ_0 la place de $L_0 = L \cap \mathbb{R}$ en dessous de μ et on pose

$$M_0 := (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi)^2)$$

et

$$M := (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)^2) = M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu.$$

On a $M_0^{\mathrm{sat}} = O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi)$ et $M^{\mathrm{sat}} = O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi) = M_0^{\mathrm{sat}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu$ d'après le lemme 5.3.5.

Comme en (4.3), on note $M_0^{\overline{*}}$ (resp. $(M_0^{\mathrm{sat}})^{\overline{*}}$) l'ensemble des applications $\mathcal{O}_{\mu_0}$-antilinéaires sur M_0 (resp. M_0^{sat}) et $p_{M_0} \colon M_0 \to M_0^{\overline{*}}$ (resp. $p_{M_0^{\mathrm{sat}}}$) la restriction du produit hermitien de $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$ à M_0 (resp. M_0^{sat}).

Lemme 5.4.4.
(i) Si $\lambda \neq q(q^3+1), -(q^3+1)$, alors le morphisme de L-espaces vectoriels $U_1 \oplus U_2 : S_{K,J,\rho,L}(\psi)^2 \to O_{B,J,\rho,L}$ est injectif. En d'autres termes, les $\mathcal{O}_\mu$-réseaux M et M^{sat} de $O_{K,J,\rho,L_\mu}(\eta)$ sont de rang $2d$.
(ii) Si $\lambda = -(q^3+1)$, alors l'image de $U_1 \oplus U_2 : S_{K,J,\rho,L}(\psi)^2 \to O_{B,J,\rho,L}$ est celle du morphisme injectif U_1 et les deux réseaux M et M^{sat} de rang d sont égaux.

Démonstration — Soient $(f_1, f_2) \in \mathrm{Ker}\,(U_1 \oplus U_2) \cap S_{K,J,\rho,L}(\psi)$ et $u \in V_L \otimes W_L$. Alors $f_1(u)$ et $f_2(u)$ appartiennent à $\mathcal{C}(X, L)$ et vérifient $U_1 f_1(u) + U_2 f_2(u) = 0$ et $T f_i(u) = \lambda f_i(u)$ pour $i = 1, 2$.

Dans le cas (i), le lemme 3.5.3 (iv), appliqué à $R = L$, implique que $f_1(u)$ et $f_2(u)$ sont nulles. Comme ceci vaut pour tout $u \in V_L \otimes W_L$, c'est que f_1 et f_2 sont nulles d'où la première partie du lemme.

Dans le cas (ii), alors le lemme 3.5.3, (i), implique l'égalité $U'U f_i(u) = 0$ pour $i = 1, 2$. Par l'assertion (ii) du même lemme, et puisque le produit hermitien sur $S_{K',J,\rho,L}$ est défini positif, on a donc $U f_1(u) = U f_2(u) = 0$. Enfin, l'assertion (iii) montre que $f_1(u) = f_2(u)$, ce qui prouve que M est l'image de U_1. Comme le lemme 3.5.3, (v), montre que U_1 est injectif sur $S_{K,J,\rho,R}$ pour toute $\mathcal{O}_\mu$ algèbre R, le lemme 4.1.1 donne enfin l'égalité $M = M^{\mathrm{sat}}$. □

Lemme 5.4.5. *Si $\lambda \neq q(q^3+1), -(q^3+1)$, alors $\mathrm{long}_{\mathcal{O}_\mu}(M^{\mathrm{sat}}/M) \leq dm/2$.*

Démonstration — Le lemme 4.1.1 implique que pour tout entier α assez grand, le $\mathcal{O}_\mu$-module M^{sat}/M est isomorphe au noyau de $(U_1 \oplus U_2)_{|S_{K,J,\rho,R}(\psi)^2}$ avec $R = \mathcal{O}/\mu^\alpha$. D'après le lemme 3.5.3, (iii), ce module est encore isomorphe à

$$\{f \in S_{K,J,\rho,R}(\psi), Uf \text{ est constante}\}$$

Par le lemme 5.3.5, on a pour tout $f \in S_{K,J,\rho,R}(\psi)$ telle que Uf est constante et tout $\tau \in \mathcal{H}^{\Sigma_{\mu_0}}$

$$(\eta_{\mathrm{const}}(\tau) - \psi(\tau))Uf = \tau Uf - \psi(\tau)Uf = U\tau f - \psi(\tau)Uf = 0.$$

Comme les caractères η_{const} et ψ ne sont pas congrus modulo μ, le lemme 5.1.7 implique qu'ils prennent des valeurs distinctes modulo μ sur une infinité d'algèbres $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ pour $v \notin \Sigma$, donc sur au moins une d'entre elles avec $v \notin \Sigma_{\mu_0}$. On a donc nécessairement $Uf = 0$.

On a donc prouvé que le $\mathcal{O}_\mu$-module M^{sat}/M est isomorphe à $\operatorname{Ker} U_{|S_{K,J,\rho,R}(\psi)}$. Or, le lemme 3.5.3, (i) et (ii), implique l'identité $U^*U = T + (q^3+1) = \lambda + (q^3+1)$. Puisque $\mathrm{val}_\mu(\lambda + q^3 + 1) = m$, on a $\mathrm{val}_\mu(\det U^*U) = md$, et le lemme découle du lemme 4.3.2. □

Lemme 5.4.6. *(i) Si $\lambda \neq q(q^3+1), -(q^3+1)$, alors*

$$\mathrm{long}_{\mathcal{O}_\mu}((M_0^{\overline{*}}/p_{M_0}(M_0)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu) = d(m+n).$$

(ii) Si $\lambda = -(q^3+1)$, alors $\mathrm{long}_{\mathcal{O}_\mu}((M_0^{\overline{*}}/p_{M_0}(M_0)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mu_0}} \mathcal{O}_\mu) = d\mathrm{val}_\mu(q^3+1)$.

Démonstration — (i) Par le lemme 4.1.1, $\mathrm{long}_{\mathcal{O}_\mu}(M_0^{\overline{*}}/p_{M_0}(M_0))$ est la μ-valuation du déterminant de p_{M_0}. Soit $e_1, \dots, e_d$ est une base orthonormée de $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi)$. Par le lemme 5.4.4, la famille $U_1(e_1), U_2(e_1), \dots, U_1(e_d), U_2(e_d)$ de vecteurs de M_0 en est une base sur laquelle la matrice de p_{M_0} est, d'après la proposition 3.5.4, la matrice $(2d, 2d)$ diagonale en des blocs $(2,2)$ tous égaux à

$$\begin{pmatrix} q^3+1 & \lambda \\ \lambda & q(q^3+1) + (q-1)\lambda \end{pmatrix}.$$

Le point (i) résulte donc du fait que le déterminant de la matrice (2,2) ci-dessus a pour μ-valuation $n+m$ (voir la remarque suivant la proposition 3.5.4).

Pour prouver (ii), remarquons que, par le lemme 5.4.4 et la proposition 3.5.4, la matrice de p_{M_0} est q^3+1 fois la matrice identité de dimension d. □

Proposition 5.4.7. *Le module $(M_0^{\mathrm{sat}})^{\overline{*}}/p_{M_0^{\mathrm{sat}}}(M_0^{\mathrm{sat}})$ contient un sous-module isomorphe à $\mathcal{O}_\mu/\mu^c$.*

Démonstration — Notant i l'injection canonique de M_0 dans M_0^{sat}, et i^* son adjoint pour p_{M_0} et $p_{M_0^{\mathrm{sat}}}$, on a la suite d'injections

$$M_0 \xrightarrow{i} M_0^{\mathrm{sat}} \xrightarrow{p_{M_0^{\mathrm{sat}}}} (M_0^{\mathrm{sat}})^{\overline{*}} \xrightarrow{i^*} M_0^{\overline{*}},$$

dont la composée est p_{M_0}. Si $\lambda \neq q(q^3+1)$, alors $(M_0^{\mathrm{sat}}/M_0) \otimes \mathcal{O}_\mu = M^{\mathrm{sat}}/M$, les lemmes 5.4.6(i) et 5.4.5 impliquent

$$\begin{aligned} \mathrm{long}_{\mathcal{O}_\mu}\Big((M_0^{\mathrm{sat}}/p_{M_0^{\mathrm{sat}}}(M_0^{\mathrm{sat}})) \otimes \mathcal{O}_\mu\Big) &= \mathrm{long}_{\mathcal{O}_\mu}((M_0^{\overline{*}}/p_{M_0}(M_0)) \otimes \mathcal{O}_\mu) - 2\,\mathrm{long}_{\mathcal{O}_\mu}(M^{\mathrm{sat}}/M)) \\ &\geq d(n+m) - 2(dm/2) \\ &= dn. \end{aligned}$$

Comme $(M_0^{\mathrm{sat}})^{\overline{*}}/p_{M_0^{\mathrm{sat}}}(M_0^{\mathrm{sat}})$ est engendré par $2d$ éléments comme $\mathcal{O}_{\mu_0}$-module, la proposition en découle.

Si $\lambda = -(q^3+1)$, alors le lemme 5.4.4 montre que $(M_0^{\mathrm{sat}}/M_0) \otimes \mathcal{O}_\mu = 0$, et la proposition découle donc du lemme 5.4.6(ii) et du fait que $(M_0^{\mathrm{sat}})^{\overline{*}}/p_{M_0^{\mathrm{sat}}}(M_0^{\mathrm{sat}})$ est engendré par d éléments. □

Lemme 5.4.8. *On a la décomposition orthogonale :*

$$O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} = \oplus_\eta O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\eta)$$

Démonstration — L'inclusion $O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}} \supset \oplus_\eta O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\eta)$ et l'orthogonalité proviennent de la décomposition du paragraphe 5.1.6 et du lemme 5.3.5. Le lemme 5.1.8 montre de plus que les caractères η qui interviennent sont deux-à-deux distincts modulo toutes les places divisant μ_0. Le lemme de Nakayama permet alors d'en déduire l'autre inclusion. □

5.4.9. *Preuve du théorème 5.4.1.* Posons $A = S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}(\psi) = M_0^{\mathrm{sat}}$ et $B = N_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$. Par le lemme 5.4.8, on a

$$(A \oplus B)^\perp \oplus A = O_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}.$$

On peut donc appliquer le lemme 4.3.1 aux sous-$\mathcal{O}_{\mu_0}$-modules A et B de $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_{\mu_0}}$, dont on déduit que $(A\oplus B)^{\mathrm{sat}}/A\oplus B$ est isomorphe à $A^{\overline{*}}/p_A(A)$. Or, par la proposition 5.4.7. $A^{\overline{*}}/p_A(A) \otimes \mathcal{O}_{\mu_0}$ contient un sous-module isomorphe à $\mathcal{O}_\mu/\mu^c$. Le lemme 4.2.2 appliqué aux sous-$\mathcal{O}_\mu$-modules $A \otimes \mathcal{O}_\mu$ et $B \otimes \mathcal{O}_\mu$ de $S_{B,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}$ achève la preuve.

5.4.10. *Preuve de la remarque 5.4.2 (2).* Si q^3+1 n'est pas nul modulo μ, prouvons qu'on peut prendre $c = n$. Supposons $n \geq 1$, sinon il n'y a rien à montrer. On a alors $\lambda \equiv q(q^3+1) \not\equiv -(q^3+1) \pmod{\mu}$, donc d'après le lemme 3.5.3, point (iv), le noyau de l'application $U_1 \oplus U_2$ sur $S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_\mu/\mu}(\psi)^2$ ne peut contenir que des fonctions constantes, et ces fonctions constantes sont nulles puisque $\eta_{\mathrm{const}} \not\equiv \psi$. On en déduit que $M = (U_1 \oplus U_2)(S_{K,J,\rho,\mathcal{O}_\mu}(\psi)^2) = M^{\mathrm{sat}}$, d'où $M_0^{\mathrm{sat}} \otimes \mathcal{O}_\mu = M_0 \otimes \mathcal{O}_\mu$.

Par ailleurs, le produit hermitien p_{M_0} sur M_0 a (cf. la preuve du lemme 5.4.6, point (i)) pour matrice dans une base adéquate une matrice diagonale par blocs (2,2) tous égaux à

$$\begin{pmatrix} q^3+1 & \lambda \\ \lambda & q(q^3+1)+(q-1)\lambda \end{pmatrix}.$$

Sur $\mathcal{O}_\mu$, cette matrice a un déterminant de valuation $m+n=n$, et son premier mineur est de valuation nulle puisque q^3+1 est inversible. Elle est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1,\pi^n)$ (où π est une uniformisante de $\mathcal{O}_\mu$). On voit donc que $(M_0)^{\overline{*}}/p_{M_0}(M_0)$ contient un sous-module isomorphe à $\mathcal{O}_\mu/\mu^n$, et il en va donc de même de $(M^{\mathrm{sat}})^{\overline{*}}/p_{M^{\mathrm{sat}}}(M_{\mathrm{sat}})$. On conclut comme en 5.4.9.

5.4.11. *Preuve de la remarque 5.4.2(3).* La décomposition de $S_{K,J,\rho,L}$ donnée par 2.4 en sous-espaces propres généralisées pour $\mathcal{H}$ est alors plus fine que celle de 5.1.6 (notons que cette fois ce sont de vrais espaces propres généralisés, car nous ne supposons pas que $\mathcal{H}$ agisse de manière semi-simple), et les lemmes 5.4.4 à 5.4.7 restent donc valables. Suivant le lemme 5.1.8, si l'on définit S de sorte que pour toute place μ ne divisant aucun élément de S, les caractères η de $\mathcal{H}$ intervenant dans cette décomposition sont distincts modulo μ, alors la preuve de 5.4.8 fonctionne sans changement.

6. Représentations automorphes et représentations galoisiennes

La représentation unitaire $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$ de $G(\mathbb{A}_F)$ est somme directe orthogonale de représentations unitaires irréductibles

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)) \simeq \oplus m(\pi)\pi$$

et les π qui apparaissent dans cette somme avec multiplicité $m(\pi) \geq 1$ sont appelés les *représentations automorphes* de G. À cette décomposition correspond une décomposition (cf. 5.1.2)

$$\mathcal{B} = \oplus m(\pi)\pi_{lisse},$$

où π_{lisse} désigne l'ensemble (dense) des vecteurs lisses de π.

6.1. Preuve du corollaire 2.

6.1.1. *Des représentations aux formes propres.* On fixe $(K, J, \rho, V, W, \Sigma)$ comme en 5.1.1.

Soit π une représentation automorphe telle que $\pi_\infty \simeq \rho$ et $\mathrm{Hom}_K(J, \pi) \neq 0$. Alors $\mathrm{Hom}_{K\times G(\mathbb{A}_{F,\infty})}(J \otimes \rho, \pi)$ est non nul. Soit f un élément non nul de cet espace. Pour $v \in V, w \in W$, $f(v\otimes w)$ dans π appartient à π_{lisse}, donc à $\mathcal{B}$. On a donc $0 \neq f \in S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}$. De plus, $\pi^{\prod_{v\notin\Sigma} K_v}$ est muni d'une action scalaire de $\mathcal{H}^\Sigma$, par un caractère η. On a alors $f \in S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}(\eta)$

6.1.2. *Des formes nouvelles propres aux représentations.* On choisit une place v_0 comme en 5.3 et on garde les notations de ce numéro. Soit $0 \neq f \in N_{B,J,\rho,\mathbb{C}}(\eta)$ pour η un caractère de $\mathcal{H}_{\Sigma'}$ (où $\Sigma \subset \Sigma'$ est un ensemble finie de places de F).

Soit $v \in V, w \in W$ telle que $f(v \otimes w)$ soit non nul. Comme J et ρ sont irréductibles, on a $f(v \otimes w) \notin \mathrm{Im}\,(U_1 \oplus U_2)$. Soit π la représentation unitaire engendré par $f(v \otimes w)$ dans $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$. Alors π a une décomposition finie orthogonale (avec multiplicité éventuellement) $\pi = \oplus\pi_i$. Notons f_i la composante de $f(v \otimes w)$ dans π_i, qui est en fait dans π_i^B. Certaines d'entre elles, disons les f_i, $i \in I$ sont non nulles. Supposons par l'absurde que pour tout $i \in I$ on ait $\pi_i^K \neq 0$. Comme π_i est irréductible, π_i^B est constitué de vecteurs engendrés par π_i^K d'après la proposition 3.6.2, donc $f_i \in \mathrm{Im}\,(U_1 \oplus U_2)$ et $f(v \otimes w) = \sum_{i\in I} f_i$ aussi, ce qui n'est pas.

L'un des π_i a donc un B-invariant non nul f_i, mais pas de K-invariant. De plus, $\pi_i^\infty \simeq \rho$,$\mathrm{Hom}_K(J, \pi_i) \neq 0$ et $\mathcal{H}^{\Sigma'}$ agit sur $\pi^{\prod_{v\notin\Sigma'} K_v}$ par η.

6.1.3. *Preuve du corollaire 2.* On garde les notations du corollaire et de 6.1.1. Si π est comme dans le corollaire, η le caractère de $\mathcal{H}^\Sigma$ attaché à Π, on a $S_{K,J,\rho,\mathbb{C}}(\eta) \neq 0$ d'après 6.1.1, et l'hypothèse donne $\eta(T_{v_0}) \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu}$. D'après le théorème 1, et le lemme de Deligne-Serre, il existe une forme $0 \neq g \in N_{B,J,\rho,L}(\eta')$ telle que $\eta' \equiv \eta$ $(\mathrm{mod}\ \mu)$ comme caractère de $\mathcal{H}^{\Sigma_\mu}$, et 6.1.2 permet de conclure à l'existence de π'

En complément du corollaire, notons :

Proposition 6.1.4. *Gardons les notations du corollaire 2. Alors π'_{v_0} est isomorphe soit à π^s soit à* St. *Si $q^3 + 1 \not\equiv 0 \pmod{\mu}$, on peut assurer que $\pi'_{v_0} \simeq$* St.

Démonstration — La première assertion résulte immédiatement du corollaire et de 3.6.6. Pour la seconde, notons que la preuve du corollaire montre qu'on construit π' telle que T_B agit sur $(\pi'_{v_0})^{B_{v_0}}$ par $\lambda \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu}$. Or d'après le lemme 3.7.2, T_B agit sur $(\pi^s)^B$ par $-(q^3 + 1)$, donc on ne peut avoir $\pi'_{v_0} \simeq \pi^s$. $\square$

6.2. **Preuve du théorème 3.**

6.2.1. *Représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes.* Soit π une représentation automorphe pour G. D'après les travaux de Rogawski, Blasius et Rogawski (cf. [Bla-Rog, th. 1.9.1]), on peut attacher à π un corps de définition L, et un système compatible ρ_μ : $\mathrm{Gal}\,(\bar{E}/E) \to \mathrm{GL}(M_\mu)$ de représentations continues de $\mathrm{Gal}\,(\bar{E}/E)$ de dimension 3 sur L_μ, μ parcourant l'ensemble des places finies de L, qui vérifient :

Pour toute place finie μ de L et toute place finie v de F non ramifiée dans E où π est non ramifiée, et toute place w de E au-dessus de v, ρ_μ est non ramifiée en w, et le polynôme caractéristique de $\rho_\mu(\mathrm{Frob}_w)$ coïncide avec celui de $\mathrm{mat}_{\pi,w}$.

On en déduit facilement, vue la forme des matrices de Hecke (3.6.7,3.8) que les représentations ρ_μ vérifient

$$\rho_\mu^c \simeq \rho_\mu^*.$$

6.2.2. Si Λ est un $\mathcal{O}_\mu$-réseau de L_μ^3 stable par ρ_μ, on notera ρ_Λ la représentation de dimension 3 sur $\mathcal{O}_\mu$ donné par l'action de $\mathrm{Gal}\,(\bar{E}/E)$ sur Λ.

Proposition 6.2.3. *Quitte à remplacer L_μ par une extension ramifiée de degré ≤ 3, il existe un réseau stable Λ tel que $\rho_\Lambda^c \simeq \rho_\Lambda^*$.*

6.2.4. Soit $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-Tits attaché à $\mathrm{GL}_3(L_\mu)$, X l'ensemble de ses sommets, $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{X}$ fixe par $\rho_\mu(\mathrm{Gal}\,(\bar{E}/E))$ et $S = \mathcal{S} \cap X$. Rappelons que les points de X correspondent aux classes d'homothéties $[\Lambda]$ de $\mathcal{O}_\mu$-réseaux Λ dans L_μ^3, et que ceux de S sont les $[\Lambda]$ avec Λ stable par ρ_μ ([Bel2, lemme 3.1.2])

Lemme 6.2.5. *Il existe un automorphisme b de $\mathcal{X}$ en tant que complexe polysimplicial, qui laisse stable $\mathcal{S}$, et tel que, pour tout $[\Lambda] \in S$, si $b([\Lambda]) = [\Lambda']$, on ait*

$$\rho_\Lambda^c \simeq \rho_{\Lambda'}^*.$$

Démonstration — Voir [Bel-Che, 7.3.3] □

Si ρ_μ est irréductible, la proposition résulte donc du lemme suivant :

Lemme 6.2.6. *Si ρ_μ est irréductible, quitte à remplacer L_μ par une extension ramifiée de degré au plus 3, b a un point fixe dans S.*

Démonstration — Comme ρ_μ est irréductible, l'ensemble S est fini d'après [Bel2, prop. 3.2.1 et remarque suivante]. Il existe donc, d'après [B-T], une facette $F \subset \mathcal{S}$ telle que $b(F) = F$. L'isobarycentre x de F vérifie $b(x) = x$ et il est clair que si L_μ est remplacé par un extension ramifiée de degré $1 + \dim F$, on a $x \in S$. □

6.2.7. Prouvons maintenant la proposition quand ρ_μ est réductible. Si $\rho_\mu \simeq \rho_1 \oplus \rho_2$ avec ρ_1 et ρ_2 irréductibles de dimension 1 et 2 respectivement, on a $\rho_i^c \simeq \rho_i^*$ pour $i = 1, 2$. On raisonne alors pour chaque ρ_i comme on l'a fait pour ρ_μ, et on prouve ainsi la proposition. Si $\rho_\mu \simeq \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3$, où les ρ_i sont trois caractères, le réseau $\mathcal{O}_\mu e_1 \oplus \mathcal{O}_\mu e_2 \oplus \mathcal{O}_\mu e_3$ convient, où les e_i sont trois vecteurs indépendants vérifiant $\rho(g)e_i = \rho_i(g)e_i$ pour $g \in \mathrm{Gal}\,(\bar{E}/E)$, $i = 1, 2, 3$.

6.2.8. *Fin de la preuve du théorème 3.* (comparer avec [Clo, partie 6])

Soit Λ comme dans la proposition 6.2.3. Choisissons une base de Λ, ce qui nous permet de voir ρ_Λ comme un morphisme $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$.

Comme $\rho_\Lambda^c \simeq \rho_\Lambda^*$, il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$ tel que pour $g \in \mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$, on a, posant $M^* = {}^tM^{-1}$ pour toute matrice M (où γ est un élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ relevant la conjugaison de $\mathrm{Gal}(E/F)$, cf 2.1) :

$$\rho_\Lambda(\gamma g \gamma^{-1}) = A\rho_\Lambda(g)^* A^{-1}. \tag{8}$$

D'après (8), A^*A est dans le commutant de ρ donc est un scalaire λ ; autrement dit ${}^tA = \lambda A$, d'où $\lambda = \pm 1$, et puisque A est inversible, on a

$$A^*A = 1 \tag{9}$$

Soit $n \geq 1$ un entier. Notons ρ_n la réduction de ρ_Λ modulo μ^n, i.e. la composé de ρ_Λ avec l'application $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\mu) \to \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\mu/\mu^n)$. Notons $\tilde{G}$ le produit semi-direct $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}/\mu^n) \rtimes C$, C étant le groupe à deux éléments $\{1, c\}$, l'élément non trivial c agissant par $g \mapsto g^*$. Les relations (8, 9)) permettent de prolonger ρ_n en un morphisme, noté $\tilde{\rho}_n : \mathrm{Gal}(\bar{E}/F) \to \tilde{G}$ par

$$\tilde{\rho}_n(\sigma) = \rho(\sigma) \rtimes 1,\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{E}/F) \tag{10}$$

$$\tilde{\rho}_n(\gamma) = A \rtimes c \tag{11}$$

Soit $\omega_{l^n} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^*$ le caractère cyclotomique. L'élément $(A \rtimes c, -1)$ est l'image de γ par $\tilde{\rho}_n \times \omega_{l^n}$. Par le théorème de Cebotarev, il existe un ensemble de densité analytique strictement positive de places v de F telles que $\tilde{\rho}_n(\mathrm{Frob}_v) = A \rtimes c$ et $\omega_{l^n}(\mathrm{Frob}_v) = -1$.

Soit v une telle place. Si v était décomposée dans E, on aurait $\mathrm{Frob}_v \in \mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ et $\tilde{\rho}(\mathrm{Frob}_v) \in Gl_3(\mathcal{O}_\mu/\mu^n)$. Donc v est inerte ou ramifiée. On peut supposer que v est inerte.

Soit q le cardinal résiduel de F_v. On a alors $q = \omega_{l^\infty}(\mathrm{Frob}_v) \equiv -1 \pmod{\mu^n}$. De plus, si w est la place de E au-dessus de F, on a $\mathrm{Frob}_w = \mathrm{Frob}_v^2$ et on a dans $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\mu/\mu^n)$

$$\rho_n(\mathrm{Frob}_w) = (\tilde{\rho}_n(\mathrm{Frob}_v))^2 = (A \rtimes c)^2 = AA^* = 1 = \begin{pmatrix} q^2 & & \\ & 1 & \\ & & q^{-2} \end{pmatrix}.$$

D'après 3.7, l'opérateur de Hecke T_v agit sur $\Pi_v^{K_v}$ par $q(q^3+1) \pmod{\mu^n}$. CQFD.

6.3. Applications aux représentations endoscopiques non tempérées.

6.3.1. *Rappels.* Une représentation automorphe pour G est dite *endoscopique non tempérée* si elle vérifie les propriétés équivalentes suivantes

(a) π_v est isomorphe à π^n en une place inerte.

(b) π_v est isomorphe à π^n en presque toute les places inertes (variante : en toutes les places inertes où π est non ramifiée).

(c) Il existe deux caractères de Hecke de E, χ et ϕ, vérifiant $\chi^c = \chi^{-1}$, $\phi^c = \phi^{-1}$ tels que pour toute place w de E la matrice de Hecke $\mathrm{mat}_w(\pi)$ soit

$$\mathrm{diag}(\chi(\varpi_w)\phi(\varpi_w)|\varpi_w|^{1/2}, \phi(\varpi_w), \chi(\varpi_w)\phi(\varpi_w)|\varpi_w|^{-1/2}),$$

où ϖ_w désigne une uniformisante de E_w.

(d) π est non tempérée en presque toute place et est de dimension infinie.

L'équivalence entre (a) et (b) résulte de [Rog3, th. 13.3.6 (c)], l'équivalence entre (b) et (c) de [Rog2, pages 395-398] ; que (c) implique (d) est clair, car les matrices de Hecke des représentations 1-dimensionnelles sont de la forme

$$\mathrm{diag}(\phi(\varpi_w)|\varpi_w|, \phi(\varpi_w), \phi(\varpi_w)|\varpi_w|^{-1})$$

et (d) implique (c) résulte de la classification des A-paquets de G rappelée en [Rog1, 2.9], de la construction de la représentation galoisienne associée et des conjectures de Weil, prouvées par Deligne.

On conjecture en général que les représentations automorphes qui sont tempérées en presque toutes places le sont partout. Pour $G = \mathrm{U}(3)$, nous montrerons ce résultat dans un prochain article à l'aide du théorème 1. Sans recourir à ce résultat, convenons par abus d'appeler *tempérées* les représentations automorphes qui le sont en presque toute place.

Théorème 6.3.2. *Soit π une représentation automorphe non tempérée, L un corps de définition. Pour presque toute place μ de L il existe une représentation automorphe tempérée π' telle que $\pi' \equiv \pi \pmod{\mu}$.*

Démonstration — Le corollaire 2 et le théorème 3 montrent pour presque toute place μ de L, l'existence d'une représentation π', d'une place inerte v_0 où π est non ramifiée telles que $(\pi'_{v_0})^{B_{v_0}} \neq 0$ et $(\pi'_{v_0})^{K_{v_0}} = 0$ vérifiant $\pi' \equiv \pi \pmod{\mu}$.

Reste à montrer qu'on peut imposer que π' soit tempérée.

La forme des matrices de Hecke interdit que π' soit de dimension 1, quitte à exclure encore un nombre fini de l. Supposons par l'absurde que π' est endoscopique non tempérée, et soit χ',ϕ' les caractères de Hecke de E attachée à π'. On a $\chi \equiv \chi' \pmod{\mu}, \psi' \equiv \psi;\ \pmod{\mu}$. En particulier, les signes des équations fonctionnelles $\epsilon(\chi)$ et $\epsilon(\chi')$ sont les mêmes (cf. [Del]). D'après [Rog2, théorème 1.2], la multiplicité de π (resp. π') est donnée par

$$m(\pi) = 1/2(1 + \epsilon(\chi)(-1)^{N + \deg_{\mathbb{Q}} F})$$

(resp. $m(\pi') = 1/2(1 + \epsilon(\chi')(-1)^{N' + \deg_{\mathbb{Q}} F})$) où N (resp. N') est le nombre de places inertes ou ramifiées où π est du type π^s (cf *loc. cit* pour le sens exact de "de type π^s"). En la place v_0, on a $\pi'_{v_0} \simeq \pi^s$ car $\pi'_{v_0} \simeq \mathrm{St}$ exclurait que π' soit endoscopique (cf. [Rog3, th. 14.6.4]), tandis que $\pi_{v_0} \simeq \pi^n$. Au places $v \neq v_0$, un choix adéquat de poids K et du type J assure que π'_v de type π^s si et seulement si π_v l'est. On a donc $N' = N + 1$. Ceci exclut que $m(\pi)m(\pi') \geq 1$, et cette contradiction prouve le théorème. □

Joël Bellaïche, Phillipe Graftieaux

jbellaic@math.unice.fr, graftiea@math.unice.fr

Laboratoire J.A.Dieudonne

Universite de Nice Sophia-Antipolis

Parc Valrose

06108 Nice Cedex 2

Références

[Bel1] **J. Bellaïche** *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes* Thèse de l'université Paris 11, janvier 2002. Disponible sur http ://www.math.u-psud.fr/theses-orsay/2002/2395.html

[Bel2] **J. Bellaïche** *À propos d'un lemme de Ribet* Preprint DMA, École normale supérieure, no. 02-17

[Bel-Che] **J. Bellaïche et G. Chenevier** *Formes non tempérées pour $U(3)$ et conjectures de Bloch-Kato* arXiv :mathNT/0212282

[Bla-Rog] **D. Blasius et J.Rogawski** *Tate class and arithmetic quotient of two-ball* [ZFPMS] pages 421–443

[Bor] **A. Borel** *Some finiteness properties of adele groups over number fields* IHES Publ.math. **16**, pages 5–30 (1963)

[Bor2] **A. Borel** *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup.* Invent. Math. 35 (1976), 233–259

[B-T] **F. Bruhat et J. Tits,** *Groupes réductifs sur un corps local,* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 41 (1972)

[Car] **P. Cartier,** *Representations of $\mathfrak{P}$-adic Groups, in* [Corvallis], volume 1, pages 111-155

[Cho] **F. Choucroun,** *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits* Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 58 (1994)

[Clo] **L. Clozel,** *On Ribet's Level-raising Theorem for* U(3) American Journal of Math., 122 (2000), pages 1265-1287

[Corvallis] **A. Borel and W. Casselman, editors** *Automorphic forms, representations, and L-functions*PSPM 33

[Del] **P. Deligne** *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L.* Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973

[Key] **D. Keys** *Principal series representations of special unitary groups over local fields,* Compositio mathematica **51**, no. 1, pages 115–130 (1984)

[H-T] **M. Harris & R. Taylor** *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties* Annals of math. studies (2002)

[Laz] **X. Lazarus** *Module universel non ramifié pour un groupe réductif p-adique,* thèse de l'université d'Orsay, 2000, non publiée.

[Rog1] **J. Rogawski** *Analytic expression for the number of points mod p* [ZFPMS] pages 65–109

[Rog2] **J. Rogawski** *The multiplicity formula for A-packets* [ZFPMS] pages 395–419

[Rog3] **J. Rogawski** *Automorphic representations of unitary groups in three variables,* Annals of math. studies **123**, Princeton University Press (1990)

[Tay] **R. Taylor** *On Galois representations associated to Hilbert modular forms* Inventiones math. 98, 265-280 (1989)

[Tit] **J. Tits,** *Reductive Groups over Local Fields in* [Corvallis], volume 1, pages 29–69

[ZFPMS] **Edited by R. Langlands and D. Ramakhrisnan** *The Zeta functions of Picard modular surfaces, 1992, CRM* Publications C.R.M., Montréal