

SUR LA COMPATIBILITÉ ENTRE LES CORRESPONDANCES DE LANGLANDS LOCALE ET GLOBALE POUR $U(3)$

JOËL BELLAÏCHE

RÉSUMÉ. En utilisant un argument d'augmentation du niveau (et un résultat de Larsen sur l'image des représentations galoisiennes apparaissant dans des systèmes compatibles), nous prouvons que pour toute forme automorphe π de $U(3)$, la représentation galoisienne l -adique ρ_l attachée à π par Blasius et Rogawski est à chaque place finie celle associée à π par la correspondance de Langlands locale (au moins à semi-simplification près, et pour un ensemble de densité 1 de l). Nous nous appuyons sur le travail de Harris et Taylor, qui ont prouvé les mêmes résultats (pour $U(n)$) sous l'hypothèse que le changement de base de π est de carré intégrable en au moins une place. Un corollaire de notre résultat est que toute représentation automorphe pour G tempérée à une infinité de places est tempérée partout.

ABSTRACT. Using a level-raising argument (and a result of Larsen on the image of Galois representations in compatible systems), we prove that for any automorphic representation π for $U(3)$, the l -adic Galois representation ρ_l which is attached to π by the work of Blasius and Rogawski, is the one expected by local Langlands correspondance at every finite place (at least up to semi-simplification and for a density one set of primes l). We rely on the work of Harris and Taylor, who have proved the same results (for $U(n)$) assuming the base change of π is square-integrable at one place. As a corollary, every automorphic representation which is tempered at an infinite number of places is tempered at every places.

1. INTRODUCTION

1.1. Résultats. Soit E/F une extension CM de corps de nombres, c l'élément non trivial de $\text{Gal}(E/F)$, G le groupe unitaire à trois variables défini par

$$G(R) = \{g \in \text{GL}_n(E \otimes_F R), {}^t c(g)g = 1\}$$

pour toute F -algèbre R . On choisit une clôture algébrique $\bar{E}$ de E et on pose $\Gamma_E = \text{Gal}(\bar{E}/E)$.

Dans [Rog3], Rogawski a étudié en grand détail les représentations automorphes de G . Il a construit une application de *changement de base* attachant à chaque représentation automorphe π de G une représentation automorphe π_E de $G_E = G \times_F E \simeq (\text{GL}_3)_E$ (voir 2.2.1). De plus, avec Blasius, dans [BR], il a montré l'existence d'un système compatible de représentations galoisiennes attaché à π (ou à π_E), que nous explicitons ci-dessous.

Pour chaque place finie w de E , choisissons une clôture algébrique $\bar{E}_w$ de E_w , et notons $\Gamma_{E_w} := \text{Gal}(\bar{E}_w/E_w)$. Choisissons également un plongement de $\bar{E}$ dans $\bar{E}_w$, ce qui permet d'identifier Γ_{E_w} à un sous-groupe de *décomposition* D_w de Γ_E en w .

Pour l un nombre premier, choisissons une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$ et notons (à la suite de [HT, page 6]) r_l la correspondance de Langlands locale qui associe à une représentation complexe lisse irréductible de $\text{GL}_3(E_w)$ une représentation continue de dimension 3 de Γ_{E_w} sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$.

Enfin, pour r une représentation d'un groupe G , nous notons dans cet article $r|_H$ la restriction de r à un sous-groupe H de G et $r|_H^{ss}$ la semi-simplification de cette restriction.

Théorème 1 (Blasius-Rogawski (voir [BR] théorème 1.9.1 (a) et théorème 2.2.1.)). *Soit π une représentation automorphe de G dont le changement de base π_E est cuspidal. Il existe un corps de nombres L , et pour toute place finie μ de L une représentation continue, absolument irréductible, $\rho_\mu : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}_3(L_\mu)$ telle que pour toute place finie v de F première à $N(\mu)\text{Disc}(E/\mathbb{Q})$ telle que π_v est non ramifiée, et pour toute place w de E divisant v , on ait*

$$(\rho_\mu)_{|D_w}^{ss} \simeq r_l((\pi_E)_w).$$

De plus, soit π_E est l'induite automorphe d'un caractère de Hecke Ψ d'une extension cubique E' de E , soit les représentations ρ_μ sont fortement absolument irréductibles, i.e. la restriction de ρ_μ à tout sous-groupe ouvert de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ est absolument irréductible.

Si L est un corps de nombres satisfaisant la conclusion du théorème 1, on dira que L est un *corps de définition* de π . Tout corps de nombres contenant L est alors aussi un corps de définition de π .

Les ρ_μ forment donc un système de représentations compatibles de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ à coefficients dans L . Mais le théorème précédent ne décrit les représentations ρ_μ qu'aux bonnes places w de E . L'objet de cet article est d'étendre cette description aux autres places. Nous y parvenons, mais seulement pour un ensemble de densité 1 de places μ , et à semi-simplification près. Plus précisément, notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2. *Soit π une représentation automorphe de G dont le changement de base π_E est cuspidal, et L un corps de définition de π . Il existe un ensemble S de densité 1 de nombres premiers tel que pour toute place μ de L divisant $l \in S$, et pour toute place finie w de E ne divisant pas l , on ait*

$$(\rho_\mu)_{|D_w}^{ss} \simeq r_l((\pi_E)_w)^{ss}.$$

Remarquons que si π_E est une induite automorphe d'un caractère de Hecke Ψ , le théorème 2 découle aisément des propriétés de compatibilité locale/globale de l'induction automorphe (cf [AC]) et du théorème de multiplicité un forte pour GL_3 . Pour prouver le théorème 2, on peut donc supposer, et l'on supposera par la suite, que les ρ_μ sont fortement absolument irréductibles.

Le résultat suivant se déduit aisément du théorème 2 :

Corollaire 1. *1) Si π est une représentation automorphe de G dont le changement de base π_E est cuspidal, alors π_E est tempérée en toute place w de E .*
2) Si π est une représentation automorphe de G dont le changement de base π_E est cuspidal, alors π est tempérée en toute place v de F .
3) Si π est une représentation automorphe auto-duale de $\text{GL}_3(F)$ (F un corps totalement réel), tels que π_∞ est discrète à poids distincts pour toute place réelle ∞ de F , alors π vérifie la conjecture de Ramanujan.

Démonstration — Le premier point se prouve à partir du théorème 2 exactement comme le théorème VIII.1.11 de [HT]. Le second résulte du premier. Pour le troisième, pour toute place finie v de F , on peut choisir un corps CM E/F tel que le changement de base π_E est cuspidal et v décomposé dans E . Les hypothèses faites sur π assurent alors que π_E provient par changement de base d'une représentation automorphe π' du groupe unitaire G attaché à E/F . Le fait que π_v est tempérée résulte alors de 1). $\square$

1.2. Méthode. La preuve du théorème 2 s'appuie sur le résultat essentiel suivant, du à Harris et Taylor :

Théorème 3 (Harris-Taylor). *Soit π une représentation automorphe de G dont le changement de base π_E est cuspidal, et L un corps de définition de π . On suppose que $(\pi_E)_w$ est de carré intégrable pour au moins une place finie w de E . Alors pour toute place μ de L (de caractéristique résiduelle l), et pour toute place finie w de E ne divisant pas l , on a*

$$(\rho_\mu)_{|D_w}^{ss} \simeq r_l((\pi_E)_w)^{ss}.$$

L'objet du théorème 2 est donc d'enlever l'hypothèse que π_E est de carré intégrable au théorème 3. Pour cela, on prouve d'abord deux propositions qui sont des cas particuliers du théorème 2 :

Proposition 1. *Soit π une représentation automorphe de G dont le changement de base π_E est cuspidal, et L un corps de définition de π . Il existe un ensemble S de densité 1 de nombre premiers tel que pour toute place μ de L divisant $l \in S$, et pour toute place finie w de E ne divisant pas l , on ait*

$$(\rho_\mu)_{|I_w}^{ss} \simeq r_l((\pi_E)_w)_{|I_w}^{ss},$$

où $I_w \subset D_w$ est le sous-groupe d'inertie.

On note G_v le groupe $G(F_v)$, et B_v un sous-groupe d'Iwahori de G_v .

Proposition 2. *Soit π une représentation automorphe de G dont le changement de base π_E est cuspidal, et L un corps de définition de π . Il existe un ensemble S de densité 1 de nombre premiers tel que pour toute place μ de L dont la caractéristique résiduelle l appartient à S , et pour toute place finie v de F ne divisant pas l , si $\pi_v^{B_v} \neq 0$, on ait, pour w place de E au-dessus de v ,*

$$(\rho_\mu)_{|D_w}^{ss} \simeq r_l((\pi_E)_w)^{ss}.$$

Pour prouver les propositions 1 et 2, l'idée est, en première approximation, de se ramener au théorème 3, appliqué à une représentation automorphe π_n qui en vérifie l'hypothèse (de carré intégrable en une place) et qui est congrue à π modulo μ^n , pour $n = 1, 2, \dots$, la représentation π_n étant obtenue en appliquant le théorème d'augmentation du niveau de [BG] à π en une place inerte auxiliaire v_0 . Cette méthode consistant à utiliser des augmentations du niveau pour se ramener au cas où une hypothèse technique est satisfaite a d'ailleurs déjà été utilisée dans la thèse de Taylor ([Taylor]), dans un cadre et un but différents (il s'agissait de montrer l'existence de représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires de Hilbert)

Cependant on bute ici sur deux difficultés : la première est qu'en appliquant un théorème d'augmentation du niveau à π modulo μ^n avec $n > 1$, on n'obtient pas, de représentations automorphes π_n mais seulement des formes automorphes f_n qu'on ne peut supposer propres pour les opérateurs de Hecke. On contourne ce problème en imposant à f_n d'apparaître dans un espace de formes automorphes admettant un type de Bushnell-Kutzko adéquatement choisi (pour prouver la proposition 1) ou d'être propre modulo μ^n pour un caractère adéquat du centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori (pour prouver la proposition 2).

La seconde difficulté consiste à montrer l'existence de bonnes places inertes auxiliaires : on ne peut pour cela utiliser le théorème 2 de [BG], qui montre l'existence de places auxiliaires v_0 , mais telles que μ est non *normale* pour v_0 (voir 2.3.3), ce qui empêche de montrer que la forme obtenue f_n vérifie les hypothèses du théorème 3. On utilise à la place un résultat récent de Larsen sur l'image des représentations galoisiennes dans un système compatible ([La]), qui combiné avec un résultat de Steinberg, permet de montrer l'existence de bonnes places inertes v_0 , telles que μ est normal pour v_0 (quoique non banal), où augmenter le niveau, à condition d'exclure un ensemble de mesure nulle de nombres premiers l .

Enfin, pour prouver le théorème 2, on utilise un changement de base non galoisien pour ramener le calcul de la trace d'un élément de $D_w - I_w$ dans le cas général à la proposition 2, ce qui, combiné avec la proposition 1 (déterminant la trace des actions des éléments de I_w) permet de conclure.

2. NOTATIONS ET RAPPELS

2.1. Notations. On garde les notations de l'introduction, E/F est une extension CM , c l'élément non trivial de $\text{Gal}(E/F)$. On choisit un relevé γ de c dans $\Gamma_F = \text{Gal}(\bar{F}/F)$, tel que $\gamma^2 = 1$.

Soit G le groupe unitaire défini dans l'introduction. On notera G_v le groupe $G(F_v)$. On notera q_v le cardinal résiduel de F_v , et ϖ_v une uniformisante de F_v .

2.2. Le changement de base de Rogawski.

2.2.1. Changement de base global. Rogawski définit une partition des représentations automorphes de G en A -paquets globaux, et pour chaque A -paquet Π , son changement de base π_E qui est une représentation automorphe de G_E . On peut donc définir sans ambiguïté le *changement de base d'une représentation automorphe* π de E comme le changement de base du A -paquet auquel elle appartient.

2.2.2. Changement de base local. Soit v une place de F . Rogawski définit, suivant les conjectures d'Arthur, des parties finies de l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations lisses complexes irréductibles de G_v qu'il appelle A -paquet locaux. Si v est décomposée, tous les A -paquets sont des singletons.

Soit w une place de E au-dessus de F . Si Π_v est un A -paquet local, on peut définir son changement de base (local) à E_w qui est une représentation lisse complexe irréductible de $\text{GL}_3(E_w)$. Les A -paquets globaux sont produits tensoriels de A -paquets locaux et le changement de base global est compatible au changement de base local.

Une représentation complexe lisse irréductible de G_v peut appartenir à plusieurs A -paquets locaux. Cependant :

Lemme 2.2.3. *Si deux A -paquets Π_v et Π'_v contiennent une représentation en commun, leurs changements de bases sont des sous-quotients d'une même induite parabolique. En particulier, les images de ces deux changements de base par la correspondance de Langlands ont même semi-simplification.*

De plus, si Π_v et Π'_v contiennent deux représentations π_v et π'_v ayant même support supercuspidal à équivalence inertielle près, il en va de même de leur changement de base.

Démonstration — Il n'y a rien à prouver pour v décomposée. On suppose v inerte ou ramifiée.

D'après [Rog3], les seules représentations appartenant à plusieurs A -paquets sont celles notées $\pi^s(\chi)$ *loc. cit.*, page 199, pour χ un caractère de $U(1)$. Ces représentations appartiennent exactement à deux A -paquets, $\{\pi^s(\xi), \pi^2(\xi)\}$ (qui est tempérée), et $\{\pi^s(\xi), \pi^n(\xi)\}$ (qui ne l'est pas). Les changements de base de ces deux A -paquets sont respectivement la sous-représentation irréductible et la représentation quotient de l'induite du Borel du caractère $(\xi_E, \xi_E | \cdot, 1)$.

Le “en particulier” résulte par exemple de [He].

Le “de plus” résulte de [Rog3, prop. 13.2.2]. $\square$

Si π_v est la composante locale d'une représentation automorphe, elle appartient à au moins un A -paquet local. La notation $r_l((\pi_v)_{E_w})^{\text{ss}}$ est donc définie sans ambiguïté par $r_l((\Pi_v)_{E_w})^{\text{ss}}$, où Π_v est n'importe quel paquet local contenant π_v .

2.3. Rappels locaux.

2.3.1. Algèbres de Hecke non ramifiées. Si v est inerte ou ramifiée, G_v est un groupe unitaire quasi-déployé de rang un. Si v est inerte, G_v est de plus non ramifiée. On dispose alors d'une classe de conjugaison privilégiée de sous-groupes compacts maximaux de G_v , la classe de conjugaison hyperspéciale. Si K_v appartient à cette place l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ des fonctions à support compact, K_v -invariantes à gauche et à droite, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, munies de la convolution, est commutative, isomorphe à $\mathbb{Z}[T_v]$. Ici, T_v est l'opérateur de Hecke standard, défini comme la fonction caractéristique de la double classe de la matrice diagonale $(\varpi_v, 1, \varpi_v^{-1})$. On le notera aussi parfois T_w , où w est la place de E au-dessus de v .

Si v est une place décomposée, le choix d'une place w de E définit un isomorphisme $G_v \simeq \text{GL}_3(F_v) \simeq \text{GL}_3(E_w)$, canonique à automorphismes intérieurs près. Si K_v est le compact maximal correspondant à $\text{GL}_3(\mathcal{O}_v)$ via cet isomorphisme, on notera T_w l'opérateur de Hecke dans $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ donnée par la fonction caractéristique de la double classe de la matrice diagonale $(\varpi_v, 1, 1)$.

2.3.2. On peut reformuler le théorème 1 en termes des opérateurs de Hecke ainsi définie. En gardant les notations de ce théorème, pour toute place v telle que π_v est non ramifiée, w place de E au-dessus de v , si λ_w est la valeur propre par laquelle agit l'opérateur T_w sur la droite $\pi_v^{K_v}$, alors

$$\lambda_w = \text{tr } \rho_\mu(\text{Frob}_w).$$

2.3.3. Caractéristiques normales. Si v est inerte, on dit que l est une caractéristique normale (resp. banales) pour G_v (ou pour v) si l ne divise pas $q_v(q_v^3 + 1)$ (resp. $q_v(q_v - 1)(q_v^3 + 1)$).

2.3.4. Centre de Bernstein. Nous rappelons un fragment de la théorie du centre de Bernstein. Soit B_v un sous-groupe d'Iwahori de G_v , K_v un compact maximal. On note $\mathcal{Z}(G_v, B_v)$ le centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_v, B_v)$. Alors

Lemme 2.3.5. *Il existe un isomorphisme d'algèbre*

$$b : \mathcal{Z}(G_v, B_v) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{H}(G_v, K_v) \otimes \mathbb{C},$$

tel que, pour toute représentation π lisse irréductible de G_v telle que $\pi^{B_v} \neq 0$,

- 1) $\mathcal{Z}(G_v, B_v)$ agit sur π^{B_v} par un caractère ψ , et $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ agit sur π^{K_v} (éventuellement nul) par le caractère $\psi \circ b^{-1}$.
- 2) Il existe une unique représentation π' avec $\pi'^{K_v} \neq 0$, et telle que $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ agisse sur π'^{K_v} par $\psi \circ b^{-1}$. De plus π et π' apparaissent dans une même induite non ramifiée.
- 3) La représentation galoisienne $r_l((\pi)_{E_w})^{ss}$ est non ramifiée, et $\text{tr } r_l((\pi)_{E_w})(\text{Frob}_w) = \psi \circ b^{-1}(T_w)$.

Démonstration — D'après la théorie classique des représentations non ramifiées, toute représentation lisse irréductible π apparaît comme facteur de Jordan-Hölder d'une induite parabolique I d'un caractère non ramifié, qui contient un unique facteur non ramifié π' , et qu'on peut supposer indécomposable. D'après l'équivalence de catégorie bien connue de Borel, I^{B_v} est un module indécomposable sur $\mathcal{H}(G_v, B_v)$. Le centre $\mathcal{Z}(G_v, B_v)$ agit donc par un caractère ψ sur I^{B_v} , donc sur π^{B_v} et π'^{B_v} . L'existence de l'isomorphisme b vérifiant 1) résulte de [B] ; 2) résulte alors de ce qui précède, et 3) de [He]. $\square$

3. EXISTENCE DE PLACES INERTES ET NORMALES OÙ AUGMENTER LE NIVEAU

3.1. Énoncé.

3.1.1. Dans toute cette partie, π est une représentation automorphe pour G dont le changement de base à E , est cuspidal, w est une place de E et v est la place de F divisant E . On choisit un corps de définition L de π , et pour μ place finie de L , on note ρ_μ la représentation galoisienne associée, qu'on suppose fortement absolument irréductible.

Le but de cette sous-partie est de prouver le résultat suivant :

Proposition 3.1.2. *Il existe un ensemble S de nombre premiers, de densité 1, tel que pour toute place finie μ de L divisant une place de S , et pour tout entier $n \geq 1$, il existe une infinité de places v_0 de F , inertes dans E , telles que π_{v_0} est non ramifiée, et telles que la valeur propre $\lambda = \lambda_{v_0}$ de l'opérateur de Hecke standard T_{v_0} sur π_{v_0} , et le cardinal résiduel $q = q_{v_0}$ de F_{v_0} vérifient*

- (1) $\lambda \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu^n}$
- (2) $q \equiv 1 \pmod{\mu^n}$.

3.2. Réduction à une propriété de l'image de ρ_μ .

3.2.1. D'après [BG, 6.2.8], il existe une base de L_μ^3 telle que dans cette base, la représentation ρ_μ définisse un morphisme $\rho_\mu : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$, vérifiant pour tout $g \in G_E$

$$(3) \quad \rho_\mu(\gamma g \gamma^{-1}) = A^t \rho_\mu(g)^{-1} A^{-1},$$

où $A \in \text{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$. Comme γ est une involution, on voit en appliquant deux fois (3) que $A^t A^{-1}$ est dans le commutant de ρ_μ , donc est un scalaire α . D'où ${}^t A = \alpha A$, ce qui implique $\alpha = \pm 1$, et le cas antisymétrique $\alpha = -1$ est impossible car A est inversible. On a donc

$$(4) \quad {}^t A = A.$$

3.2.2. Notons ρ_n la réduction de ρ_μ modulo μ^n , et $\omega_{l^n} : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^*$ le caractère cyclotomique. La proposition 3.1.2 se réduit à la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Il existe $g \in \text{Gal}(\bar{E}/E)$ tel que $\rho_n(g) = a \text{Id}$ avec $a \in (\mathcal{O}/\mu^n)^*$ et $\omega_{l^n}(g) = -1$.*

3.2.4. Prouvons que le proposition 3.2.3 implique la proposition 3.1.2. $\tilde{G}$ le produit semi-direct

$$\text{GL}_3(\mathcal{O}/\mu^n) \rtimes C,$$

où C est le groupe à deux éléments $\{1, c\}$ et c agit sur G par $g \mapsto {}^t g^{-1}$. Les relations (3, 4) permettent de prolonger ρ_n en un morphisme, noté $\tilde{\rho}_n : \text{Gal}(\bar{E}/F) \rightarrow \tilde{G}$ par

$$(5) \quad \tilde{\rho}_n(\sigma) = \rho_n(\sigma) \rtimes 1, \quad \sigma \in \text{Gal}(\bar{E}/F)$$

$$(6) \quad \tilde{\rho}_n(\gamma) = A \rtimes c$$

Si g est comme dans l'énoncé de la proposition, on a $\tilde{\rho}_n(g\gamma) = (aA) \rtimes c$ et $\omega_{l^n}(g\gamma) = 1$. Il existe donc une infinité de places v_0 de F telles que $\tilde{\rho}_n(\text{Frob}_{v_0}) = (aA) \rtimes c$ et $\omega_{l^n}(\text{Frob}_{v_0}) = 1$. Ces places ne peuvent être décomposées, un infinité d'entre elles sont donc inertes. Pour v_0 une telle place, on a $q = 1$, et si w_0 est la place de E au-dessus de v_0 ,

$$\rho_n(\text{Frob}_{w_0}) = \tilde{\rho}_n(\text{Frob}_{v_0})^2 = (aA)^t (aA)^{-1} = \text{Id}$$

(cf. [BG, 6.2.8]), ce qui implique que $\lambda \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu^n}$ d'après la transformation de Satake, cf. [BG, 3.7.1]

3.2.5. Le reste de cette partie est consacrée à la preuve de la proposition 3.2.3. Nous distinguerons deux cas (i) et (ii), suivant la disjonction du théorème 2.2.1 de [BR], point (b) : le cas (i) est celui où les représentations ρ_μ sont fortement absolument irréductibles, i.e. sont absolument irréductibles et le restent après restriction à tout sous-groupe d'indice fini du groupe $\text{Gal}(\bar{E}/E)$. Le cas (ii) est celui des représentations qui sont des induites d'un sous-groupe d'indice 3.

3.3. Preuve de la proposition 3.2.3.

3.3.1. Pour tout nombre premier l , et toute place μ de L au-dessus de l , ρ_μ est une représentation de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ de dimension 3 sur L_μ qu'on peut également voir comme une représentation de dimension 3 $[L_\mu : \mathbb{Q}_l]$ sur $\mathbb{Q}_l$. Posons

$$\rho_l = \bigoplus_{\mu|l} \rho_\mu$$

qui est une représentation de dimension

$$3 \sum_{\mu|l} [L_\mu : \mathbb{Q}_l] = 3[L : \mathbb{Q}].$$

Les ρ_l forment un système compatible de représentations l -adiques.

Notons Γ_l l'image de ρ_l (dans $\text{GL}_{3[L:\mathbb{Q}]}(\mathbb{Q}_l)$) et G_l son adhérence Zariski. Comme les représentations ρ_μ (sur L_μ) sont irréductibles, elles sont semi-simples en tant que représentation sur $\mathbb{Q}_l$, ainsi que les ρ_l . Les groupes G_l sont donc réductifs. On note G_l^0 la composante neutre de G_l , auquel on peut appliquer un résultat de Serre (cf. [Serre, théorème, page 15]) :

Lemme 3.3.2. *Il existe une extension finie E' de E , tel que pour tout l ,*

$$\rho_l(\text{Gal}(\bar{E}/E')) = \Gamma_l \cap G_l^0(\mathbb{Q}_l).$$

Quitte à remplacer E par E' , on peut donc supposer que $G_l = G_l^0$. Comme ρ_μ est fortement absolument irréductible, Ce changement de E en E' n'affecte pas l'hypothèse que ρ_μ est absolument irréductible.

3.3.3. On note, suivant [La], G_l^{ad} le groupe adjoint de G_l et G_l^{sc} le revêtement universel de G_l^{ad} . Ce sont des groupes réductifs connexes, et G_l^{sc} et G_l^{ad} sont même semi-simples.

D'après [La-pi], il existe un ensemble de densité 1 de nombre premiers, tel que pour tout nombre premier l de cet ensemble, le groupe réductif G_l^{sc} est non ramifié (cf. [Ti]). On peut donc parler de sous-groupes compacts maximaux hyperspéciaux de $G_l^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l)$ pour $l \notin S$ (cf. [Ti]). Notons enfin Γ_l^{ad} l'image de Γ_l dans $G_l^{\text{ad}}(\mathbb{Q}_l)$ par l'application canonique, et Γ_l^{sc} l'image réciproque de Γ_l^{ad} dans $G_l^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l)$.

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_l & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_l^{\text{ad}} & \xleftarrow{\quad} & \Gamma_l^{\text{sc}} \\ & \searrow & \searrow & & \searrow \\ & G_l(\mathbb{Q}_l) & \xrightarrow{\quad} & G_l^{\text{ad}}(\mathbb{Q}_l) & \xleftarrow{\quad} & G_l^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l) \end{array}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de [La].

Théorème 3.3.4 (Larsen). *Il existe un ensemble de densité 1 de nombres premiers tel que pour tout l de cet ensemble, Γ_l^{sc} est un sous-groupe compact maximal hyperspécial de $G_l^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l)$.*

Corollaire 3.3.5. *Il existe un ensemble S de densité 1 de nombres premiers tel que pour tout l de cet ensemble, Γ_l^{sc} n'a pas de quotient d'ordre 2.*

Démonstration — On prend pour ensemble S de nombre premiers celui du théorème précédent privé de 2. Pour l en dehors de cet ensemble, G_l^{sc} a un (unique) modèle à fibres semi-simples connexes sur $\mathbb{Z}_l$ tel que $\Gamma_l^{\text{sc}} = G_l^{\text{sc}}(\mathbb{Z}_l)$. Comme le noyau de la réduction, surjective d'après le lemme de Hensel, $G_l^{\text{sc}}(\mathbb{Z}_l) \rightarrow G_l^{\text{sc}}(\mathbb{F}_l)$

est un pro- l -groupe avec $l \neq 2$, il suffit de voir que $G_l^{\text{sc}}(\mathbb{F}_l)$ n'a pas de quotient d'ordre 2. Or d'après un théorème de Steinberg ([Steinberg], voir aussi [PR, page 406]), comme le $\mathbb{F}_l$ -groupe algébrique G_l^{sc} est semi-simple connexe et simplement connexe, le groupe de ses points rationnels $G_l^{\text{sc}}(\mathbb{F}_l)$ est d'abélianisé trivial. $\square$

Dorénavant, S désigne un ensemble de nombres premiers comme dans le corollaire ci-dessus.

3.3.6. Notons maintenant Γ_μ l'image de ρ_μ dans $\text{GL}_3(L_\mu)$, et G_μ l'adhérence Zariski de Γ_μ dans $\text{GL}_3(L_\mu)$ considéré comme groupe algébrique sur $\mathbb{Q}_l$, i.e. dans $\text{Res}_{\mathbb{Q}_l}^{L_\mu} \text{GL}_3$.

La projection $p : \rho_l \rightarrow \rho_\mu$ définit un morphisme surjectif p de Γ_l sur Γ_μ qui se prolonge en un morphisme surjectif (noté aussi p) de $\mathbb{Q}_l$ -groupes algébriques $G_l \rightarrow G_\mu$. Le groupe G_μ est donc connexe. On définit G_μ^{ad} comme le groupe adjoint de G_μ , et G_μ^{sc} comme le revêtement universel de G_μ^{ad} . On définit Γ_μ^{ad} comme l'image de Γ_μ , et Γ_μ^{sc} comme l'image réciproque de Γ_μ^{ad} .

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Gamma_l & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_l^{\text{ad}} & \xleftarrow{\quad} & \Gamma_l^{\text{sc}} & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & G_l(\mathbb{Q}_l) & \xrightarrow{\quad} & G_l^{\text{ad}}(\mathbb{Q}_l) & \xleftarrow{\quad} & G_l^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \Gamma_\mu & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_\mu^{\text{ad}} & \xleftarrow{\quad} & \Gamma_\mu^{\text{sc}} & & \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & G_\mu(\mathbb{Q}_l) & \xrightarrow{\quad} & G_\mu^{\text{ad}}(\mathbb{Q}_l) & \xleftarrow{\quad} & G_\mu^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l) & \\
 & & & & \tau & &
 \end{array}$$

où les flèches verticales se déduisent de p par fonctorialité et sont toutes surjectives par construction.

Lemme 3.3.7. *Si $\mu|l$ et $l \in S$, Γ_μ^{sc} n'a pas de quotient d'ordre 2.*

Démonstration — Comme c'est un quotient de Γ_l^{sc} , cela résulte du corollaire 3.3.5. $\square$

Lemme 3.3.8. *Le groupe $G_\mu^{\text{ad}}(\mathbb{Q}_l)/\tau(G_\mu^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l))$ est abélien de 3-torsion.*

Démonstration — Considérons G_μ comme un sous-groupe algébrique de

$$\text{Res}_{L_\mu/\mathbb{Q}_l} \text{GL}_3.$$

Le groupe $G_\mu \times \bar{\mathbb{Q}}_l$ est donc un sous-groupe algébrique de

$$(\text{Res}_{L_\mu/\mathbb{Q}_l} \text{GL}_3) \times \bar{\mathbb{Q}}_l = \prod_W \text{GL}_3$$

où W est l'ensemble des plongements de L_μ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$. On en déduit que le groupe $G^{\text{ad}} \times \bar{\mathbb{Q}}_l$ est un sous-groupe de $\prod_W \text{SL}_3$. Soit Z son centre : comme ρ_μ est absolument irréductible, c'est un sous-groupe du centre de $\prod_W \text{SL}_3$, et il est donc de 3-torsion.

Considérons la suite exacte courte de groupes munis d'une action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_l/L_\mu)$:

$$0 \rightarrow Z(\bar{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow G_\mu^{\text{sc}}(\bar{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\tau} G_\mu^{\text{ad}}(\bar{\mathbb{Q}}_l) \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée identifie $G_\mu^{\text{ad}}(\mathbb{Q}_l)/\tau(G_\mu^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l))$ à un sous-groupe de $H^1(L_\mu, Z(\bar{\mathbb{Q}}_l))$ qui est abélien de 3-torsion. $\square$

Lemme 3.3.9. *Si $\mu|l$ et $l \in S$, Γ_μ^{ad} n'a pas de quotient d'ordre 2.*

Démonstration — Le groupe $G_\mu^{\text{ad}}(\mathbb{Q}_l)/\tau(G_\mu^{\text{sc}}(\mathbb{Q}_l))$ est abélien de 3-torsion, d'après le lemme précédent. Il en va donc de même du groupe $\Gamma_\mu^{\text{ad}}/\tau(\Gamma_\mu^{\text{sc}})$, qui n'a donc pas de quotient d'ordre 2. D'après le lemme 3.3.7, $\tau(\Gamma_\mu^{\text{sc}})$ n'a pas non plus de quotient d'ordre 2. Il en va donc de même de Γ_μ^{ad} . $\square$

Lemme 3.3.10. *Le centre $Z(\Gamma_\mu)$ est composé d'homothéties de L_μ^* , et $\Gamma_\mu/Z(\Gamma_\mu)$ n'a pas de quotient d'ordre 2.*

Démonstration — La première assertion résulte du lemme de Schur, qui montre aussi que $Z(\Gamma_\mu) = Z(G_\mu(\mathbb{Q}_l)) \cap \Gamma_\mu$ et la seconde résulte alors du lemme précédent, car $\Gamma_\mu/Z(\Gamma_\mu) = \Gamma_\mu/(Z(G_\mu(\mathbb{Q}_l)) \cap \Gamma_\mu) = \Gamma_\mu^{\text{ad}}$. $\square$

3.3.11. *Fin de la preuve de la proposition 3.2.3.* Considérons le caractère $\omega_{l^n}^{(l^n-1)/2}$. Son image est $\{\pm 1\}$. D'après le lemme de Goursat et le lemme précédent, l'application $\rho_\mu \times \omega_{l^n}^{(l^n-1)/2} : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \Gamma_\mu/Z(\Gamma_\mu)$ est surjective. Il y a donc un $g' \in \text{Gal}(\bar{E}/E)$ dont l'image est $(1, -1)$. Posons $g = g'^{(l^n-1)/2}$. Alors $\rho_\mu(g) \in Z(\Gamma_\mu)$ donc est un scalaire, et il en va de même de sa réduction $\rho_n(g)$. De plus $\omega_{l^n}(g) = -1$, ce qui prouve la proposition.

4. PREUVE DE LA PROPOSITION 1

On reprend les mêmes notations que dans la partie 3.1.1.

4.1. Choix d'un niveau et d'un type pour la preuve.

Lemme 4.1.1. *Il existe un sous-groupe compact ouvert K_v de G_v et une représentation J_v de K_v tel que*

- a. $\text{Hom}_{K_v}(J_v, \pi_v) \neq 0$
- b. *Pour τ une représentation lisse irréductible de G_v , si $\text{Hom}_{K_v}(J_v, \pi_v)$ on a pour toute place μ de L*

$$r_l(\tau_{E_w})_{|I_w}^{\text{ss}} \simeq r_l(\pi_{E_w})_{|I_w}^{\text{ss}}.$$

Démonstration — D'après [Bu, page 772] si v est décomposé, ou le théorème principal de [Bl] si v est inerte ou ramifiée, il existe un type (K_v, J_v) , tel que pour toute représentation lisse irréductible τ de G_v , $\text{Hom}_{K_v}(J_v, \tau) \neq 0$ si et seulement si τ et π_v ont même support supercuspidal à équivalence inertielle près. Pour un tel type, la propriété a. est évidemment satisfaite.

Si v est décomposé, on a $G_v = \text{GL}_3(E_w)$; soit $\{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ le support supercuspidal de π (on a $1 \leq k \leq 3$, et les π_i sont des représentations supercuspidales irréductibles de $\text{GL}_{n_i}(E_w)$, avec $\sum_{i=1}^k n_i = 3$). Si $\text{Hom}_{K_v}(J_v, \tau) \neq 0$, le support

supercuspidal de τ est donc $\{\pi_1 \otimes \chi_1 \circ \det, \dots, \pi_k \otimes \chi_k \circ \det\}$, où les χ_i sont des caractères non ramifiés de E_w^* . Les propriétés de compatibilité à l'induction parabolique ([HT, propriété 2, page 6]) et au twist par un caractère ([HT, propriété 3, page 6]) de r_l , et le fait que deux constituants d'une même induite parabolique aient, à semi-simplification près, la même image par r_l (cf [He]) implique que

$$(7) \quad r_l(\pi_v)^{\text{ss}} \simeq \bigoplus_{i=1}^k r_l(\pi_i)$$

$$(8) \quad r_l(\tau)^{\text{ss}} \simeq \bigoplus_{i=1}^k r_l(\pi_i) \otimes r_l(\chi_i)$$

ce qui implique $(r_l(\tau)^{\text{ss}})|_{I_w} \simeq (r_l(\pi_v)^{\text{ss}})|_{I_w}$. Comme la restriction à I_w commute à la semi-simplification pour une représentation de D_w (cela résulte de [Ta, 4.2.1]), on a donc

$$r_l(\tau)|_{I_w}^{\text{ss}} \simeq r_l(\pi_v)|_{I_w}^{\text{ss}}.$$

Supposons v inerte ou ramifiée dans E . Soit τ tel que $\text{Hom}_{K_v}(J_v, \tau) \neq 0$. Soit τ_{E_w} et $(\pi_v)_{E_w}$ les changements de base de n'importe quel A -paquet contenant τ et π_v . D'après le lemme 2.2.3, τ_{E_w} et $(\pi_v)_{E_w}$ ont même support supercuspidal à équivalence inertielle près. On est alors ramené au cas précédent. $\square$

4.1.2. Soit K_v, J_v comme dans le lemme. Soit $K^v = \prod_{v' \neq v} K_{v'}$ un sous-groupe compact ouvert de $\prod_{v' \neq v} G(F_{v'})$ tel que

$$(9) \quad \pi^{K^v} \neq 0.$$

Posons $K = K_v K^v$ et $J = J_v \otimes 1$.

Pour toute $\mathcal{O}_\mu$ -algèbre R , on note $S_{K, J, \pi_\infty, R}$ le R -module (libre de rang fini) des formes automorphes de niveau K , type J et même poids que π qui sont définis sur R , défini en [BG, 5.2].

4.2. Formes anciennes et nouvelles.

4.2.1. Soit v_0 une place inerte de F , distincte de v , et telle que K_{v_0} est hyperspécial. On note $T = T_{v_0}$ l'opérateur de Hecke standard de $\mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0})$ et q le cardinal résiduel de F_{v_0} . Soit B_{v_0} un sous-groupe d'Iwahori de G_{v_0} contenant K_{v_0} et soit $B := B_{v_0} K^{v_0}$ où $K^{v_0} := \prod_{v' \neq v_0} K_{v'}$.

On note $N_{B, J, \pi_\infty, R}$ et $O_{B, J, \pi_\infty, R}$ les R -modules (libres de rang finis) des formes nouvelles et anciennes (respectivement) en v_0 sur R de niveau B , de type J et de poids π_∞ , tels qu'ils sont définis en [BG, 5.3.6]. La formation de ces espaces commute à tout changement de base $R \rightarrow R'$.

4.2.2. On rappelle que si Σ est l'ensemble fini des places v' telles que $K_{v'}$ n'est pas hyperspécial, l'algèbre de Hecke commutative

$$\mathcal{H}^\Sigma = \bigotimes_{v' \notin \Sigma} \mathcal{H}(G_{v'}, K_{v'})$$

agit par opérateurs R -linéaire sur les espaces $S_{K, J, \pi_\infty, R}$, $N_{B, J, \pi_\infty, R}$ et $O_{B, J, \pi_\infty, R}$, et ceci fonctoriellement en R . (cf. [BG, 5.2.2 et 5.3.4]). Rappelons en particulier que l'action de $\mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0}) = \mathbb{Z}[T]$ sur les espaces $N_{B, J, \pi_\infty, R}$ et $O_{B, J, \pi_\infty, R}$ est définie en identifiant $\mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0})$ à une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G_{v_0}, B_{v_0})$, l'opérateur T étant identifié à l'opérateur T_B défini en [BG, 3.3.2]. Aux autres places $v' \notin \Sigma$, l'action de $\mathcal{H}(G_{v'}, K_{v'})$ est l'action évidente.

Rappelons aussi ([BG, 5.1.3]) que si R est une L_μ -algèbre, les actions de $\mathcal{H}^\Sigma$ sur les espaces considérés sont semi-simples

4.2.3. Pour tout $\mathcal{O}_\mu$ -algèbre R , notons $N_{B,J,\pi_\infty,R}^+$ (resp. $N_{B,J,\rho,R}^-$) le noyau $\text{Ker}(T - q(q^3 + 1))$ (resp. $\text{Ker}(T + (q^3 + 1))$) sur $N_{B,J,\rho,R}$.

Lemme 4.2.4. *Supposons que $(q^3 + 1) \not\equiv 0 \pmod{\mu}$. On a*

$$N_{B,J,\pi_\infty,R} = N_{B,J,\pi_\infty,R}^+ \oplus N_{B,J,\pi_\infty,R}^-$$

et pour tout morphisme $R \rightarrow R'$ de $\mathcal{O}_\mu$ -algèbres on a

$$N_{B,J,\pi_\infty,R'}^\bullet = N_{B,J,\pi_\infty,R}^\bullet \otimes_R R'$$

pour $\bullet \in \{+, -\}$.

Démonstration — Comme $q(q^3 + 1) \not\equiv -(q^3 + 1) \pmod{\mu}$ par hypothèse, il suffit de montrer que l'opérateur T (ou T_B) sur $N_{B,J,\pi_\infty,R}$ est annulé par le polynôme $(X - q(q^3 + 1))(X + (q^3 + 1))$. Par fonctorialité il suffit de le faire pour $R = \mathcal{O}_\mu$, et donc comme $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu} \subset N_{B,J,\pi_\infty,\bar{\mathbb{Q}}_l}$ pour $R = \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$. Comme T agit de manière semi-simple sur cet espace, il suffit de voir que pour $f \in N_{B,J,\pi_\infty,\mathbb{C}}$ propre pour $\mathcal{H}^\Sigma$, la valeur propre λ de T est $-(q^3 + 1)$ ou $q(q^3 + 1)$. Or d'après [BG, 6.1.2], à une telle forme nouvelle propre f est attachée une représentation automorphe π , telle que π_{v_0} est soit la Steinberg St , soit la représentation π^s (voir [BG, 3.6.5]) et que T agisse par λ sur $\pi_{v_0}^{B_{v_0}}$. Le lemme résulte donc de [BG, 6.7.2] $\square$

4.3. Augmentation du niveau.

4.3.1. D'après le point a. du lemme 4.1.1 et (9), la représentation automorphe π définit un élément de $S_{K,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$, propre pour $\mathcal{H}^\Sigma$ de caractère propre noté ψ (cf. [BG, 6.7.1])

Proposition 4.3.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, on peut choisir une place v_0 de F comme en 4.2.1, et tel qu'il existe un vecteur non divisible $f \in N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}^+$, vérifiant*

$$Uf \equiv \psi(U)f \pmod{\mu^n},$$

pour tout $U \in \mathcal{H}^\Sigma$.

Démonstration — D'après la proposition 3.1.2, il existe une infinité de v_0 inertes telles que $q \equiv 1 \pmod{\mu}$ et $\psi(T) \equiv q(q^3 + 1) \pmod{\mu^n}$. On en choisit une qui vérifie les conditions de 4.2.1, i.e. qui est distincte de v et telle que K_{v_0} est hyperspécial. On peut alors appliquer le théorème d'augmentation du niveau en v_0 modulo μ^n de [BG] (théorème 1, page 2). Celui-ci implique l'existence d'une congruence non triviale modulo μ^n entre $O_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}(\psi)$ (l'espace propre de caractère propre ψ pour $\mathcal{H}^\Sigma$ sur $O_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$) et $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$ donc d'un f non divisible dans $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$ vérifiant, pour tout $U \in \mathcal{H}^\Sigma$

$$(10) \quad Uf \equiv \psi(U)f \pmod{\mu^n}$$

Soit P la projection de $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$ sur $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}^+$ parallèlement à $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}^-$. La projection P commute à $\mathcal{H}^\Sigma$ car c'est un polynôme en T . Donc $P(f)$ satisfait aussi la relation (10). Par ailleurs, la relation (10) donne en particulier

$Tf \equiv q(q^3 + 1)f \pmod{\mu^n}$, si bien que $P(f) \equiv f \pmod{\mu^n}$, donc $P(f)$ est non divisible. Remplaçant f par $P(f)$, la proposition est prouvée. $\square$

Fixons dorénavant $n \geq 1$, et v_0 comme dans la proposition précédente. On pose $\Sigma_0 = \Sigma \cup \{v_0\}$ et $\Gamma_E^{\Sigma_0}$ le sous-groupe de Γ_E correspondant à l'extension maximale de E non ramifiée hors des places de E divisant les places de Σ_0 . Enfin, posons $\mathcal{H}^{\Sigma_0} = \otimes_{v' \notin \Sigma_0} \mathcal{H}(G_{v'}, K_{v'})$.

Pour R une $\mathcal{O}_\mu$ -algèbre, notons $\mathfrak{T}_R$ la R -algèbre des endomorphismes de $N_{B,J,\pi_\infty,R}^+$ engendrée par l'action de $\mathcal{H}^{\Sigma_0}$. C'est une R -algèbre commutative, semi-simple si R est une L_μ -algèbre, dont la formation commute à tout changement de base $R \rightarrow R'$ et on a un morphisme d'algèbres surjectif $\mathcal{H}^{\Sigma_0} \otimes R \rightarrow \mathfrak{T}_R$. La conclusion de la proposition précédente se reformule en

Proposition 4.3.3. *La réduction modulo μ^n du caractère ψ de $\mathcal{H}^{\Sigma_0}$ se factorise en un caractère, noté ψ_n , de $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ à valeur dans $\mathcal{O}_\mu/\mu^n$*

Par ailleurs, on a

Proposition 4.3.4. *Il existe un pseudo-caractère χ de $\Gamma_E^{\Sigma_0}$ à valeur dans $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ tel que*

$$(11) \quad \chi(\text{Frob}_{w'}) = T_{w'} \text{ pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma_0$$

$$(12) \quad \chi(g) = \text{tr}_{r_l((\pi_v)_{E_w})^{\text{ss}}}(g) \quad \forall g \in I_w$$

Démonstration — Il suffit de montrer la proposition pour $\mathfrak{T}_{\bar{\mathbb{Q}}_l} = \mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_l$ puisque $\bar{\mathbb{Q}}_l$ est plat sur $\mathcal{O}_\mu$. Mais $\mathfrak{T}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}$ est commutative semi-simple et de dimension finie, donc est isomorphe à un produit fini de copies de $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Si θ désigne la projection de $\mathfrak{T}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}$ vers l'un de ces facteurs il suffit de prouver l'existence d'un pseudo-caractère χ de $\Gamma_E^{\Sigma_0}$ à valeur dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ vérifiant la propriété (12) et, au lieu de la propriété (14), la propriété

$$(13) \quad \chi(\text{Frob}_{v'}) = \theta(T_{v'}) \text{ pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma_0.$$

Comme $\bar{\mathbb{Q}}_l$ est algébriquement clos, il existe une forme $0 \neq f \in N_{B,J,\pi_\infty,\bar{\mathbb{Q}}_l}^+$ propre pour $\mathcal{H}^\Sigma$ de caractère propre θ . D'après [BG, 6.1.2], il existe une représentation automorphe π' attachée à f , telle que $\mathcal{H}^{\Sigma_0}$ opère par θ sur $\pi'^{K^{\Sigma_0}}$ (où $K^{\Sigma_0} = \prod_{v' \notin \Sigma_0} K_{v'}$), et telle que $\pi'_{v_0} \simeq St$ ou $\pi'_{v_0} \simeq \pi^s$. Soit χ le caractère de la représentation de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ attachée à π' ; il vérifie (13) d'après 2.3.2.

Comme $\theta(T) \equiv q(q^3 + 1) \not\equiv -(q^3 + 1) \pmod{\mu}$, on a $\pi_{v_0} = St$ (cf. [BG, lemme 3.7.3]) Donc (π'_E) est la Steinberg en v_0 (d'après [Rog3, prop. 13.2.2(b)]) qui est de carré intégrable, et l'on peut appliquer le théorème 3 à π' , ce qui montre que $\chi(g) = \text{tr}_{r_l((\pi'_v)_{E_w})^{\text{ss}}}(g)$ pour $g \in D_w$. Mais comme $\text{Hom}_{K_v}(J_v, \pi'_v) \neq 0$, le lemme 4.1.1 montre que $r_l((\pi'_v)_{E_w})^{\text{ss}}|_{I_w} \simeq r_l((\pi_v)_{E_w})^{\text{ss}}|_{I_w}$, d'où la formule (12). $\square$

4.3.5. *Fin de la preuve de la proposition 1.* Composons le pseudo-caractère $\chi : \Gamma_E^{\Sigma_0} \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ de la proposition 4.3.4 avec le caractère ψ_n

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu} \rightarrow \mathcal{O}_\mu/\mu^n$$

de la proposition 4.3.3. On obtient un pseudo-caractère

$$\phi_n = \psi_n \circ \chi : \Gamma_E^{\Sigma_0} \rightarrow \mathcal{O}_\mu/\mu^n.$$

D'après la formule (14), et le théorème de Cebotarev, on a

$$\mathrm{tr} \rho_\mu(g) \equiv \phi_n(g) \pmod{\mu^n} \quad \forall g \in \Gamma_E^{\Sigma_0}.$$

Mais d'après (12), on a

$$\phi_n(g) \equiv \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g) \pmod{\mu^n} \quad \forall g \in I_w.$$

D'où

$$\mathrm{tr} \rho_\mu(g) \equiv \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g) \pmod{\mu^n} \quad \forall g \in I_w$$

Dans cette dernière congruence, les deux membres sont indépendants de n (et de v_0). Comme celle-ci est valable pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{tr} \rho_\mu(g) = \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g) \quad \forall g \in I_w$$

et la proposition 1 en découle.

5. PREUVE DE LA PROPOSITION 2

La preuve est très proche de celle de la proposition 1, mais un peu plus simple. Nous indiquons seulement quels sont les changements à faire.

5.1. Choix d'un niveau et d'un type. On prend pour K_v un sous-groupe d'Iwahori B_v de G_v . On prend pour K^v un sous-groupe compact ouvert de $\prod_{v' \neq v} G_{v'}$ tel que $\pi^{K^v} \neq 0$. On prend $K = B_v K^v$ et $J = 1$.

5.2. Formes anciennes et nouvelles. .

Rien ne change sauf en 4.2.2 : on définit Σ comme l'ensemble des places v' différentes de v telles que $K_{v'}$ n'est pas hyperspécial. On définit $\mathcal{H}^\Sigma$ comme

$$\left(\bigotimes_{v' \notin \Sigma, v' \neq v} \mathcal{H}(G_{v'}, K_{v'}) \right) \otimes \mathcal{Z}(G_v, B_v),$$

et cet anneau agit encore sur les espaces de formes $S_{K,J,\pi_\infty,R}$, $O_{B,J,\pi_\infty,R}$, $N_{B,J,\pi_\infty,R}^\bullet$ où $\bullet \in \{\emptyset, +, -\}$. Le lemme 4.2.4 et sa preuve restent valables sans changement.

5.3. Augmentation du niveau.

5.3.1. La proposition 4.3.3 reste valable sans changement, avec la même preuve. La proposition 4.3.4 a pour analogue

Proposition 5.3.2. *Il existe un pseudo-caractère χ de $\Gamma_E^{\Sigma_0}$ à valeur dans $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ tel que*

$$(14) \quad \chi(\mathrm{Frob}_{w'}) = T_{w'} \text{ pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma_0$$

Démonstration — Comme dans la preuve de la proposition 4.3.3, il suffit de montrer, pour tout caractère θ de $\mathfrak{T}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}$, l'existence d'un pseudo-caractère χ de $\Gamma_E^{\Sigma_0}$ à valeur dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$ vérifiant

$$(15) \quad \chi(\mathrm{Frob}_{w'}) = \theta(T_{w'}) \text{ pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma_0.$$

Raisonnant encore comme dans la preuve de la proposition 4.3.3, on voit qu'il existe une représentation automorphe π' attachée à f , telle que $\mathcal{H}^{\Sigma_0}$ opère par θ sur $\pi'^{K^{\Sigma_0}}$ (où $K^{\Sigma_0} = \prod_{v' \notin \Sigma_0} K_{v'}$), et telle que π'_E est la Steinberg en la place au-dessus de v_0 .

Soit χ le caractère de la représentation de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ attachée à π' ; d'après 2.3.2, il est non ramifiée hors $\Sigma_0 \cup \{v\}$ et l'on a

$$\chi(\text{Frob}_{w'}) = \theta(T_{w'}) \text{ pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma, v' \neq v.$$

D'après le théorème 3 appliqué à π' , $\chi(g) = \text{tr } r_l((\pi'_v)_{E_w})^{\text{ss}}(g)$ pour $g \in D_w$. Donc χ est aussi non ramifiée en e , d'après le point 3) du lemme 2.3.5 et l'on a

$$\chi(\text{Frob}_w) = \theta(T_w).$$

(La même chose vaut pour l'autre place $\bar{w}$ de E au-dessus de v dans le cas où v est décomposée.) $\square$

5.3.3. *Fin de la preuve de la proposition 2.* Composons le pseudo-caractère $\chi : \Gamma_E^{\Sigma_0} \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ de la proposition 5.3.2 avec le caractère ψ_n

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu} \rightarrow \mathcal{O}_\mu/\mu^n$$

de la proposition 4.3.3. On obtient un pseudo-caractère

$$\phi_n = \psi_n \circ \chi : \Gamma_E^{\Sigma_0} \rightarrow \mathcal{O}_\mu/\mu^n.$$

D'après la formule (14), et le théorème de Cebotarev, on a

$$\text{tr } \rho_\mu(g) \equiv \phi_n(g) \pmod{\mu^n} \quad \forall g \in \Gamma_E^{\Sigma_0},$$

et aussi

$$\text{tr } \rho_\mu(g) \equiv \phi_n(g) \pmod{\mu^n}$$

Mais d'après (12), on a

$$\text{tr } \rho_\mu(\text{Frob}_w) \equiv \psi_n(T_w) \equiv \text{tr } r_l((\pi_v)_{E_w})^{\text{ss}}(\text{Frob}_w) \pmod{\mu^n} \quad \forall g \in I_v$$

la deuxième congruence découlant du lemme 2.3.5. Dans cette congruence, les deux membres extrêmes sont indépendants de n (et de v_0). Comme elle est valable pour tout $n \geq 1$, on a

$$\text{tr } \rho_\mu(\text{Frob}_w) = \text{tr } r_l((\pi_v)_{E_w})^{\text{ss}}(\text{Frob}_w).$$

Ceci est aussi valable pour l'autre place $\bar{w}$ divisant w (si v est décomposée). Comme les représentations $r_l((\pi_v)_{E_w})^{\text{ss}}$ et $(\rho_\mu)_{D_w}^{\text{ss}}$ sont non ramifiées (lemme 2.3.5, point 3), et ont mêmes caractères centraux (par Cebotarev), elles sont isomorphes, CQFD.

6. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

6.1. Changement de base local.

6.1.1. On note r la représentation $r_l^{\text{ss}}((\pi_v)_{|E_w})$ du groupe $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_l/E_w)$. Soit

$$M = \bar{\mathbb{Q}}_l^{\text{Ker } r}.$$

On a $\text{Gal}(M/E_w) = r(D_w)$. On dispose de la suite exacte

$$0 \rightarrow I_w \rightarrow D_w \rightarrow \text{Gal}(E_w^{nr}/E_w) \rightarrow 0,$$

d'où une suite exacte

$$0 \rightarrow r(I_w) \rightarrow r(D_w) \rightarrow r(\hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow 0$$

Notons que $r(I_w)$ est fini.

6.1.2. Soit u un élément de $D_w = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_l/E_w)$. On suppose que $u \notin I_w$. On note $\langle r(u) \rangle$ l'adhérence du sous-groupe engendré par $r(u)$: sous notre hypothèse, c'est un sous-groupe d'indice fini de $r(D_w)$.

On pose

$$N = M^{\langle r(u) \rangle}.$$

On a $\text{Gal}(M/N) = \langle r(u) \rangle$. L'extension N/E_w est finie mais n'est pas en général galoisienne.

Lemme 6.1.3. *L'extension M/N est non ramifiée, et son Frobenius est $r(u)$.*

Démonstration — Il suffit de montrer que pour toute extension finie galoisienne M' de N contenue dans M , on a M'/N non ramifiée, de Frobenius l'image de $r(u)$ dans $\text{Gal}(M'/N)$. et c'est clair. $\square$

6.1.4. Si B/A est une extension de corps p -adique, on définit le changement de base local de A à B d'une représentation π irréductible lisse de $\text{GL}_n(A)$, qu'on note π_B , par la relation

$$\pi_B := \text{rec}_A^{-1} \circ \text{res}_{A/B} \circ \text{rec}_A(\pi),$$

où $\text{res}_{A/B}$ est la restriction d'une représentation de W_B à W_A .

Si la représentation π est-elle même le changement de base d'une représentation d'un groupe unitaire, par exemple $\pi = (\pi_v)_{E_w}$ on notera $(\pi_v)_B$ son changement de base à B , au lieu de $((\pi_v)_{E_w})_B$, ce qui ne crée pas d'ambiguïté.

Proposition 6.1.5. *Le changement de base local $(\pi_v)_N$ de $(\pi_v)_{E_w}$ à N a une droite invariante par un Iwahori de $\text{GL}_3(N)$.*

Démonstration — Par définition, $r_l((\pi_v)_N)$ est la restriction de $r_l((\pi_v)_{E_w})$ à $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_l/N)$. D'après le lemme 6.1.3, cette représentation est non ramifiée. La proposition en découle. $\square$

Soit N_0 la clôture galoisienne de N , qui est finie et résoluble sur E_w .

6.2. Changement de base global.

Lemme 6.2.1. *Il existe un corps de nombres F' vérifiant*

- i. F' est totalement réel,
- ii. F'/F est résoluble et le changement de base $\pi_{EF'}$ de Π_E à EF' est cuspidal.
- iii. EF' admet une place w' divisant w telle que $(EF)_{w'}/E_w$ soit isomorphe à N_0/E_v .

Démonstration — Cela résulte aisément de [AT, théorème 5, page 103]. Voir [BC, preuve de la proposition 3.2] pour plus de détails. $\square$

On a $\text{Gal}(N_0/E_w) \subset \text{Gal}(EF'/E) = \text{Gal}(F'/F)$. Le sous-groupe $\text{Gal}(N_0/N)$ de $\text{Gal}(N_0/E_w)$ s'identifie à un sous-groupe de $\text{Gal}(F'/F)$ et définit donc un sous-corps H de F' , contenant F , et tel que $(EH)_{w'}/E_w$ est isomorphe à N/E_w .

Le lemme suivant est démontré dans [Ha].

Lemme 6.2.2 (Harris). *Il existe une représentation automorphe cuspidale π_{EH} de $GL_n(EF)$ qui est le changement de base fort de π_E , i.e. dont la composante locale $(\pi_{EH})_x$ en toute place x de EH divisant une place y de E est le changement de base local de $(\pi_E)_y$.*

Par Cebotarev la représentation galoisienne associé à π_{EH} est

$$(\rho_\mu)|_{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/EH)}.$$

D'après la proposition 2, appliquée à π_H en la place w' de EH , on a

$$(\rho_\mu)_{D_{w'}}^{\text{ss}} \simeq r_l(\pi_v)_N = (r(\pi_v)_{E_w})|_{D_{w'}}.$$

Comme $u \in D_{w'} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_l/N)$ par définition de N , on a en particulier

$$\text{tr}(\rho_\mu)(u) = \text{tr } r(\pi_v)_{E_w}(u)$$

Cette égalité est valable pour tout $u \in D_w - I_w$. Mais par ailleurs, d'après la proposition 1, elle est aussi vrai pour $u \in I_w$. On a donc montré $\text{tr}(\rho_\mu)|_{D_w} = \text{tr } r_l(\pi_v)_{E_w}$, et le théorème.

Joël Bellaïche, jbellaic@math.unice.fr ou jbellaic@ias.edu

RÉFÉRENCES

- [AC] J. ARTHUR & L. CLOZEL *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*
PUP Annals of math. studies 120 (1989)
- [AT] E. ARTIN & J. TATE *Class field theory*
W. A. Benjamin (1968).
- [BC] J. BELLAÏCHE & G. CHENEVIER *Formes non tempérées pour $U(3)$ et conjectures de Bloch-Kato*
preprint de l'université de Nice, arXiv :mathNT/0212283
- [BG] J. BELLAÏCHE & P. GRAFTIEUX *Augmentation du niveau pour $U(3)$*
preprint de l'université de Nice, arXiv :math.NT/0307300
- [B] J. N. BERNSTEIN (rédigé par P. DELIGNE) *Le "centre" de Bernstein*, in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en cours, Hermann, 1–32 (1984).
- [BZ] I.N. BERNSTEIN & A. V. ZELEVINSKY *Induced representations of reductive p -adic groups I*
Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 10, pages 441-472 (1977)
- [Bl] L. BLASCO *Description du dual admissible de $U(2,1)(F)$ par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko*
Manuscripta Math. 107, no. 2, pages 151-186 (2002)
- [BR] D. BLASIUS & J. ROGAWSKI *Tate class and arithmetic quotient of two-ball*
[ZFPMS] pages 421-443
- [Bu] C. BUSHNELL *Smooth representations of p -adic group*
ICM 1998, pages 770-779
- [Ha] M. HARRIS *The local Langlands conjecture for $GL(n)$ over a p -adic field, $n < p$*
Invent. Math. 134 (1998), no. 1, 177–210
- [HT] M. HARRIS & R. TAYLOR *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*
PUP Annals of Math. Studies. 151 (2001)
- [He] G. HENNIART *Le point sur la conjecture de Langlands pour $GL(N)$ sur un corps local*
in C. Goldstein, séminaire de théorie des nombres 1983-1984, Birkhäuser 1985
- [Ke] D. KEYS *Principal series representations of special unitary groups over local fields*,
Compositio mathematica 51, no. 1, pages 115-130 (1984)

- [La] M. LARSEN *Maximality of Galois actions for compatible systems.*
Duke Math. J. 80 (1995), no. 3, 601–630.
- [La-pi] M. LARSEN & R. PINK *On l -independence of algebraic monodromy groups in compatible systems of representations*
Invent. Math. 107 (1992), no. 3, 603–636.
- [PR] V. PLATONOV & A. RAPINCHUK *Algebraic groups and number theory*
Academic Press
- [Rog1] J. ROGAWSKI *Analytic expression for the number of points mod p*
[ZFPMS], pages 65–109
- [Rog2] J. ROGAWSKI *The multiplicity formula for A -packets*
[ZFPMS], pages 395–41
- [Rog3] J. ROGAWSKI *Automorphic representations of unitary groups in three variables,*
Annals of math. studies 123, Princeton University Press (1990)
- [Serre] J.-P. SERRE *Lettre à K. Ribet,* premier janvier 1981
in Oeuvres complètes, tome 4, Springer.
- [Steinberg] R. STEINBERG *Endomorphisms of linear algebraic groups*
Mem. Amer. Math. Soc. 80 (1968), 1–108
- [Taylor] R. TAYLOR *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*
Invent. Math. 98 (1989), no. 2, 265–280.
- [Ta] J. TATE *Number theoretic background*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 33, *Automorphic forms, representations and L-functions* Part 2, pages 3–26 (1977)
- [Ti] J. TITS *Reductive groups over local fields*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 33, *Automorphic forms, representations and L-functions* Part 1 (1977)
- [ZFPMS] ED. R. LANGLANDS & D. RAMAKHRISNAN, *The Zeta functions of Picard modular surfaces, 1992, CRM*
Publications C.R.M., Montréal