FORMES NON TEMPÉRÉES POUR U(3) ET CONJECTURES DE BLOCH-KATO

JOËL BELLAÏCHE ET GAËTAN CHENEVIER

Résumé : Dans cet article, nous utilisons des familles p-adiques de formes automorphes pour un groupe unitaire à trois variables, passant par des formes non tempérées construites par Rogawski, pour montrer certains cas des conjectures de Bloch et Kato.

Abstract : In this paper, we use p-adic families of automorphic forms for an unitary group in three variables, containing some non-tempered forms constructed by Rogawski, to prove some cases of the Bloch-Kato conjectures.

Table des matières

1. Introduction 2
1.1. Énoncé du théorème principal 2
1.2. La méthode 4
1.3. Généralisations 5
1.4. Plan de l'article 5
2. Notations et conventions 6
2.1. Corps et groupes de Galois 6
2.2. Anti-auto-duale 6
2.3. Représentations algébriques 6
2.4. Correspondance de Langlands locale 7
2.5. Caractères de Hecke 7
2.6. Poids de Hodge 8
2.7. Géométrie rigide 8
3. Rappel sur la classification de Rogawski 8
3.1. Les groupes unitaires considérés 8
3.2. Classification de Rogawski 8
3.3. Propriétés de ρ_l. 10
4. Représentation non tempérée attachée à un caractère de Hecke 13
4.1. Hypothèses sur le caractère de Hecke 13
4.2. Composantes locales en p décomposé 13
4.3. Composantes locales en p inerte ou ramifiée 13
4.4. Composantes locales à l'infini 14
4.5. Existence de $\pi(\chi_0)$ 14

4.6. Types 15
5. I-invariants et algèbre d'Atkin-Lehner 16
5.1. Notations 16
5.2. I-invariants des représentations non ramifiées 17
6. Déformations des représentations cristallines raffinées 19
6.1. Raffinement d'une représentation cristalline 19
6.2. Raffinements et algèbre d'Atkin-Lehner 19
6.3. Variation de représentations cristallines raffinées, d'après M.Kisin 21
7. Extensions et pseudo-représentations 23
7.1. Existences de réseaux stables 23
7.2. Représentations attachées aux pseudo-caractères 24
7.3. Variante d'un lemme de Ribet 26
8. Déformation p-adique de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^\perp$ 28
8.1. Notations pour les espaces de formes automorphes 28
8.2. Familles p-adiques typées pour U(3) 29
8.3. Pseudo-caractères galoisiens 31
8.4. Déformations de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^\perp$ 33
9. Construction de l'extension 35
9.1. Irréductibilité générique 35
9.2. L'inertie aux places ne divisant pas p 36
9.3. Application des méthodes à la Ribet et Kisin 37
9.4. Élimination du cas a. 38
9.5. Fin de la preuve 39
Références 40

1. Introduction

1.1. **Énoncé du théorème principal.** Soit E/F une extension CM, (ρ, V) une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, continue, irréductible, et géométrique (cf. [FP, page 650]). On note τ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et $\rho^\perp$ la représentation sur V^* donnée par $g \mapsto {}^t\rho(\tau g \tau)^{-1}$. On suppose que la représentation ρ vérifie[1]

$$\rho^\perp = \rho(-1), \tag{1}$$

où $\rho(-1)$ est un twist à la Tate de ρ.

Il est conjecturé que la fonction L complète de ρ, notée $L(\rho, s)$, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en zéro si ρ n'est pas le caractère cyclotomique, ce que nous supposerons. Sous l'hypothèse 1, cette fonction admet une

[1]Notons par exemple que si ρ_F est une représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ vérifiant $\rho_F^* \simeq \rho_F(-1)$, sa restriction ρ à $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ vérifie 1. C'est la cas par exemple d'un twist convenable des représentation attachés aux formes modulaires

équation fonctionnelle de la forme

$$L(\rho, s) = \epsilon(\rho, s)L(\rho, -s), \text{ avec } \epsilon(\rho, 0) = \pm 1,$$

En particulier, $\epsilon(\rho, 0) = -1$ si et seulement si la fonction $L(\rho, s)$ s'annule en 0 à l'ordre impair.

À la suite de Janssen, Bloch-Kato, Fontaine-Perrin-Riou, notons $H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$ le sous groupe de $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho)$ paramétrant les extensions U de la représentation triviale 1 par ρ

$$0 \to V \to U \to 1 \to 0$$

qui ont bonne réduction en toute place, ce qui signifie que les suites

$$0 \to V^{I_w} \to U^{I_w} \to 1 \to 0$$

sont exactes pour toute place w de E ne divisant pas p, I_w désignant un sous-groupe d'inertie en w et que les suites

$$0 \to D_{cris,w}(V) \to D_{cris,w}(U) \to 1 \to 0$$

sont exactes pour toute place w divisant p. La conjecture de Bloch et Kato (cf. [FP, 3.4.5]) implique que

Conjecture 1.1. *Si* $\epsilon(\rho, 0) = -1$, *alors* $\dim H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \rho) \geq 1$.

Cet article propose une nouvelle méthode pour aborder cette conjecture, basée sur des congruences entre formes automorphes non tempérées et tempérées. Son but est d'en démontrer le cas particulier suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que E est un corps quadratique imaginaire. Soit χ un caractère de Hecke algébrique sur E, qui vérifie*

$$\chi^{\perp} = \chi(-1)$$

et dont le type à l'infini est de la forme

$$z \mapsto z^a \bar{z}^{1-a},$$

avec $a \geq 2$. Soit p un nombre premier décomposé dans E et non ramifié pour χ, et $\chi_p : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to L^*$ une réalisation p-adique de χ sur un corps L. Alors, si $\epsilon(\chi, 0) = \epsilon(\chi_p, 0) = -1$, on a

$$\dim H^1_f(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E), \chi_p) \geq 1.$$

Autrement dit, il existe une extension non triviale ayant bonne réduction partout de la forme

$$0 \to \chi_p \to U \to 1 \to 0. \tag{2}$$

Notons que ce théorème peut se démontrer facilement à partir de la conjecture d'Iwasawa pour les corps quadratiques imaginaires, prouvée par Rubin ([Ru1]). Cependant, notre méthode est différente (Rubin utilise des systèmes d'Euler et non des formes automorphes), susceptible de généralisations ultérieures (voir plus bas) et donne une information supplémentaire : elle prouve que *les réductions modulo m^n, (m idéal maximal de $\mathcal{O}_L$, n entier arbitraire) de l'extension (2) dont le théorème affirme l'existence apparaissent*

comme sous-quotient de la cohomologie étale de variétés algébriques sur E. Cet énoncé est prédit par la conjecture de Fontaine-Mazur et ne découle pas de la preuve de Rubin.

1.2. **La méthode.**

1.2.1. Le théorème 1.1 est une généralisation du théorème principal de la thèse d'un des auteurs (cf. [Bel1] théorème VIII.1.7.2), où il est prouvé, sous les mêmes hypothèses, l'existence d'une extension non triviale ayant bonne réduction partout sur $\mathcal{O}_L/m$ de la forme $0 \to \bar{\chi}_p \to U \to 1 \to 0$, et ce pour un ensemble de densité non nulle de p. La méthode utilisée ici est similaire à celle de cette thèse, à une variante près (l'emploi de familles p-adiques combinées avec un résultat de Kisin, au lieu d'augmentation du niveau) dont l'idée est due à Urban et Skinner. Ils ont en effet récemment annoncé (cf. [Sk-Ur]) un analogue du théorème 1.1 pour des formes modulaires ordinaires de niveau 1, par une méthode semblable. Il nous a semblé bon de reprendre cette idée dans notre cas, notamment parce qu'elle nous permet de se passer d'hypothèses sur p, que les familles p-adiques pour $U(n)$ sont construites dans [Che], et qu'elle est plus simplement généralisable (voir 1.3).

1.2.2. Expliquons le principe de la méthode employée. La première idée est d'utiliser les formules de multiplicités, données par des conjectures d'Arthur, des représentations automorphes dans le spectre discret. Pour certaines représentations non tempérées, ces formules font apparaître le signe de certains facteurs ϵ. Plus précisément, dans le cas du groupe unitaire U(3) compact à l'infini attaché au corps quadratique imaginaire E, ces formules sont démontrées par Rogawski et affirment que pour χ un caractère de Hecke comme dans l'énoncé du théorème, il existe dans le spectre discret de E une représentation $\pi(\chi)$, minimalement ramifiée[2], dont la représentation galoisienne associée $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(L)$ est de la forme $\rho = \chi_p \oplus 1 \oplus \chi_p(-1)$ si, et seulement si, $\epsilon(\chi, 0) = -1$.

1.2.3. Plaçons-nous sous cette hypothèse. On dispose donc de $\pi(\chi)$ et de sa représentation galoisienne associée ρ. L'étape suivante est d'obtenir une déformation génériquement irréductible ρ' de ρ, i.e. une représentation ρ' de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur un anneau de valuation discrète R de corps résiduel L avec $(\rho' \otimes_R L)^{ss} = \rho$, et $\rho' \otimes_R Frac(R)$ irréductible ; il faut également contrôler la ramification de ρ' ainsi que son comportement aux places divisant p. Le méthode utilisée pour construire ρ' consiste à placer $\Pi(\chi)$ dans une famille p-adique de formes automorphes[3]

Pour contrôler la ramification de ρ' aux places w de E ne divisant pas p, en particulier aux places où χ est ramifié, on est obligé d'imposer aux formes de la famille p-adique construite de contenir certains types de Buschnell et Kutsko. Pour traduire l'existence

[2]Voir la proposition 4.1 pour plus de détails

[3]C'est là la principale différence avec [Bel1] où l'on ne construisait qu'une déformation de $\bar{\rho} \simeq \bar{\chi}_p \oplus 1 \oplus \bar{\chi}_p(1)$ à l'aide d'un théorème d'augmentation du niveau. Notons cependant que l'on pourrait aussi prouver le théorème 1.1 à l'aide de cette méthode, en construisant des déformations de $\bar{\rho}$ qui sont congrues à ρ modulo m^n, à l'aide de théorèmes d'augmentation du niveau modulo m^n. On obtiendrait ainsi des extensions modulo m^n, puis on passerait à la limite sur n. Cette méthode fera l'objet d'un travail ultérieure, dans un cadre un peu différent.

de ces types en termes de la ramification de ρ', on bute sur la difficulté suivante : il ne semble pas connu [4] que la construction de la représentation galoisienne ρ attachée à une forme automorphe pour U(3) est compatible, en chaque place, avec la correspondance de Langlands locale. Nous montrons comment contourner cette difficulté. Pour contrôler le comportement de ρ' aux places w divisant p, on utilise une forme convenable d'un résultat récent de Kisin.

1.2.4. La dernier étape consiste à appliquer une vieille idée de Ribet (cf. [Ribet]) : l'existence d'une déformation de ρ comme ci-dessus implique l'existence d'extensions non triviales entre les facteurs de ρ. Dans le cas de Ribet, ρ n'avait que deux facteurs et Ribet montrait qu'on pouvait obtenir les extensions d'un facteur par l'autre dans les deux sens possibles. Mais c'est un fait incontournable (cf. [Be-Gr]) que quand ρ a plus de deux facteurs irréductibles, on ne peut assurer l'existence de toutes les extensions entre ces facteurs. On obtient seulement une disjonction d'assertions d'existence. Autrement dit, pour montrer l'existence de l'extension cherchée, on est ramené à montrer la non-existence de certaines autres extensions, non-existence qui a une signification arithmétique globale, étant aussi un cas des conjectures de Bloch-Kato. Dans [Bel1] ainsi que dans la méthode décrite dans [Sk-Ur] (voir *loc. cit.* dernier paragraphe), la preuve de ces cas de non-existence repose sur des résultats récents et difficiles de Rubin ([Ru1]) et de Kato (p-adic Hodge theory and values of Zeta functions of modular forms, prépublication) respectivement. Dans cet article, le seul cas de non-existence que nous avons à vérifier est celui d'une extension ayant bonne réduction partout du caractère trivial par le caractère cyclotomique, qui est une application élémentaire de la théorie de Kummer.

1.3. **Généralisations.** Tout d'abord, l'hypothèse sur p dans le théorème 1.1 est inessentielle, et devrait être supprimée lorsque les familles p-adiques seront disponibles aux places non décomposées et en niveau sauvage (travail en cours d'un des auteurs avec K.Buzzard).

La méthode que nous avons esquissée ci-dessus se prête à des généralisations aux groupes unitaires U(n) compact à l'infini associé à un corps quadratique imaginaire E. Cependant, on ne dispose pas pour l'instant pour ces groupes, si $n \geq 4$, de la construction d'une représentation galoisienne attachée à chaque forme automorphe et vérifiant les propriétés attendues en presque toute place, pas plus que l'on ne dispose des cas nécessaires des formules de multiplicités d'Arthur (cependant des progrès ont été fait récemment dans le cas $n = 4$). Nous avons néanmoins pris garde à énoncer et à démontrer la plupart des lemmes que nous utilisons sous une forme générale, en vue de leur utilisation pour le cas de U(n). Nous comptons revenir sur ce cas dans un avenir proche.

Enfin, il semble par contre plus délicat de généraliser cette méthode au cas où E est un corps CM quelconque, et non quadratique imaginaire (voir à ce propos la remarque 9.1).

1.4. **Plan de l'article.** Indiquons brièvement le contenu des différentes parties de cet article. Dans la partie 2, nous fixons les conventions (concernant essentiellement les normalisations de la théorie du corps de classes et de la correspondance de Langlands

[4] On ne peut appliquer à nos formes le résultat principal de [HT] car elles n'en vérifient pas l'hypothèse, à savoir d'être de carré intégrable en au moins une place finie.

locales) et les principales notations que nous utiliserons. La partie 3 décrit la construction par Blasius et Rogawski du système de représentations l-adiques attaché aux formes automorphes pour $U(3)$. Nous démontrons quelques résultats concernant la compatibilité de cette construction avec la correspondance de Langlands locale. La partie 4 construit et décrit la représentation non tempérée $\pi(\chi)$ discutée plus haut.

Les parties 5, 6 et 7 sont rédigées dans une plus grande généralité. La partie 5 fait, pour GL(n), la théorie des différents choix possibles d'une forme propre ancienne de niveau iwahorique en p, attachée à une forme non ramifiée en p. La partie 6 traite des raffinements des représentations p-adiques cristallines, contrepartie galoisienne de la théorie précédente, et des familles de telles représentations raffinées. On y énonce en particulier, sous une forme adaptée à notre usage, un résultat récent de Kisin. La partie 7 contient les résultats nécessaires sur les pseudo-caractères et les représentations galoisiennes, ainsi que la généralisation adéquate du lemme de Ribet.

Dans la partie 8 nous revenons aux groupes unitaires à trois variables, et construisons des familles p-adiques passant par $\pi(\chi)$. Enfin, la partie 9 montre le théorème principal.

Les auteurs[5] sont heureux de remercier Laurent Berger, Pierre Colmez, Laurent Clozel, Michael Harris, Guy Henniart et Éric Urban pour de nombreuses et utiles conversations durant la réalisation de cet article.

2. Notations et conventions

2.1. **Corps et groupes de Galois.** Dans tout cet article, on note $E \subset \mathbb{C}$ une corps quadratique imaginaire, $\bar{E}$ la clôture algébrique de E dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{A}_E$ l'anneau des adèles de E, W_E et $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ les groupes de Weil et de Galois de $\bar{E}$ sur E. Pour v place de E on notera D_v un sous-groupe de décomposition de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ en v, I_v le sous-groupe d'inertie de D_v, et $\mathrm{Frob}_v \in D_v$ un Frobénius géométrique. On note $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{E}/\mathbb{Q})$ la conjugaison complexe, $\tau^2 = 1$.

2.2. **Anti-auto-duale.** Soit ρ une représentation de W_E ou de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ dans $\mathrm{GL}_n(A)$, où A est un anneau commutatif. On notera $\rho^\perp$ la représentation définie par

$$\rho^\perp(g) = {}^t\rho(\tau g \tau)^{-1}$$

2.3. **Représentations algébriques.** Soit $w = (k_1 \geq \cdots \geq k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note V_w la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}$ de plus haut poids w relativement au Borel supérieur de GL_n. C'est l'unique représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_n/\mathbb{Q}$ telle que le tore diagonal de GL_n agissent sur la droite stable par le Borel supérieur par $\mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{k_i}$. On note

$$\mathbb{Z}^{n,+} := \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 \geq ... \geq k_n\}$$

$$\mathbb{Z}^{n,--} := \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n, k_1 < k_2 < ... < k_n\}$$

Si $w = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose

$$-w = (-k_n, ..., -k_1) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{et} \quad \delta(w) = \mathrm{Min}_{i=1}^{n-1}(k_i - k_{i+1}) \in \mathbb{Z}$$

[5]Durant la rédaction de cet article l'un des auteurs (Joël Bellaïche) a bénéficié de l'aide du Bell fund et du Ellentuck Fund

Si $w \in \mathbb{Z}^{n,+}$, $-w \in \mathbb{Z}^{n,+}$ et $\delta(w) \in \mathbb{N}$. Le dual de V_w est alors V_{-w}. Si F est un corps de caractéristique 0, on notera $V_w(F)$ la représentation de GL_n/F extension des scalaires à F de V_w.

2.4. **Correspondance de Langlands locale.** Nous précisons dans ce paragraphe les conventions choisies pour fixer l'isomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes ainsi que la correspondance de Langlands locale pour GL_n. Soit F un corps de nombres, on normalise l'isomorphisme d'Artin de la théorie du corps de classes globale

$$\mathrm{rec}_F : \mathbb{A}_F^* / \overline{F^*(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{0,*}} \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{ab}$$

en demandant qu'il envoie toute uniformisante locale π_v en une place finie v sur le Frobenius *géométrique* de D_v/I_v, avec l'abus de langage évident. Pour toute place v de F, on dispose alors par restriction de rec_F, d'un isomorphisme du corps de classes local

$$\mathrm{rec}_{F_v} \ : \ F_v^* \longrightarrow W_F^{ab}$$

compatible à l'isomorphisme global.

Supposons maintenant que F est un corps local non archimédien. On choisit la normalisation *à la Langlands* pour la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_n(F)$, notée L (voir par exemple [HT] p.2). Ainsi, pour π une représentation irréductible lisse de $\mathrm{GL}_n(F)$, $L(\pi)$ est une représentation complexe Φ-semisimple de dimension n du groupe de Weil-Deligne WD_F (cf. [Tate, 4.1]). Pour $n = 1$, π est un caractère de $GL_1(F) = F^*$ et $L(\pi)$ est le caractère de W_F qui s'en déduit via l'isomorphisme rec_{F_v} ci-dessus. Par exemple, L envoie le quotient de Langlands de l'induite parabolique attachée à deux représentations lisses irréductible π_1 et π_2 sur la somme directe $L(\pi_1) \oplus L(\pi_2)$.

Soit l un nombre premier, on fixe $\iota_l : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$ un isomorphisme de corps. Pour π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, F un corps local non archimédien, on peut voir $Ł(\pi)$, par transport de structure via ι_l comme une représentation sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ en fait définie sur une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, et on peut donc lui associer une représentation notée $L_l(\pi)$ du groupe de Weil ordinaire W_F sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$, comme en [Tate, 4.2.1].

2.5. **Caractères de Hecke.** Soit $\chi : E^* \backslash \mathbb{A}_E^* \to \mathbb{C}^*$ un caractère de Hecke de E, pour toute place v de E on note χ_v la restriction de χ à E_v^* et χ_f sa restriction aux idèles finies $\mathbb{A}_{f,E}^*$. On identifie $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ via l'inclusion $E \subset \mathbb{C}$. On suppose dans ce qui suit que χ est algébrique, i.e $\chi_\infty(z) = z^a \bar{z}^b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, et on fixe encore l et ι_l comme dans la section précédente en supposant de plus $l = v_1 v_2$ totalement décomposé dans E, v_1 étant la place définie par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota_l} \overline{\mathbb{Q}_l}$. À (χ, ι_l) on peut alors associer un caractère continu $\overline{E^*} \backslash \mathbb{A}_{f,E}^* \to \overline{\mathbb{Q}}_l^*$ défini par la formule :

$$x \mapsto \iota_l(\chi_f(x)))x_{v_1}^a x_{v_2}^b$$

Par composition avec rec_E, on en déduit un caractère l-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ que nous noterons χ_l (à ne pas confondre avec une composante locale de χ, mais c'est sans ambiguïté).

2.6. **Poids de Hodge.** Dans ce paragraphe, p est un nombre premier fixé, μ_{p^n} désigne le $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-module des racines p^n-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note ω le caractère cyclotomique $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_p}(\lim_{n\leftarrow\infty} \mu_{p^n}) = \mathbb{Z}_p^*$. On note $\mathbb{Q}_p(1)$ le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ par le caractère cyclotomique. Notre convention est que cette représentation est de Hodge-Tate de poids de Hodge -1 (cf. [Sen1]). Si $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{Q}_p(n) := \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes n}$, et si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, $V(n) := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(n)$.

Si F est un corps local et V un F-espace vectoriel de dimension finie qui est une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, nous noterons $D_{cris}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ (cf. [Fo1] §2.3, 3.1). Il hérite de B_{cris} d'un endomorphisme K-linéaire φ, le Frobénius cristallin, et lorsque nous parlerons des valeurs propres de ce dernier, ce sera toujours vu comme K-endomorphisme. On rappelle que V est dite cristalline sur $\dim_K D_{cris}(V) = \dim_K(V)$ (cf. [Fo2] 5.4). On parlera parfois, par abus, du Frobénius cristallin de V pour celui de $D_{cris}(V)$.

2.7. **Géométrie rigide.** Si X/F est un affinoide sur un corps local F, on notera $A(X)$ la F-algèbre affinoide de X. Si X est réduit, la norme sup. sur X fait de $A(X)$ une F-algèbre de Banach commutative. On notera $A(X)^0$ les éléments de $A(X)$ de norme ≤ 1. $\mathbb{A}^n$ désigne l'espace affine rigide analytique de dimension n sur $\mathbb{Q}_p$.

3. Rappel sur la classification de Rogawski

3.1. **Les groupes unitaires considérés.** Soit f la forme hermitienne sur E^3 de matrice

$$\begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

Comme Rogawski ([Rog1] p. 66,67), on note $\mathrm{U}(2,1)$ le groupe unitaire sur $\mathbb{Z}$ défini par cette forme, il est quasi-déployé. On fixe $\mathrm{U}(3)$ une forme intérieure de $\mathrm{U}(2,1)$ compacte à l'infini, inchangée aux places finies ([Clo, lemme 2.1]).

3.2. **Classification de Rogawski.**

3.2.1. Suivant Rogawski, et comme prédit par les conjectures d'Arthur, les représentations automorphes discrètes des groupes $\mathrm{U}(2,1)$ et $\mathrm{U}(3)$ sont regroupées en A-paquets de 5 types ([Rog1, 2.9]). Chaque A-paquet Π possède un changement de base π_E qui est une représentation automorphe de GL_3/E ([Rog1, 2.8]).

3.2.2. Étant donné un nombre premier l et un isomorphisme de corps $\iota_l : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$, on peut associer grâce au travaux de Rogawski à un A-paquet Π de $\mathrm{U}(3)$ (resp. de $\mathrm{U}(2,1)$ s'il est cohomologique à l'infini) une représentation l-adique continue, semi-simple, découpée dans la cohomologie l-adique des surfaces de Picard :

$$\rho_l(\Pi) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(\overline{\mathbb{Q}}_l),$$

caractérisée par la propriété suivante, pour toute place finie w de E :

(3) Si w ne divise pas $l\mathrm{disc}(E)$ et si $(\pi_E)_w$ est non ramifiée, $\rho_l(\Pi)_{|D_w} \simeq L_l((\pi_E)_w)$

Autrement dit ρ_l est non ramifiée en w, et le polynôme caractéristique d'un Frobénius géométrique Frob_w est égal à celui de la matrice de Hecke de $(\pi_E)_w$. En conséquence, $\rho_l \simeq \rho_l^\perp$. Lorsque Π est sous-entendu, on notera ρ_l pour $\rho_l(\Pi)$. Bien que le choix de ι_l n'est pas apparent dans la notation ρ_l, il sera toujours sous-entendu.

3.2.3. Nous nommons et décrivons ci-dessous les 5 types de A-paquets, ainsi que les propriétés des représentations galoisiennes associées quand elles existent. Quand le A-paramètre a et le L-paramètre ϕ du changement de base π_E du paquet considéré ont un sens non conjectural (i.e. se factorise par le quotient $W_E \times SL_2(\mathbb{C})$ du groupe conjectural $L_E \times SL_2(\mathbb{C})$), nous les donnons.

L'existence de ρ_l satisfaisant 3 résulte, dans les cas non triviaux, du théorème 1.9.1 de [Bla-Rog1], mais le lecteur prendra garde que la définition de ρ_l que nous prenons (motivée par la vérification de 3 §3.2.2) ne coïncide pas avec la représentation appelée ρ_l *loc. cit.*, que nous noterons $\rho_{l,rog}$ ci-dessous (qui d'ailleurs n'est pas toujours de dimension 3).

- Cas stable tempéré ; l'existence de ρ_l résulte de [Bla-Rog1, théorème 1.9.1 (a)]. Notre ρ_l est $\rho_{l,rog}(1)$ avec les notations de *loc. cit.* La représentation ρ_l est irréductible[6] et satisfait $\rho_l \simeq \rho_l^\perp$.
- Cas endoscopique tempéré de type $(2,1)$; l'existence de ρ_l résulte de [Bla-Rog1, théorème 1.9.1 (b)] (on définit ρ_l comme $\rho_{l,rog}(1) \otimes \chi_l^{-1} \oplus \chi_l(1)$ avec les notations de *loc. cit.*).

  On a $\rho_l \simeq \tau_l \oplus \chi_l$, avec τ_l irréductible de dimension 2, $\tau_l \simeq \tau_l^\perp$, $\chi_l = \chi_l^\perp$.
- Cas endoscopique tempéré de type $(1,1,1)$; le A-paramètre a est trivial sur facteur $SL_2(\mathbb{C})$, et l'on a

  $$a_{|L_E} = \phi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3,$$

  $\psi_i : W_E \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $\psi_i = \psi_i^\perp$. Les A-paquets de ce type sont cohomologiques quand les caractères de Hecke ψ_i sont algébriques, on définit ρ_l par $(\psi_1)_l \oplus (\psi_2)_l \oplus (\psi_3)_l$
- Cas endoscopique non tempéré ; le A-paramètre a vérifie

  $$\forall w \in W_E,\ a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix}$$

  où χ et ψ sont des caractères de Hecke de E vérifiant $\chi = \chi^\perp$, $\psi = \psi^\perp$, et

  $$a_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

[6] Nous ne nous servirons pas de ce fait. Voir la remarque suivant la proposition 9.1

Nous noterons le A-paquets correspondant $\Pi(\chi,\psi)$. Le L-paramètre ϕ vérifie donc

$$\forall w \in W_E,\ \phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|w|^{1/2} & & \\ & \psi(w) & \\ & & \chi(w)|w|^{-1/2} \end{pmatrix},$$

et l'on pose, si $\chi|\ |^{1/2}$ et ψ sont algébriques, auquel cas ϕ est cohomologique à l'infini

$$\rho_l = (\chi|\ |^{1/2})_l \oplus \psi_l \oplus (\chi|\ |^{-1/2})_l.$$

Nous analyserons les A-paquets de ce type de manière beaucoup plus détaillée dans la section suivante.

– Cas stable non tempéré ; le A-paramètre a vérifie

$$\forall w \in W_E,\ a(w) = \begin{pmatrix} \chi(w) & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w) \end{pmatrix},$$

où χ est un caractère de Hecke de E vérifiant $\chi = \chi^\perp$ et $a_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ est la représentation irréductible de dimension 3. On a donc pour L-paramètre

$$\phi(w) = \begin{pmatrix} \chi(w)|.|^{-1} & & \\ & \chi(w) & \\ & & \chi(w)|.| \end{pmatrix},$$

où $\chi \simeq \chi^\perp$. Les A-paquets correspondants sont des singletons, composés des représentations automorphes de dimension 1.

3.3. **Propriétés de ρ_l.** On conjecture naturellement que la construction $\Pi \mapsto \rho_l$ est compatible avec la correspondance de Langlands locale. Plus précisément, on s'attend à ce que l'énoncé suivant soit vérifié :

(COMP) *Si Π est un A-paquet, de changement de base π_E, alors pour tout l, et pour toute place finie v de E ne divisant pas l, la Frobenius-semi-simplifié de la représentation galoisienne $(\rho_l)_{|D_v}$ est isomorphe à $L_l((\pi_E)_v)$.*

Il est vrai pour les places finies v ne divisant pas $\mathrm{disc}(E)$ et où le A-paquet local Π_v est non ramifié (c'est la propriété 3, §3.2.2). De plus, on pourrait montrer qu'il est vrai pour tout v si π_E est de carré intégrable à au moins une place finie, en utilisant [HT, théorème]. Malheureusement cette hypothèse ne sera jamais vérifiée dans les cas que nous aurons à traiter.

Nous allons démontrer dans ce qui suit les cas particuliers de (COMP) dont nous aurons besoin. La propriété suivante est une extension de la propriété 3 aux places divisant $\mathrm{disc}(E)$. Il sera utile de nous placer dans un contexte un peu plus général : Soit F un corps totalement réel, $\mathrm{U}(3)/F$ le groupe unitaire à trois variables associé à l'extension EF/F, compact à toutes les places à l'infini. Pour Π un A-paquet de $\mathrm{U}(3)/F$, les travaux de Rogawski définissent encore, tout comme dans le cas $F = \mathbb{Q}$, un changement de base π_{EF} à GL_3/EF, et des représentations galoisiennes ρ_l de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/EF)$, vérifiant l'analogue de 3 §3.2.2.

Proposition 3.1. *Si Π est un A-paquet de $U(3)_F$, de changement de base π_{EF}, alors pour tout l, et pour toute place finie v de EF ne divisant pas l où π_{EF} est non ramifiée, $\rho_l|D_v$ est non ramifiée.*

Preuve : Soit v une place finie de EF ne divisant pas l et telle que $(\pi_{EF})_v$ est non ramifiée, on veut montrer que ρ_l est non ramifiée en v. On note w la place de F que divise v. Montrons d'abord le résultat si w ne divise pas le discriminant relatif de EF/F.

Soit G'_F désigne la forme intérieure de $\mathrm{U}(3)_F$ quasi-déployée à toutes les places finies de F et à une seule place infinie, par [Rog1, théorème 2.6.1], le A-paquet Π se transfère en un A-paquet Π' cohomologique du groupe G'_F. ρ_l est alors construite dans la cohomologie de la variété de Shimura associé à G'_F, sans structure de niveau en w. Or cette variété de Shimura a bonne réduction en v quand v est non ramifié dans EF/F : cela résulte d'un simple calcul de déformation du problèmes de modules dont cette variété de Shimura est l'espace de module, comme celui fait en [Bel1, proposition I.2.1.5]. Cela conclut.

On suppose donc que v divise le discriminant de EF/F, en particulier v divise un premier $p \in \mathbb{Z}$ ramifié dans E, $p \neq l$. Soit F' un corps quadratique réel ramifié en p et tel que EF'/F' est décomposé en l'unique place de F' au-dessus de p. Il est aisé de voir qu'un tel corps existe toujours. Par exemple si $p \neq 2$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{pD})$ avec $-D \in \mathbb{N}$ sans facteur carré, alors il existe $D' \in \mathbb{N}$ premier à p et sans facteur carré tel que DD' est un carré modulo p, $F' = \mathbb{Q}(\sqrt{pD'})$ convient. Alors EF ne contient pas F', FF' est totalement réel et ramifié au dessus de w, en une place que l'on note w', et EFF'/FF' est alors décomposé au dessus de w'.

Notons $\pi_{EFF'}$ le changement de base, à la Arthur-Clozel ([AC], théorème 4.2, chapitre 3) de π_{EF} à $\mathrm{GL}_{3EFF'}$. La représentation $\pi_{EFF'}$ satisfait $\pi^{\tau}_{EFF'} \simeq \pi^{*}_{EFF'}$, car c'est déjà le cas de π_{EF}. D'après Rogawski ([Roglivre, page xi]) elle descend donc en un A-paquet $\Pi_{FF'}$ du groupe unitaire à trois variables quasi-déployé $\mathrm{U}(2,1)_{FF'}$ sur FF', et même à $\mathrm{U}(3)_{FF'}$. Mais s'il on suit les constructions précédentes, un groupe de décomposition en v de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/EF)$ s'identifie à un groupe de décomposition en w' de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/EFF')$, et $\pi_{EFF'}$ est toujours non ramifiée en w'. On applique alors le premier paragraphe à FF' et $\Pi_{FF'}$, ce qui conclut. □

Proposition 3.2. *Soit Π un A-paquet de $U(3)$, l un nombre premier, v une place finie de E ne divisant pas l, telle que $L((\pi_E)_v) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3$, où les ϕ_i sont des caractères continus $E_v^* \to \mathbb{C}^*$. Soit $I' := rec_v(Ker((\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3)_{|\mathcal{O}^*_{E_v}}))$, alors $\rho_l(I') = 1$.*

Preuve : Soit $p \in \mathbb{Z}$ premier au dessous de v, considérons l'extension abélienne finie de E_v définie par

$$M := \overline{E_v}^{\mathrm{rec}_{E_v}(\mathrm{Ker}(\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3))}$$

Supposons que l'on sache trouver un corps de nombres $F/\mathbb{Q}$ ayant les propriétés suivantes :

i. F est totalement réel,

ii. F est construit à partir de $\mathbb{Q}$ et d'extensions abéliennes successives,

iii EF admet une place w divisant v telle que $(EF)_w/E_v$ soit isomorphe à M/E_v.

Soit π_{EF} le changement de base à EF de π_E ([AC, théorème 4.2 et 5.1], applicable par ii.), par compatibilité du changement de base global au changement de base local

appliqué à l'extension $(EF)_w/E_v$, on a que $(\pi_{EF})_w$ est non ramifiée (utilisant iii.). Si Π_F est le A-paquet de $\mathrm{U}(3)_F$ changement de base à F de Π par le changement de base de Rogawski, son changement de base à E est π_{EF} par multiplicité 1 forte dans le spectre discret de GL(3). La proposition 3.1 conclut.

Il reste à trouver un tel corps de nombres F. Fixons $K/\mathbb{Q}$ un corps quadratique réel ayant une place v' divisant p tel que $K_{v'} \simeq_{\mathbb{Q}_p} E_v$. D'après Artin-Tate ([AT, théorème 5, page 103]), on peut trouver une extension abélienne finie F de K totalement réelle, et ayant une place v'' divisant v' telle que $F_{v''}/K_{v'}$ soit isomorphe à M/E_v. $EF \simeq E \otimes_{\mathbb{Q}} F$ est alors décomposé au dessus de $F_{v''}$, le choix d'une place w de EF au dessus de v'' satisfait donc iii, ce qui conclut. □

Proposition 3.3. *Soit l un nombre premier décomposé dans E, ι_l comme plus haut, Π un A-paquet pour $U(3)$ de changement de base π_E, v_1 une place de E divisant l telle que $(\pi_E)_v$ est non ramifiée, alors :*

1. *$(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ est cristalline en v.*

2. *Le polynôme caractéristique du Frobénius cristallin de $(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ est l'image par ι_l de $L((\pi_E)_v)(Frob_v)$, $Frob_v$ étant un Frobénius géométrique de W_{F_v},*

3. *Si le L-paramètre de Π_∞ a sa restriction à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ de la forme $(z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}$ avec $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$, $a_1 > a_2 > a_3$, les poids de Hodge-Tate de $(\rho_l(\Pi))_{|D_v}$ sont les a_i si v est la place de E induite par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$, les $-a_i$ sinon.*

Preuve : La proposition est immédiate si le L-paramètre de Π est somme de trois caractères, il ne reste donc qu'à traiter les cas où Π est stable tempéré ou endoscopique tempéré de type $(2,1)$ (cf. §3.2). Nous nous placerons par exemple dans le premier cas, le second se traitant de manière identique.

Soit F un corps quadratique réel décomposé au dessus de l, Π_F le changement de base à F du A-paquet Π ([Rog1] 2.6.1), d'après [Roglivre, page xi] Π_F descend en un A-paquet cohomologique du groupe H/F suivant : H/F est une forme intérieure du groupe quasi-déployé sur $\mathrm{U}(2,1)/F$, non quasi-déployée uniquement à l'une des deux places infinies. Supposons donc que Π_F est stable tempéré, on peut choisir une représentation non ramifiée en l, disons π, dans ce A-paquet. Par [Rog1] §4.3, $\rho_l(\pi)(-1)$ apparaît dans la cohomologie l-adique d'un schéma abélien A sur une certaine surface de Picard X_U/O_{EF}, cette dernière étant projective sur O_{EF} par l'hypothèse sur H, et lisse sur $O_{(EF)_v}$ car on peut la choisir un niveau U qui soit maximal hyperspécial en v par notre hypothèse sur v. L'assertion 1 résulte alors de [Fa2] .

Il est bien connu qu'alors la propriété 2 découle de la construction de motivique de $\rho_l(\Pi)(-1)$ ([Rog1] §4.3) et d'un théorème de Katz-Messing ([KMe, théorème 2.2]), combinés à (3) §3.2.2 et au changement de base lisse en cohomologie l-adique. De même, la propriété 3 découle d'un théorème de G.Faltings ([Fa1]). □.

4. Représentation non tempérée attachée à un caractère de Hecke

4.1. **Hypothèses sur le caractère de Hecke.** Soit χ_0 un caractère de Hecke de E, vérifiant

$$\chi_0(z\bar{z}) = 1,\ \forall z \in \mathbb{A}_E^*, \qquad \text{et} \qquad \chi_{0,\infty}(z_\infty) = z_\infty^k/|z_\infty|^k,\ k \text{ est un entier impair positif}$$

Par la première hypothèse, sa fonction L complète $L(\chi_0, s)$ a pour équation fonctionnelle ([Tate] 3.6.8 et 3.6.1)

$$L(\chi_0, s) = \varepsilon(\chi_0, s)L(\chi_0, 1-s),\ \ \varepsilon(\chi_0, 1/2) = \pm 1$$

On utilisera de plus le caractère algébrique $\chi := \chi_0|.|^{1/2}$, dont on note χ_v la composante locale en une place v de E. On a $\chi^\perp = \chi|.|^{-1}$, et si ∞ désigne $E \subset \mathbb{C}$, $\chi_\infty(z) = z^{(k+1)/2}\bar{z}^{(1-k)/2}$. On notera $\mathrm{cond}(\chi_0)$ le conducteur de χ_0, qui est aussi celui de χ, et $\mathrm{disc}(E)$ le discriminant de E.

Dans les sous-parties qui suivent, nous décrivons, suivant Rogawski, les composantes locales du A-paquet endoscopique non tempéré $\Pi(\chi, 1)$.

4.2. Composantes locales en p décomposé.

4.2.1. Soit $p = v_1v_2$ un nombre premier décomposé dans E, la donnée des v_i nous fournit un isomorphisme $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_3(E_{v_i}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Il faut noter que ces deux isomorphismes diffèrent d'un automorphisme extérieur de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Fixons celui avec v_1 par exemple.

4.2.2. Soit $P = MN$ le parabolique standard de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de type $(2,1)$, considérons le caractère complexe lisse λ_p de $M = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ défini par $\lambda_p(x,y) = \chi_{0,v_1}(\det(x))$. L'induite parabolique normalisée de λ_p est irréductible ([Rog2] p.196), on la note $\pi_p^n(\chi_0)$.

4.2.3. Si χ est non ramifié en p (décomposé), $\pi_p^n(\chi_0)$ est non ramifiée, et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal. On en choisit un, noté K_p, égal à $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Z}_p)$ pour p assez grand ([Ti, 3.9.1]).

4.3. Composantes locales en p inerte ou ramifiée.

4.3.1. Suivant Rogawski ([Rog2] p. 396), définissons pour p un nombre premier inerte ou ramifié dans F, une représentation lisse irréductible $\pi_p^n(\chi_0)$ de $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ de la manière suivante :

On voit $\chi_{0,p}$ comme caractère du tore diagonal de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_{0,p}(\alpha)$$

L'induite parabolique normalisée de χ_p a deux facteurs de Jordan-Hölder, dont l'un est non tempéré, on le note $\pi_p^n(\chi_0)$ ([Roglivre] p. 173, [KE] p. 126)

4.3.2. Si p est inerte et χ non ramifié en p, $\pi_p^n(\chi_0)$ est non ramifiée et a donc un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal hyperspécial. Là encore, on en choisit un K_p, que l'on prend égal à $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Z}_p)$ quand on le peut (pour presque tout p, cf. [Ti, 3.9.1])

4.3.3. Si p est ramifié, le groupe $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ est un groupe unitaire ramifié et n'a donc pas de compact maximal hyperspécial, mais l'une des deux classes de conjugaison de compacts maximaux est *très spéciale* au sens de [La, page 88]. Si χ est non ramifié en p, la représentation $\pi_p^n(\chi_0)$ admet un vecteur fixe par n'importe quel compact maximal très spécial d'après [La, prop 3.6.2]. On en choisit un que l'on note K_p.

4.4. **Composantes locales à l'infini.** Tout L-paramètre "relevant" de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})$ a sa restriction à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$ de la forme :

$$z \mapsto (z/\bar{z})^{a_1} \oplus (z/\bar{z})^{a_2} \oplus (z/\bar{z})^{a_3}, \quad a_1 > a_2 > a_3 \in \mathbb{Z}^3$$

Si $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \in \mathbb{Z}^3$, On note $\pi_{1,\infty}(k_1, k_2, k_3)$ la représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})$ sur $V_{k_1,k_2,k_3}(\mathbb{C})$ (2), déduite de l'inclusion $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R}) \subset \mathrm{U}(3)(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ donnée par $E \subset \mathbb{C}$. Son L-paramètre a pour changement de base à $\mathbb{C}^*$ le morphisme plus haut avec $(a_1, a_2, a_3) := (k_1 + 1, k_2, k_2 - 1)$ ([Rog1] §3.1).

4.5. **Existence de $\pi(\chi_0)$.**

Proposition 4.1. *Supposons que $k > 1$, et que $\varepsilon(\chi_0, 1/2) = -1$, alors il existe une unique représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ de $U(3)$ dont le changement de base à E a pour L-paramètre le morphisme $W_E \to GL_3(\mathbb{C})$ défini par*

$$\begin{pmatrix} \chi_0|.|^{-1/2} & & \\ & 1 & \\ & & \chi_0|.|^{1/2} \end{pmatrix}$$

et telle que
- *Pour toute place v, $\pi(\chi_0)_v = \pi_v^n(\chi_0)$,*
- $\pi(\chi_0)_\infty = \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$.

Preuve : D'après [Rog2], page 397, le A-paquet $\Pi(\chi, 1)$ existe pour U(3), car $k > 1$. D'après [Rog2], page 395 et 396, les A-paquets locaux correspondants sont les singletons $\{\pi_p^n(\chi_0)\}$ quand p est décomposé (cf. 4.2.2) et des paires $\{\pi_p^n(\chi_0), \pi_p^s(\chi_0)\}$ quand p est inerte ou ramifié (où π_p^n a été définie en 4.3.1). Enfin, d'après [Rog2] page 397, le A-paquet local à l'infini est un singleton $\{\pi(\chi_0)_\infty\}$ avec $\pi(\chi_0)_\infty := \pi_{1,\infty}(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1)$.

Considérons la représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$:

$$\pi(\chi_0) = (\bigotimes_{p \text{ premier}} \pi_p^n(\chi_0)) \otimes \pi(\chi_0)_\infty.$$

D'après [Rog2], théorème 1.2, la multiplicité de π dans le spectre automorphe de U(3) est $(1 + \varepsilon(\chi_0, 1/2)(-1)^N)/2$, où N, défini dans [Roglivre] page 243, est le nombre de places à l'infini de $\mathbb{Q}$ où U(3) est compact ; on a donc $N = 1$, et la multiplicité de $\pi(\chi_0)$ est donc 1. □

4.6. **Types.**

Proposition 4.2. *Pour p un nombre premier divisant $disc(\chi_0)$, il existe un groupe $K_J = K_J(p)$ de $U(3)(\mathbb{Q}_p)$, et une représentation irréductible $J = J(p)$ de K_J tels que*

- *$Hom_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det)) \neq 0$.*
- *Pour toute représentation lisse irréductible π de $U(3)(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant $Hom_{K_J}(J, \pi) \neq 0$, pour toute place v de E au-dessus de p, notant π_{E_v} le changement de base de π à E_v, il existe trois caractères lisses non ramifiés ϕ_1, ϕ_2, $\phi_3 : {E_v}^* \to \mathbb{C}^*$, tels que*

$$L(\pi_{E,v}) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3 \chi_0^{-1}.$$

En particulier, si $l \neq p$, $I' := \ker(\chi_l)_{|I_v}$, et si π est la composante en p d'une représentation automorphe irréductible π' de $U(3)$, alors $\rho_l(\pi')(I') = 1$.

Preuve : Supposons d'abord que $p = v_1 v_2$ est décomposé dans E. On note $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ (l'isomorphisme dépendant de la place v_1, comme en 4.2.1), P le parabolique standard de type $(2,1)$, $M = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ son Levi (comme en 4.2.2), N son radical unipotent, $\chi_0 = \chi_{0,v_1}$ et m la p-valuation du conducteur de χ_0.

Notons K_J le sous-groupe de G des matrices dont la réduction modulo p^m est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix},$$

et notons J le caractère complexe lisse de ce groupe qui à une matrice comme ci-dessus associe $\chi_0(y)^{-1}$.

Par définition (cf. 4.2.2 pour la définition de λ_p), $\pi_p^n(\chi_0) \otimes \chi_0^{-1} \circ \det$ est la représentation de G sur l'espace

$$V := \{f : \ G \to \mathbb{C}, \ f \text{ lisse}, \ \forall b \in P, \forall g \in G, \quad f(bg) = \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))f(g)\}$$

donnée par $(g.f)(x) = f(xg)$. Définissons $f : G \to \mathbb{C}$ par

$$\begin{aligned} f(bk) &= \lambda_p(b)\delta_P^{1/2}(b)\chi_0^{-1}(\det(b))\chi_0(k) \ \ \forall b \in P, \ k \in K_J, \\ f(g) &= 0 \quad \forall g \in G \backslash P K_J \end{aligned}$$

On vérifie aisément que f est bien définie, et qu'elle définit un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi_p^n(\chi_0) \otimes (\chi_0^{-1} \circ \det))$.

Inversement, soit π une représentation lisse irréductible de G, et supposons que

$$\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0.$$

Notons $B_J \subset K_J$ l'ensemble des matrices de K_J qui sont triangulaires supérieures modulo p. On a alors $B_J \cap M = B \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ ou B est le sous-groupe d'Iwahori standard (constitué des matrices triangulaires supérieures modulo p) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La restriction de J à $B_J \cap M$ étant simplement le caractère χ_0^{-1} sur le second facteur $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$, le couple $(B_J \cap M, J_{|B_J \cap M})$ est un $\mathfrak{s}_M$-type de B_J, où $\mathfrak{s}_M \in \mathcal{B}(M)$ (le spectre de Bernstein de M, cf. [Bus, page 772]) est la classe d'équivalence inertielle de (T, χ_0^{-1}), T désigne le tore maximal standard de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et χ_0^{-1} le caractère de T envoyant $\mathrm{diag}(x,y,z)$ sur $\chi_0^{-1}(z)$.

Il résulte immédiatement de la définition de *recouvrement (cover)* ([Bus-Kut1, 8.1]) que $(B_J, J_{|B_J})$ est un G-recouvrement de $(B_J \cap M, J_{|B_J \cap M})$. Le corollaire [Bus-Kut1, 8.4] (ou bien [Bus-Kut2, page 55]) assure alors que $(B_J, J_{|B_J})$ est un $\mathfrak{s}$-type pour G, où $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)$ est la classe d'équivalence inertielle de (T, χ_0^{-1}). Comme π contient (K_J, J), elle contient aussi (B_J, J), est son support cuspidale est donc de la forme $(\phi_1, \phi_2, \chi_0^{-1}\phi_3)$, où les ϕ_i sont des caractères lisses non ramifiés de $\mathbb{Q}_p^*$. Autrement dit, d'après les propriétés de la correspondance de Langlands locale, $L(\pi)$ a pour semi-simplification $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$. Nous voulons maintenant montrer que $L(\pi)$ est semi-simple. Comme $\chi_0^{-1}\phi_3$ est ramifié, mais pas ϕ_1 et ϕ_2, on peut en tous cas écrire $L(\pi) = r \oplus \chi_0^{-1}\phi_3$, où $r^{ss} = \chi_1 \oplus \chi_2$, et nous voulons montrer que r est semi-simple.

D'après ce qui précède et les propriétés de L, il existe une représentation lisse irréductible (ρ, W) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de support cuspidal (ϕ_1, ϕ_2) telle que

$$\pi \simeq \mathrm{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1})), \;\; L(\rho) = r$$

où $\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1})$ désigne la représentation du parabolique standard sur W qui à $(x, y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M$ associe $\phi_3(y)\chi_0(y)^{-1}\rho(x) \in \mathrm{End}(W)$. L'espace de cette induite est l'ensemble des fonctions $f : G \to W$, lisses, vérifiant $\forall m = (x, y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = M, \forall u \in N, \forall g \in G$,

$$f(mug) = \delta_P^{1/2}(m)\chi_0^{-1}(y)\phi_3(y)\rho(x)f(g). \tag{4}$$

Comme $\mathrm{Hom}_{K_J}(J, \pi) \neq 0$, il existe une fonction non nulle $f : G \to W$ dans l'espace de $\mathrm{Ind}_P(\rho \otimes (\phi_3\chi_0^{-1}))$ qui vérifie

$$(k.f)(g) = f(gk) = f(g)J_K(k) = f(g)\chi_0(k)^{-1}. \tag{5}$$

Choisissons $v = f(g) \in W$ non nul. Combinant les équations 4 et 5, il vient

$$\forall x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), \rho(x)v = v.$$

La représentation ρ est donc non ramifiée si bien que $r = L(\rho)$ est semi-simple, et finalement $L(\pi) = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3\chi_0^{-1}$.

Le "en particulier" découle alors de la proposition 3.2

Le cas où p est inerte ou ramifié dans E est plus simple, grâce aux travaux de L.Blasko ([Blas]) : $\pi_p^n(\chi_0)$ appartient à la série principale, et son type défini en [Blas, partie 7, page 181] fait l'affaire. □

5. I-invariants et algèbre d'Atkin-Lehner

5.1. **Notations.**

5.1.1. Dans toute cette section, p est un nombre premier fixé. T désigne le tore diagonale de $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, B son Borel supérieur, $K := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $W \simeq \mathfrak{S}_n \subset K$, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori composé des éléments triangulaires supérieurs modulo p, Δ le sous-groupe de T des éléments à coefficients dans $p^{\mathbb{Z}}$, Δ^+ le sous-monoïde de Δ des éléments de la forme $\mathrm{diag}(p^{a_1}, \cdots, p^{a_n})$ avec $a_1 \leq \cdots \leq a_n \in \mathbb{Z}$. Si X est un groupe topologique localement compact, δ_X désigne le caractère module de X.

5.1.2. Si U est un sous-groupe compact ouvert de G, l'algèbre de Hecke de G relativement à U, $\mathcal{C}^\infty(U\backslash G/U)$, est l'algèbre de convolution des fonctions complexes lisses à support compact sur G invariantes à droite et à gauche par U. Si $g \in G$, on note $[UgU] \in \mathcal{C}^\infty(U\backslash G/U)$ la fonction caractéristique de de $UgU \subset G$, on prend la convention que $[U]^2 = [U]$. $\mathcal{C}^\infty(I\backslash G/I)$ est l'algèbre de Hecke-Iwahori, on note $\mathcal{A}(p)$ son sous-anneau engendré par $\mathbb{Z}[1/p]$ et les fonctions caractéristiques $[IuI]$, $u \in \Delta^+$. Il est connu (par exemple [Rog3] §1) que $\mathcal{A}(p)$ est commutative, et que pour chaque $u, u' \in \Delta^+$, $[IuI]$ est inversible dans $\mathcal{A}(p)$, $[IuI][Iu'I] = [Iuu'I]$ et $IuIu'I = Iuu'I$. On pose

$$u_i := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p, \ldots, p) \in \Delta^+, \text{ où } p \text{ apparaît } i \text{ fois, } 0 \leq i \leq n$$

5.2. *I*-invariants des représentations non ramifiées.

5.2.1. Soit $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n) : (\mathbb{Q}_p^*)^n \to \mathbb{C}^*$ un caractère lisse et non ramifié, $X(\psi)$ la représentation complexe lisse irréductible non ramifiée de G de L-paramètre valant sur le Frobénius géométrique :

$$\begin{pmatrix} \psi_1(p) & & \\ & \cdots & \\ & & \psi_n(p) \end{pmatrix}$$

Voyant ψ comme un caractère complexe lisse de B trivial sur les unipotents supérieurs, on pose

$$\mathrm{Ind}_B(\psi) := \{f : G \to \mathbb{C}, \text{ lisses}, f(bg) = \delta_B^{1/2}(b)\psi(b)f(g)\ \forall b \in B\}$$

vue comme représentation lisse de G par translation à droite les fonctions. On sait alors que $X(\psi)$ est l'unique sous-quotient irréductible non ramifié de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$. Le caractère de l'algèbre de Hecke non-ramifiée de G sur la droite des K-invariants de $X(\psi)$ (ou encore de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$, ce qui est la même chose) est bien connu : si $t_{p,i}$ est la valeur propre de l'opérateur de Hecke $T_{p,i} := [Ku_iK]|\det(u_i)|^{(n-1)/2}$ comme plus haut, on a

$$\prod_{i=0}^{n}(1 - \psi_i(p)T) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i p^{i(i-1)/2} t_{p,i} T^i$$

5.2.2. Nous allons commencer par décrire la représentation de $\mathcal{A}(p)$ sur les I-invariants de $\mathrm{Ind}_B(\psi)$. On verra les caractères de T par restriction comme des caractères de Δ^+, puis de $\mathcal{A}(p)$. Pour tout caractère $\theta : T \to \mathbb{C}^*$, $\sigma \in W$, on dispose d'un caractère θ^σ défini par $\theta^\sigma(t) = \theta(\sigma^{-1}t\sigma)$; ainsi $(\psi_1, ..., \psi_n)^\sigma = (\psi_{\sigma(1)}, ..., \psi_{\sigma(n)})$.

Lemme 5.1. *(*[Che] *4.8.4) La semi-simplification de $Ind_B(\psi)^I$ comme $\mathcal{A}(p)$-module est*

$$\oplus_{\sigma \in W} \delta_B^{1/2} \psi^\sigma$$

Remarques : Le calcul ci-dessus et la formule pour le polynôme de Hecke de X montrent que si $\sigma \in W$, $\psi^\sigma(U_i)$ (noter la disparition du $\delta_B^{1/2}$) est un produit de i valeurs propres

"distinctes" du Frobénius géométrique dans la représentation de $W_{\mathbb{Q}_p}$ attachée à X par la correspondance de Langlands locale non ramifiée.

En particulier, supposons $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ irréductible, alors $\mathrm{Ind}_B(\psi) = X(\psi)$, $\dim_{\mathbb{C}}(X(\psi)^I) = n!$ et l'action de $\mathcal{A}(p)$ sur les I-invariants de X est calculée par le lemme. Ceci se produit en particulier quand ψ est essentiellement tempérée (i.e $|\psi_i(p)|$ indépendant de i, [Z] 4.2) mais pas pour la représentation $\pi_p^n(\chi_0)$ introduite en §4.2.2 (p décomposé dans E et ne divisant pas $\mathrm{cond}(\chi_0)$). Pour traiter ce cas là, nous aurons besoin du résultat général suivant, impliquant par ailleurs le lemme précédent.

5.2.3. Soit $P = MN \subset B$ un parabolique de Levi M, $\psi : M \to \mathbb{C}^*$ un caractère non ramifié, $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ l'induite parabolique lisse normalisée :

$$\mathrm{Ind}_P(\psi) := \{f : G \to \mathbb{C}, \text{lisses}, f(pg) = \delta_P^{1/2}(p)\psi(p)f(g)\ \forall p \in B\}$$

Soit $W_P \subset W$ le sous-groupe de Coxeter correspondant à $P \subset G$, pour chaque $\sigma \in W$ on choisit l'unique élément dans $W_P.\sigma$ de longueur minimale ([Hum] prop. 1.10 c)), et on note $W(P)$ l'ensemble des représentants de $W_P\backslash W$ obtenu. On pose $z := \delta_P/\delta_B = \delta_{B\cap M}$.

Lemme 5.2. *La semi-simplification de $Ind_P(\psi)^I$ comme $\mathcal{A}(p)$-module est*

$$\oplus_{\sigma\in W(P)}\delta_B^{1/2}(z^{1/2}\psi)^\sigma$$

Remarques : Le lemme montre que l'unique sous-quotient non ramifié de $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ est isomorphe à $X(\psi.z^{1/2})$. Si $\mathrm{Ind}_P(\psi)$ est irréductible (voir [Z] 3.2,4.2), il coïncide donc avec $X(\psi.z^{1/2})$ dans ce cas.

Preuve : On pose $X' = \mathrm{Ind}_P(\psi)^I$, c'est un module sous l'algèbre de Hecke-Iwahori de G, en particulier sous $\mathcal{A}(p)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori $G = \coprod_{\sigma\in W(P)} P\sigma I$ montre que $\dim_{\mathbb{C}}(X') = |W|/|W_P|$. On considère la $\mathbb{C}$-base de X' suivante : si $\sigma \in W(P)$, e_σ est l'élément de X' nul hors de $P\,\sigma\, I$ et tel que $e_\sigma(\sigma) = 1$. $e_\sigma(\sigma') = 0$ ou 1 selon que $\sigma' \in W_P.\sigma$ ou non . Si $\sigma' \in W$, on commence par calculer $[I\sigma' I](e_1)$. La décomposition de Bruhat-Iwahori, ainsi que la multiplication des cellules, montre que $(I\sigma' I)\cap(\sigma^{-1}PI) = \emptyset$ à moins que $\sigma \in W_P\sigma'^{-1}$. En particulier, $[I\sigma' I](e_1) = a_{\sigma'}e_{\sigma'^{-1}}$ où $a_{\sigma'} \in \mathbb{C}^*$ (car $[I\sigma' I]$ est inversible dans l'algèbre de Hecke-Iwahori).

La décomposition de Bruhat-Iwahori montre que si $u \in \Delta^+$, $(IuI)\cap\sigma^{-1}PI$ est vide à moins que $\sigma \in W_P$, ce qui implique que e_1 est propre sous l'action de $\mathcal{A}(p)$, de caractère $[IuI] \mapsto (\delta^{1/2}\psi)(u)|(IuI \cap PI)/I|$. Quand $u_i = u$, on peut calculer $|(IuI \cap PI)/I| = |(I^u \cap PI)/(I^u \cap I)|$, $I^u := u^{-1}Iu$, on vérifie qu'il vaut $z^{1/2}(u)$.

Par les relations de Bernstein ([Rog3] §1, §5), on en déduit que si l'on ordonne la base des e_σ, $\sigma \in W(P)$, par ordre croissant avec la longueur de σ, l'action de $\mathcal{A}(p)$ est triangulaire supérieure. Toujours par les relations de Bernstein, on trouve alors les caractères de l'énoncé (voir par exemple [Che] §4.8.4 pour des détails supplémentaires ; remarquer que ce qui est noté u_i *loc.cit.* est noté u_{n-i+1} ici). □

5.2.4. L'exemple qui nous intéresse est le cas de la représentation non ramifiée $X(\psi) := \pi_p^n(\chi_0)$ définie en 4.2.2, $\pi_p^n(\chi_0)$ est l'induite du parabolique standard P de type $(2,1)$ du caractère $\chi_0(\det(.)) \times 1$. On trouve $W(P) = \{1, (3,2), (3,2,1)\}$. Si $\sigma \in W(P)$, le triplet $(\psi^\sigma(u_1), \psi^\sigma(u_2/u_1), \psi^\sigma(u_3/u_2))$ associé à σ est alors explicitement donné par :

$$\sigma = 1,\ (1, \chi_{v_1}^{\perp}(p), \chi_{v_1}(p))$$

$$\sigma = (3,2),\ (\chi_{v_1}^{\perp}(p), 1, \chi_{v_1}(p))$$

$$\sigma = (3,2,1),\ (\chi_{v_1}^{\perp}(p), \chi_{v_1}(p), 1)$$

6. Déformations des représentations cristallines raffinées

6.1. **Raffinement d'une représentation cristalline.**

6.1.1. Soit F un corps local, V un F-espace vectoriel de dimension finie muni d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Nous supposerons que V est cristalline, que ses poids de Hodge-Tate $k_1 < ... < k_n$ sont tous distincts et que les valeurs propres du Frobénius de $D_{cris}(V)$ sont dans F (cf. 2.6 pour les conventions). Imitant Mazur ([Ma]), on appellera *raffinement* de V la donnée d'un ordre $\mathcal{R} := (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in F^n$ sur les valeurs propres du Frobénius de $D_{cris}(V)$. On notera $(V, \mathcal{R})$ la représentation V munie de son raffinement $\mathcal{R}$.

6.1.2. La donnée d'un raffinement $\mathcal{R}$ de V nous permet de définir des $F_i(\mathcal{R}) := \varphi_i/p^{k_i} \in F^*$ et des $U_i(\mathcal{R}) := \prod_{j=1}^{i} F_j$, $1 \leq i \leq n$. La donnée de tous les $F_i(\mathcal{R})$, ou encore celle des $U_i(\mathcal{R})$, est bien sur équivalente à celle de $\mathcal{R}$. Notons que $F_i(\mathcal{R})$ est encore une valeur propre du Frobénius de $D_{cris}(V(k_i))$, et $U_i(\mathcal{R})$ en est une de celui de $\Lambda^i(D_{cris}(V)) \simeq D_{cris}(\Lambda^i(V))$. On rappelle que la formation de D_{cris} commute aux opérations tensorielles sur les représentations cristallines ([Fo2] 1.5.2, 5.1.2).

6.1.3. *Remarques :* i) Si le polynôme caractéristique du Frobénius de $D_{cris}(V)$ a $n = \dim_F(V)$ racines distinctes, alors V admet exactement $n!$ raffinements. C'est la cas par exemple si V est ordinaire (cf. [PR]). Dans ce cas, on dispose de plus d'un raffinement canonique donné par $|\varphi_i| = p^{-k_i}$, appelé raffinement "ordinaire" (il ne nous sera pas utile dans la suite).

ii) Un des intérêts essentiels de la notion de raffinement dans ce texte vient de ce que la théorie des familles p-adiques de formes automorphes produit des déformations de représentations cristallines raffinées de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Il faut bien noter que de telles déformations d'une même représentation V mais partant de raffinements distincts sont en général très différentes (par exemple l'une peut être génériquement irréductible, l'autre non).

6.2. **Raffinements et algèbre d'Atkin-Lehner.**

6.2.1. Par commodité d'exposition, nous nous restreignons à U(3) plutôt qu'à un groupe unitaire quelconque, c'est de toutes façons suffisant pour les objectifs de ce texte. Soit p un nombre premier décomposé dans E, $\iota : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un isomorphisme de corps, v_1 la place de E au dessus de p donnée par $E \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \overline{\mathbb{Q}}_p$, v_2 l'autre place, $p = v_1 v_2$. La donnée de v_1 nous permet de plus d'identifier $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ comme en 4.2.2. Fixons Π une représentation automorphe irréductible de U(3) telle que Π_p est non ramifiée et $\Pi_\infty = \pi(k_1 \geq k_2 \geq k_3)$. Comme dans 5.2.1, $\Pi_p = X(\psi)$ pour un certain caractère non ramifié $\psi : T \to \mathbb{C}^*$.

6.2.2. On a vu dans 3.2.2 que la donnée de ι permet d'associer à Π une représentation semi-simple continue $\rho_p : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(F) = \mathrm{GL}_F(V)$, V étant un espace vectoriel de dimension 3 sur un certain corps local F. On rappelle que D_{v_i} est un groupe de décomposition dans $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ associé à la place v_i de E, et on note V_i la représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ sur V obtenue par restriction de V à D_{v_i}. Puisque $\rho_p^\perp \simeq \rho_p$, on sait que $V_2 \simeq V_1^\perp$. De plus, par la proposition 3.3 §3.2, V_1 est cristalline de poids de Hodge-Tate $-k_1 - 1 < -k_2 < -k_3 + 1$, et son Frobénius cristallin a même polynôme caractéristique (modulo ι) que l'image du Frobénius géométrique de $W_{\mathbb{Q}_p}^{nr}$ dans le L-paramètre de $X(\psi)$, i.e $\prod_{i=1}^3 (X - \iota(\psi_i(p)))$. Nous allons donner une interprétation automorphe de certains raffinements de V_1 en terme de Π_p.

6.2.3. La semi-simplification de $\mathcal{A}(p)$ agissant sur Π_p^I a été calculée en 5.2.2, c'est une somme de caractères de $\mathcal{A}(p)$ de la forme $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$, pour certains $\sigma \in W$. On dira que σ est *accessible* pour Π si $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$ apparaît, cela ne dépend que de Π_p, et il est équivalent de demander qu'il existe un vecteur $v \in \Pi^I$ sur lequel $\mathcal{A}(p)$ agisse par $\delta_B^{1/2}\psi^\sigma$. Pour tout $\sigma \in W$, le lemme 5.1 §5.2.2 montre que l'on construit un raffinement $\mathcal{R}(\sigma)$ de V_1 en posant

$$\mathcal{R}(\sigma) := (\psi_{\sigma(3)}(p), \psi_{\sigma(2)}(p), \psi_{\sigma(1)}(p))$$

Un raffinement de V_1 sera dit *accessible* s'il est de la forme $\mathcal{R}(\sigma)$ avec σ accessible pour Π. Si Π_p est irréductible, on a vu en 5.1 que tous les raffinements de V_1 sont alors accessibles. Cela se produit en particulier quand Π_p est tempérée. Par contre, si $\Pi = \pi(\chi_0)$, les raffinements accessibles sont ceux donnés dans 5.2.4. Dans ce cas précis, on remarque par exemple que V_1 est ordinaire mais que le raffinement ordinaire n'est pas accessible.

6.2.4. Soit $s = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, notons ν_s le caractère $\Delta \to p^{\mathbb{Z}}$ sur le vecteur de plus haut poids de $V_s^*(\mathbb{Q}) = V_{-s}(\mathbb{Q})$. D'après 6.2.2 et 2.3, si $1 \leq i \leq 3$, $(\delta_B^{-1/2}\nu_s)(u_i/u_{i-1})$ est une puissance de p d'exposant le i^{ieme} poids de Hodge-Tate (rangés par ordre croissant) de V_1. On pose

$$U_i^s := \frac{[Iu_iI]}{\nu_s(u_i)} \in \mathcal{A}(p)$$

Avec ces notations, $\mathcal{R}(\sigma)$ est encore le raffinement de V_1 défini par ses $U_i(\mathcal{R}(\sigma))$ avec la formule $U_i(\mathcal{R}(\sigma)) := (\delta_B^{1/2}\psi^\sigma)(U_i^s)$.

6.3. **Variation de représentations cristallines raffinées, d'après M.Kisin.**

6.3.1. Soit $F \subset \mathbb{C}_p$ un corps local, X un F-affinoide réduit d'anneau $A(X)$, la norme réduite de $A(X)$ en fait une algèbre de Banach. Soit $M := A(X)^n$, G un groupe topologique, $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(M)$ une représentation continue. Si $F \subset E \subset \mathbb{C}_p$ est un sous-corps complet, $x \in X(E)$, on note $M_x := M \otimes_{A(X)} E$, $A(X) \to E$ étant l'évaluation en x, et $\rho_x : G \to \mathrm{GL}_n(E) = \mathrm{GL}_E(M_x)$.

6.3.2. Soit X un F-affinoide réduit d'anneau $A(X)$, on se donne

- a) $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_n) : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, un F-morphisme analytique,
- b) $Z \subset X(F)$ un sous-ensemble Zariski-dense tel que $\kappa(Z) \subset \mathbb{Z}^{n,--}$.
- c) $M := A(X)^n$, et $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{GL}_{A(X)}(M)$ une représentation continue,
- d) $F_1, ..., F_n \in A(X)$,

On suppose de plus que :

i) Pour tout réel $C > 0$, $\{z \in Z,\ -\delta(\kappa(z)) > C\}$ est Zariski-dense dans $X(F)$,

ii) Pour tout $x \in X(F)$, $\kappa(x) \in F^n$ est l'ensemble des poids de Hodge-Tate-Sen de M_z, rangés par ordre croissant si $x \in Z$,

iii) Pour tout $z \in Z$, M_z est cristalline,

iv) Si $z \in Z$, $(p^{\kappa_1(z)}F_1(z), ..., p^{\kappa_n(z)}F_n(z))$ est un raffinement de M_z,

v) $|F_i|$ est constant sur X,

vi) Deux éléments de $\kappa(Z)$ diffèrent d'un élément de $(p-1)\mathbb{Z}^n$.

Faisons quelques remarques sur ces hypothèses. L'existence de κ satisfaisant *ii)* n'est pas directement conséquence des travaux de Sen ([Sen1], [Sen2]), à cause de l'hypothèse "rangés par ordre croissant sur Z". Nous ne savons pas dans quelle mesure l'existence de F_i satisfaisant iv) est automatique (condition sur κ ?), cf. [Ki] à ce sujet. Nous ne savons pas non plus si vi) est automatique. Dans la pratique (cf. §8), ces hypothèses seront satisfaites et κ sera un morphisme fini sur son image, dominant restreint à chaque composante irréductible de X.

6.3.3. On se place sous les hypothèses a), b), c), ii), iii) et iv) de 6.3.2. On notera $A(X)(\kappa_i)$ le $A(X)$-module $A(X)$ sur lequel on fait agir continument $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ par le composé du caractère cyclotomique par caractère suivant de $\mathbb{Z}_p^*$:

$$x \to (x/\tau(x))^{\kappa_i}\tau(x)^{n_i} \in A(X)^*$$

où $n_i = \kappa_i(z)$ est un entier bien défini modulo $(p-1)\mathbb{Z}$ indépendamment de $z \in Z$ par l'hypothèse *vi)*, $\tau : \mathbb{Z}_p^* \to \mu_{p-1}(\mathbb{Q}_p)$ la réduction modulo p composée par le caractère de Teichmüller. Si $z \in Z$, $A(X)(\kappa_i)_z$ est un caractère cristallin de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

Si N est un $A(X)$-module de libre type fini muni d'une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on notera $N(\kappa_i) := N \otimes_{A(X)} A(X)(\kappa_i)$ vue comme représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On a donc défini les $M(\kappa_i)$, leurs évaluations en $z \in Z$ sont cristallines de poids $(\kappa_1(z) - \kappa_i(z), ..., \kappa_n(z) - \kappa_i(z)) \in \mathbb{Z}^{n,--}$.

6.3.4. On se place dans les hypothèses de 6.3.2 :

Proposition 6.1. *Soit $x \in X(F)$, $\kappa(x) = (k_1, ..., k_n)$ alors*

$$D_{cris}((\Lambda^i V_x)(k_1 + ... + k_i))^{\varphi = F_1(x) \cdots F_i(x)} \quad \textit{est non nul.}$$

Si de plus les k_i sont entiers, alors

$$D_{cris}(\Lambda^i(V_x))^{\varphi = \prod_{j=1}^i p^{k_j} F_j(x)} \quad \textit{est non nul}$$

Preuve : La seconde assertion découle de la première. Soit $i \in \{1, ..., n\}$ fixé, on pose $N := \Lambda^i(M)(\kappa_1) \cdots (\kappa_i)$. Rappelons que, comme dit plus haut (6.1.2), la formation de $D_{cris}(V)$ commute aux opérations tensorielles sur la catégorie des représentations cristallines. En particulier, si $x \in Z$, on en déduit que N_x est cristalline, de plus petit poids de Hodge-Tate égal à 0, et que $\prod_{j=1} F_j(x)$ est une racine de son Frobénius cristallin. Remplaçant κ par $(\kappa_{J_1}, ..., \kappa_{J_r})$, les J_j parcourant l'ensemble ordonné lexicographiquement des $r = \binom{n}{i}$ parties à i éléments de $\{1, ..., n\}$, $\kappa_{(m_1 \leq ... \leq m_i)} := \sum_{j=1}^i \kappa_{m_j}$, les conditions $i)$, $ii)$, $iii)$, $iv)$ et $v)$ sont satisfaites pour N à la place de M.

En fait, seule la première valeur propre va servir pour la suite. On est ramené à prouver la proposition pour M et $i = 1$, et on peut supposer que le premier poids de Hodge-Tate des points dans Z est nul.

A partir de là, on suit Kisin [Ki] 6.3. Par l'hypothèse $iv)$ et 5.14 il suffit donc de vérifier les hypothèses de sa proposition 5.13. Dans ses notations $M := M$, $I := Z$, et si $z \in X(F)$ est d'idéal maximal m_z, $R_z := A/m_z = F$. Pour chaque entier positif k, on définit I_k comme étant l'ensemble des points dans Z ayant leur second poids de Hodge-Tate plus grand que k, et tels que $v(F_1(x)) < k$. I_k est Zariski-dense dans $X(\mathbb{C}_p)$ par $i)$, il satisfait donc les conditions 2 et 3 de *loc. cit.* 5.13. Soit $x \in I_k$. D'après la fin du paragraphe précédent, M_x a pour plus petit poids de Hodge-Tate 0. De plus, d'après l'hypothèse iv), $D_{cris}(M_x)^{\varphi = F_1(x)}$ est non nul, il existe donc une application $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariante non nulle $M_x^* \to (\mathrm{Fil}^0(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)^{\varphi = F_1(x)}$ Cette application ne se factorise pas par $Fil^k(B_{cris}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ car par faible-admissibilité de $D_{cris}(M_x)$, $Fil^k(D_{cris}(M_x))^{\varphi = F_1(x)}$ est encore faiblement admissible, de plus petit poids de Hodge-Tate k, mais $v(F_1(x)) < k$ par hypothèse. On conclut mot à mot comme dans les 3 dernières lignes de la preuve de *loc. cit.* 6.4. □

Remarques : i) En général, il est bien sur faux que sous les hypothèses de la proposition 6.1, $D_{cris}(V(k_i))^{\varphi = F_i(x)}$ est non nul si $i > 1$. La considération d'une famille p-adique de formes modulaires passant par une forme modulaire parabolique propre de niveau $\Gamma_0(p)$ qui est p-nouvelle en donne un contre-exemple.

ii) Ce que l'on a fait pour les Λ^i vaut de même aussi naturellement pour n'importe quel foncteur de Schur de $\mathrm{GL}(n)$, c'est en fait une conséquence de la proposition ci-dessus.

iii) Si $n = 3$, l'isomorphisme canonique $V^* \otimes \det(V) \simeq \Lambda^2(V)$ permet de reformuler la proposition pour $i = 2$ en terme de V^*. Elle montre alors que $D_{cris}(V(k_1))^{\varphi=F_1(x)}$ et $D_{cris}(V^*(-k_3))^{\varphi=F_3(x)^{-1}}$ sont non nuls.

7. Extensions et pseudo-représentations

7.1. **Existences de réseaux stables.**

7.1.1. Soit K un corps de caractéristique 0, $V = K^r$, G un groupe, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation semi-simple. Soit $(\rho = \oplus_{i=1}^n \rho_i, V = \oplus_{i=1}^n W_i)$ la décomposition isotypique de (ρ, V) : pour chaque i, (W_i, ρ_i) est somme directe de n_i copies d'une représentation irréductible (V_i, ρ_i'), et $\rho_i' \not\simeq \rho_j'$ si $i \neq j$.

On dira que V satisfait la condition (ABS) si les ρ_i' sont *absolument* irréductibles.

On suppose dès maintenant et dans tout §7.1 que V satisfait (ABS). On fixe de plus A un sous-anneau intègre noethérien de K tel que $K = \mathrm{Frac}(A)$ et $\mathrm{tr}(\rho(G)) \subset A$.

7.1.2. Si B est un sous-anneau de K, on appelle B-réseau de V un sous-B-module libre Λ tel que $K.\Lambda = V$. Si V est une représentation de G, on dit qu'un B-réseau est stable s'il est stable sous l'action de G.

Lemme 7.1. *i) L'image de $A[G]$ dans $End_K(V)$ est de type fini sur A.*

ii) Si A est normal, $tr(\rho_i'(G)) \subset A$.

iii) Si A est principal, V_i admet un A-réseau stable.

iv) Plus généralement, si $P \in Spec(A)$ tel que A_P est de valuation discrète, il existe $g \in A \backslash P$ tel que V_i admet un A_g-réseau stable.

v) Supposons de plus que A est soit une algèbre affinoide, soit local complet, G un groupe topologique, si $T : G \to A$ est continue, alors les $g \to tr(\rho_i'(g))$ sont continus. De plus, tout A-réseau stable est une représentation continue de G.

Preuve : Par la théorie des modules semi-simples, l'image de $K[G]$ dans $\mathrm{End}(V)$ est somme directe de ses images dans les $\mathrm{End}(W_i)$. De plus, l'image de $K[G]$ dans $\mathrm{End}(W_i)$ est l'action diagonale de $\mathrm{End}(V_i)$ dans $\mathrm{End}(W_i)$. En particulier, on dispose d'un $e_i \in K[G]$ tel que $\rho(e_i)$ est le projecteur G-équivariant sur W_i. Aussi,

$$\exists f \in K^*,\ \forall g \in G,\ \mathrm{tr}(\rho_i(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e_i g)) \in fA$$

On déduit la même assertion pour ρ_i', en remplaçant f par f/n_i.

Soit i fixé, $d = \dim(V_i)$, on fixe une base de V_i nous permettant de l'identifier à K^d. La représentation ρ_i' étant absolument irréductible, un théorème de Wedderburn assure l'existence de $g_1, ..., g_{d^2} \in G$, tels que les $\rho_i'(g_k)$ engendrent $\mathrm{End}(V_i)$ comme K-espace vectoriel. Ainsi,

$$M := ((\mathrm{tr}(\rho_i'(g_k g_l)))_{1 \leq k,l \leq d^2}) \in \mathrm{GL}_{d^2}(K)$$

Soit $f' \in K^*$ tel que M^{-1} et les $\rho_i'(g_k)$ soient à coefficients dans $f'A$, alors pour tout $g \in G$ on a $\rho_i'(g) \in ff'/n_i M_d(A)$. Autrement dit,

$$A^d \subset \rho_i'(G).A^d \subset ff'/n_i A^d \tag{6}$$

En particulier, $A[\rho_i'(G)]$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_A(A^d, (ff'/n_i)A^d)$. Comme A est noethérien, cela prouve i). De plus, si A est principal, (6) montre que $A[\rho_i'(G)].A^d$ est un réseau stable, cela montre iii). On en déduit ii) car un anneau normal est intersection d'anneaux de valuation discrète. iv) est une conséquence de ii) et i).

La première assertion de v) découle de $n_i \mathrm{tr}(\rho_i'(g)) = \mathrm{tr}(\rho(e_i g))$, prouvons la seconde. Si Λ est un réseau stable de V, il suffit de vérifier que $\psi : G \to \mathrm{End}_A(\Lambda)$ est continue, car alors $g \mapsto \psi(g)^{-1} = \psi(g^{-1})$ le sera aussi. On rappelle que si A est affinoide ([BGR] 3.7.3) ou local complet, tout A-module de type fini a une topologie canonique et que toute application A-linéaire entre deux tels modules est continue et fermée. Par i), on peut trouver $g_1, ..., g_s \in G$ engendrant $M := A[\rho(G)]$, on munit M de la topologie discutée ci-dessus. Il suffit de montrer que $\psi^* : G \to M$ est continue. Par semi-simplicité de V comme G-représentation, l'application $\psi^{**} : G \to A^s$, $g \to (\mathrm{tr}(g_i g))$, induit une injection A-linéaire $M \to A^s$, nécessairement continue et fermée. La continuité de ψ^{**} conclut. □

7.2. **Représentations attachées aux pseudo-caractères.**

7.2.1. Soit G un groupe, A un anneau commutatif, on rappelle qu'une fonction $T : G \longrightarrow A$ est un pseudo-caractère sur G, de dimension $n \in \mathbb{N}$, à coefficients dans A si

$$\forall g, h \in G,\ \ T(gh) = T(hg)$$

$$\forall g = (g_1, ..., g_{n+1}) \in G^{n+1},\ \sum_{\sigma = c_1 ... c_r \in \mathfrak{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{r} f(c_i(g)) = 0$$

n est le plus petit entier ayant la propriété ci-dessus

Ici $\sigma = c_1 ... c_r$ est la décomposition en cycles de σ, et si $c = (j_1, ..., j_s)$ est un cycle $c(g) = \prod_{i=1}^{s} g_{j_i}$, cf. [Tay] §1, [Rou] §2.

La trace d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(A)$ est en particulier un pseudo-caractère sur G, à coefficients dans A (cf. *loc. cit.*) ; il est de dimension n si A est intègre de caractéristique 0 (cf. [Rou] 2.4). On discute de l'assertion réciproque dans les paragraphes qui suivent.

7.2.2. Si $A = F$ est un corps, il est connu que quitte à faire une extension séparable finie de F, T est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(F)$, unique à isomorphisme près, satisfaisant la propriété (ABS) de 7.1.1 (voir [Tay] §1 théorème 1, [Rou] 4.2 dans cette généralité). On dira que T est absolument irréductible si cette représentation l'est.

Soient F un corps, $B \subset F$ un sous-anneau, $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ une représentation de G, on suppose de plus que $\mathrm{tr}(\rho(G)) \subset B$, la discussion ci-dessus implique immédiatement le :

Corollaire 7.1. *Sous ces hypothèses, si m est un idéal maximal de B de corps résiduel k de caractéristique 0, alors la réduction modulo m de $tr(\rho)$ est la trace d'une représentation semi-simple*

$$\rho_m^{ss} : G \to GL_n(\overline{k})$$

ρ_m^{ss} est unique à isomorphisme près, définie sur une extension finie de k.

Notons qu'il est clair que si $\rho(G) \subset \mathrm{GL}_n(B)$, cela a un sens de réduire ρ modulo m, et qu'alors ρ_m^{ss} est la semi-simplification de cette réduction. Dans le cas où $B = A(X)$ est une algèbre affinoide, $x \in X$, m l'idéal maximal de B défini par x, on notera aussi ρ_x^{ss} pour ρ_m^{ss}.

7.2.3. Supposons A quelconque, mais que pour tout $m \in \mathrm{Specmax}(A)$, la réduction modulo m de T, $T_m : G \to A/m$ est absolument irréductible. Quitte à remplacer A par une extension étale finie, il est encore vrai que T est la trace d'une unique représentation $G \to \mathrm{GL}_n(A)$ ([Rou] 5.1).

Supposons finalement que A est intègre, que $T : G \to Frac(A)$ déduit de T soit absolument irréductible, mais que les T_m ne sont pas tous absolument irréductibles. On ne peut plus alors attacher canoniquement de représentation à T mais, au moins sous certaines hypothèses développées plus bas, un ensemble de représentations non toutes isomorphes en général. Pour nos applications, le cas intéressant sera celui où A est une algèbre affinoide intègre de dimension 1.

Lemme 7.2. *Soient F un corps local, X un F-affinoide intègre de dimension 1, et $T : G \to A(X)$ un pseudo-caractère de dimension n, il existe :*

i) Un F-affinoide Y régulier intègre, de dimension 1, fini et surjectif sur X,

ii) Une représentation semi-simple $\rho_{K(Y)} : G \to GL_n(K(Y))$ de trace T, satisfaisant (ABS).

Preuve : En considérant la composée $T : G \to A(X) \to K(X)$, §7.2.2 assure que T est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(L)$ satisfaisant (ABS) (cf. 7.1.1), pour une extension finie $L/K(X)$. Soit A' la normalisation de A dans L, c'est un anneau de Dedekind car A est intègre noethérien de dimension 1. D'après [BGR] 6.1.2, proposition 4, A' est une F-algèbre affinoide finie sur A, on l'écrit $A(Y)$, en particulier $L = K(Y)$. Ceci prouve i) et ii). □

7.2.4. Soit Y un F-affinoide intègre de dimension 1, $y \in Y(F)$ un point régulier, G un groupe et $T : G \to A(Y)$ un pseudo-caractère qui est la trace d'une représentation semi-simple $G \to \mathrm{GL}_n(K(Y))$ satisfaisant (ABS). D'après 7.1 iv), $K(Y)^n$ a un $A(Y)_g$ réseau stable Λ_0, pour $g \in A(Y)$ ne s'annulant pas en y.

On note $\mathcal{O}$ l'anneau local rigide de $A(Y)$ en y, c'est un anneau de valuation discrète (voir [BGR] 7.3.2 proposition 8), on pose $L := \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$. $\mathcal{O}\Lambda_0$ est un $\mathcal{O}$-réseau de $L^n := K(Y) \otimes_{K(Y)} L^n$ stable par G. On supposera que l'anneau local algébrique en y est principal d'idéal maximal engendré par $z \in A(Y)$, on peut toujours faire cette hypothèse quitte à rétrécir Y.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts affinoides de Y contenant y, Λ_i un $A(\Omega)_i$-réseau stable de L^n pour $i = 1, 2$. On dira que Λ_1 et Λ_2 sont équivalents s'il existe $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ un ouvert affinoide de Y contenant x tel qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$z^r A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2 \subset L^n$$

On note S' l'ensemble des classes pour cette relation d'équivalence, $[\Lambda_i] \in S$ la classe du $A(\Omega_i)$-réseau stable Λ_i.

Lemme 7.3. – *S et S' sont non vides,*
– *L'application $S' \longrightarrow S$, $[\Lambda] \mapsto [\mathcal{O}\Lambda]$ est une bijection,*
– *Si $s = [\Lambda] \in S'$, les représentations de G sur les F-espaces vectoriels $\Lambda/z\Lambda$ et $(\mathcal{O}\Lambda)/z(\mathcal{O}\Lambda)$ sont isomorphes.*

Cette dernière classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de Λ tel que $s = [\Lambda]$, on l'appelle la représentation résiduelle de s.

Preuve : On a déjà montré le premier point. L'application de l'énoncé est clairement bien définie. Montrons l'injectivité. Avec les notations du paragraphe ci-dessus, supposons que $\mathcal{O}\Lambda_1 = z^p\mathcal{O}\Lambda_2, p \in \mathbb{N}$. On peut supposer $p = 0$. Si $e_1^i, ..., e_n^i$ une $A(\Omega_i)$-base de Λ_i, on note $M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ la matrice des e^1 dans la base des e^2. On peut trouver $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ un affinoide de Y contenant x tel que $M \in \mathrm{GL}_n(A(\Omega_3))$. Alors $A(\Omega_3)\Lambda_1 = A(\Omega_3)\Lambda_2$.

Pour la surjectivité, considérons Λ un $\mathcal{O}$-réseau stable par G quelconque dans L^n. On sait que l'image C de $A(Y)[G]$ dans $\mathrm{End}_{K(Y)}(K(Y)^n) \subset \mathrm{End}_L L^n$ est de type fini sur $A(Y)$ par le lemme 7.1 i). C est de plus trivialement un sous-$A(Y)$-module de $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\Lambda)$. On choisit m_1,...,m_r une famille $A(Y)$-génératrice de C, ainsi que e_1,...,e_n une $\mathcal{O}$-base du $\mathcal{O}$-réseau Λ. On peut trouver un voisinage affinoide Ω de x dans Y tel que l'ensemble de tous les m_i soient à coefficients dans $A(\Omega)$ dans la base des e_i. $\oplus_{i=1}^n A(\Omega)e_i$ est alors $A(\Omega)$-réseau stable de L^n qui convient.

Les autres assertions sont immédiates. □

On rappelle que pour tout affinoide Y réduit, $A(Y)$ est canoniquement normé par sa norme du sup. Conservant les hypothèses de tout ce paragraphe, supposant de plus que G est un groupe topologique et que $T : G \to A(Y)$ est continue, alors pour tout $A(\Omega)$-réseau stable comme plus haut, le lemme 7.1 v) montre que la représentation déduite $G \to \mathrm{GL}_n(A(\Omega))$ est continue. En corollaire du lemme 7.3, on obtient alors le

Corollaire 7.2. *Si $T : G \to A(Y)$ est continue, alors pour tout $\mathcal{O}$-réseau stable Λ de L^n, la représentation résiduelle de G sur $\Lambda/z\Lambda$ est continue.*

7.3. **Variante d'un lemme de Ribet.** Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, m un idéal maximal de A, et $k = A/m$. Soit G un groupe, τ un automorphisme de K. Pour ρ une représentation de G sur un espace V de dimension finie sur K, et Λ un A-réseau stable (dans la suite nous dirons simplement un *réseau stable*), on note $\bar{\rho}_\Lambda$ la représentation sur $\Lambda/m\Lambda \simeq k^n$. Par le théorème de Brauer-Nesbitt ([CR, 30.16]), $\bar{\rho}_\Lambda^{ss}$ ne dépend pas du réseau stable Λ (s'il en existe un), on la note $\bar{\rho}^{ss}$. Pour ρ une représentation sur K ou k on note $\rho^\perp$ la représentation $g \mapsto \rho(\tau(g))^*$.

Proposition 7.1. *Soit ρ une représentation de G de dimension n sur K admettant un réseau stable. On suppose que $\rho \simeq \rho^\perp$ est absolument irréductible et que $\bar{\rho}^{ss} \simeq \phi \oplus \phi^\perp \oplus \psi$ où ϕ, $\phi^\perp$ et ψ sont trois représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.*

Alors :

a. Soit il existe un réseau stable Λ, tel que $\bar{\rho}_\Lambda$ admette un sous-quotient r de dimension 2, vérifiant $r \simeq r^\perp$ et tel que r est une extension non triviale de $\phi^\perp$ par ϕ.

b. Soit il existe un réseau stable Λ, tel que $\bar{\rho}_\Lambda \simeq \bar{\rho}_\Lambda^\perp$, $\bar{\rho}_\lambda$ admet une unique sous-représentation r de longueur 2 et un unique sous-quotient r' de longueur 2, avec r extension non triviale de ψ par ϕ, r' extension non triviale de $\phi^\perp$ par ψ, et $r' \simeq r^\perp$.

7.3.1. Pour prouver la proposition, notons d'abord qu'on peut supposer que A est un anneau de valuation discrète complet, ce que l'on fait. En effet, si A' est le complété de A en m, K' le corps des fractions de A', A' est de valuation discrète complet de corps résiduel k. L'extension ρ' de ρ à K' vérifie encore toutes les hypothèses du théorème. Si Λ' est un A'-réseau stable, $\Lambda = \Lambda' \cap V$ est un A-réseau stable de V, et $\rho_\Lambda \simeq \rho'_{\Lambda'}$, si bien que la conclusion du théorème pour K' entraîne la conclusion pour K.

7.3.2. Nous prouverons la proposition en utilisant le dictionnaire de [Bel2] et [Be-Gr]. Rappelons quelques notions et résultats utiles de ces articles, auquel nous renvoyons au lecteur pour de plus amples détails.

Soit $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-tits de $\mathrm{PGL}_n(K)$, X l'ensemble de ses sommets. Soit $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{X}$ fixe par $\rho(G)$, $S = \mathcal{S} \cap X$. D'après [Be-Gr, prop. 4.1.1] et [Bel2, prop. 2.4.1 et 3.3.2], $\mathcal{S}$ est contenue dans un sous-appartement $\mathcal{A}$ de dimension 2 (car $\bar{\rho}^{ss}$ est sans multiplicité, et a trois facteurs de Jordan-Hölder), clos ([Bel2, prop. 3.1.3]), borné (car ρ est irréductible, [Bel2, prop 3.2.1]), et les points de S (qui sont donc en nombre fini) correspondent aux classes d'homothéties de réseaux stables par ρ ([Bel2, prop. 3.1.2]). Pour $x \in S$ on note $\bar{\rho}_x$ une réduction $\bar{\rho}_\Lambda$ pour Λ un représentant de x, ce qui est bien définie à isomorphisme près.

L'ensemble $\mathcal{S}$ est un polygone dans le sous-appartement $\mathcal{A}$ (qui est un plan), dont les sommets sont des sommets de $\mathcal{A}$ et les côtés des réunions d'arêtes de $\mathcal{A}$ ([Be-Gr, 2.1]).

À $\mathcal{S}$ on peut attacher, comme en [Be-Gr, 2.1.2] un graphe orienté d'ensemble de sommets $\{\phi, \phi^\perp, \psi\}$, d'ensemble d'arêtes $A \subset (\{\phi, \phi^\perp, \psi\}^2 - \Delta)$ (Δ la diagonale) connexe en tant que graphe orienté, muni d'une bijection c de A sur les côtés de $\mathcal{S}$, vérifiant les propriétés suivantes

i) Pour tout arête $a = (u, v) \in A$ il existe une extension r_a non triviale de v par u, et pour $x \in c(a) \cap S$, r_a apparaît comme sous-quotient de $\bar{\rho}_x$. Réciproquement, si $x \in S$, et si $\bar{\rho}_x$ contient comme sous-quotient une extension triviale de v par u, alors x est sur $c(u, v)$. ([Be-Gr, prop. 4.2.1])

ii) Si a et a' sont deux arêtes de A non opposées l'une de l'autre, les côtés $c(a)$ et $c(a')$ du polygone $\mathcal{S}$ se coupent en un sommet. ([Be-Gr, prop. 2.2.4])

7.3.3. Par hypothèse, il existe un isomorphisme de K-espaces vectoriels ϕ de V dans V^* tel que

$$\forall g \in G,\ \rho(\tau(g)) = \varphi^{-1} \rho^*(g) \varphi. \tag{7}$$

Si Λ est un réseau de V, on note Λ^* le réseau dual dans V^*. L'application $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ passe au quotient et définit une bijection naturelle b entre l'ensemble des sommets de l'immeuble X de $\mathrm{PGL}(V)$ et celui de l'immeuble X^* de $\mathrm{PGL}(V^*)$, qui s'étend en un morphisme d'immeubles de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^*$. Il est clair que si $\mathcal{S}^*$ désigne la partie de $\mathcal{X}^*$

stable par ρ^*, on a

$$S^* = b(S).$$

Par ailleurs l'application φ induit un isomorphisme d'immeubles φ_* de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^*$. On déduit immédiatement de (7) que

$$\varphi_*(S) = S^*.$$

L'isomorphisme $t := b^{-1}\varphi_*$ de $\mathcal{X}$ laisse donc stables $\mathcal{S}$ et S. Si $x \in S$, φ induit par passage au quotient un isomorphsime

$$\bar{\rho}_x^{\perp} \simeq \bar{\rho}_{t(x)}. \tag{8}$$

7.3.4. Terminons la preuve. Comme le graphe (V, A) est connexe en tant que graphe orienté, il y a un chemin qui va de ϕ à $\phi^{\perp}$. Il y a donc deux possibilités :

Soit $(\phi, \phi^{\perp}) \in A$, dans ce cas $c(\phi, \phi^{\perp})$ est un côté de $\mathcal{S}$, et pour $x \in c(\phi, \phi^{\perp}) \cap S$, $\bar{\rho}_x$ contient comme sous-quotient $r_{(\phi,\phi^{\perp})}$ qui est une extension non triviale de $\phi^{\perp}$ par ϕ. De plus, t envoie côté de $\mathcal{S}$ sur côté de $\mathcal{S}$, et par (8), les points x du côté $t(c(\phi, \phi^{\perp}))$ sont tels que ρ_x admette comme sous quotient $r^{\perp}_{\phi,\phi^{\perp}}$ qui est encore une extension non triviale de $\phi^{\perp}$ par ϕ. On en déduit d'après 7.3.2 i) que $t(c(\phi, \phi^{\perp})) = c(\phi, \phi^{\perp})$ et donc, d'après (8) que $r^{\perp}_{(\phi,\phi^{\perp})} \simeq r_{(\phi,\phi^{\perp})}$, ce qui montre qu'on est dans le cas a. de la proposition.

Soit (ϕ, ψ) et $(\psi, \phi^{\perp})$ sont des arêtes de A. Par 7.3.2 ii), $c(\phi, \psi)$ et $c(\psi, \phi^{\perp})$ se coupent en un sommet x. Par un raisonnement semblable à celui ci-dessus, $t(c(\phi, \psi)) = c(\psi, \phi^{\perp})$ et $t(c(\psi, \phi^{\perp})) = c(\psi, \phi)$, d'où $t(x) = x$. La réduction $\bar{\rho}_x$ vérifie donc $\bar{\rho}_x \simeq \bar{\rho}_x^{\perp}$, et on est dans le cas b. de la proposition.

8. Déformation p-adique de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^{\perp}$

8.1. **Notations pour les espaces de formes automorphes.**

8.1.1. On fixe encore $p = v_1 v_2$ décomposé dans E, N un entier premier à p, ainsi qu'un isomorphisme de corps $\iota : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

La donnée de v_1 nous permet d'identifier canoniquement $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ comme dans 4.2.1. Soit K_f un compact ouvert de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$, décomposé place par place, égal à un compact maximal hyperspécial aux places ne divisant pas $pN\mathrm{disc}(K)$, et à un compact très spécial aux places divisant $\mathrm{disc}(K)$ mais pas pN, et à l'Iwahori I de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ en p.

On fixe une représentation irréductible complexe lisse J de K_f définie sur $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, triviale restreinte aux places ne divisant pas N. J est de dimension finie, ι nous permet de la voir à coefficients dans un corps local fixé F_0 et de considérer $J(F)$ pour chaque $F_0 \subset F \subset \mathbb{C}_p$ comme étant une F-représentation lisse de K_f. On note $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions complexes lisses sur $\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$, vu comme représentation de $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A})$ par translation à droite.

8.1.2. Si $w = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, l'espace des formes automorphes pour U(3) de "poids automorphes" w et de type (K_f, J) est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$S_w(K_f, J, \mathbb{C}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})\times K_f}(V_w(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} J, \mathcal{B})$$

On note $\mathcal{H}$ l'anneau engendré par l'algèbre de Hecke globale (sur $\mathbb{Z}$) hors de pN et par l'algèbre d'Atkin-Lehner $\mathcal{A}(p)$ en p. $\mathcal{H}$ est commutatif, et on notera $\mathcal{H}_A := \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} A$, pour tout anneau A. $S_w(K_f, J, \mathbb{C})$ est de manière naturelle un module sur $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. Si V est un $A[(I\Delta^+ I)K_f]$-module, on notera $H^0(V)$ le $\mathcal{H}_A$-module des fonctions

$$\mathrm{U}(3)(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f) \to V, \text{ telles que } \forall x \in \mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f),\ \forall u \in K_f,\ u.f(xu) = f(x)$$

Notons que $H^0(V)$ dépend aussi de K_f, bien que la notation ne le laisse pas apparaître. C'est une vérification classique que la donnée de ι permet de voir $H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0))$ comme une F_0-structure de $S_w(K_f, J, \mathbb{C})$, et ce comme $\mathcal{H}_{F_0}$-module. On pose[7]

$$S_w^{cl} := H^0(V_{-w}(F_0) \otimes_{F_0} J^*(F_0))$$

8.1.3. Par la finitude du nombre de classes ([Bor] 5.1), $\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)$ s'écrit comme réunion finie

$$\mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f) = \coprod_{i=1}^{h} \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}) x_i K_f$$

de plus $\Gamma_i := x_i \mathrm{U}(3)(\mathbb{Q}) x_i^{-1} \cap K_f$ est un groupe fini car compact discret. Pour un $A[I\Delta^+ I, K_f]$-module V, l'application A-linéaire

$$\varphi_V : H^0(V) \to \oplus_{i=1}^{h} V^{\Gamma_i}, \quad f \to (f(x_1), ..., f(x_h))$$

est un isomorphisme A-linéaire fonctoriel en V. On déduit que sur les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, $V \mapsto H^0(V)$ est exact et commute à l'extension des scalaires en A.

Enfin, on en déduit aussi que S_w^{cl} est de dimension finie sur F_0. De plus, si V est normé par $|.|$ tel que K_f y agisse par automorphismes continus de norme 1, $H^0(V)$ est naturellement normé par

$$|f| := \mathrm{Sup}_{x \in \mathrm{U}(3)(\mathbb{A}_f)} |f(x)| = \mathrm{Sup}_{i=1}^{h} |f(x_i)|$$

8.2. **Familles p-adiques typées pour U(3).**

8.2.1. Soit $w = (k_1 \geq k_2 \geq k_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (\mathbb{Q}^{\geq 0})^3$, on note $S_w^{cl,\alpha}$ le plus grand sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module de $S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p$ sur lequel $U_i^w \in \mathcal{A}(p)$ (cf. 6.2.4), $1 \leq i \leq 3$, n'a que des valeurs propres de valuation α_i. On dira que w est α-régulier si $\delta(w) > \alpha_1 + \alpha_2 - 1$.

Si $r \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{C}_p^3$, on note $B(x, r)$ la boule fermée de $\mathbb{C}_p^3$ de centre x de rayon r.

[7] Noter le $-w$ dans la définition

8.2.2. Fixons $f \in S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p$ une forme propre pour $\mathcal{H}$.

Proposition 8.1. *Il existe un corps local F, $r \in |F| \cap [0,1[$, X un F-affinoide réduit, $\pi : X \to B(w,r)$ un F-morphisme fini, $a : \mathcal{H} \to A(X)^0$ et $x_f \in X(F)$ tels que :*

i) Si $1 \leq i \leq 3$, l'application

$$\pi^{-1}(\mathbb{Z}^3 \cap B(w,r)(F)) \longrightarrow \mathbb{Q}^{\geq 0}, \quad x \mapsto v(a(U_i^{\pi(x)})(x))$$

est constante, disons égale à α_i. On pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

ii) Si $w' \in B(w,r) \cap (w + (p-1)\mathbb{Z}^3)$ est α-régulier, l'application

$$X(\mathbb{C}_p) \longrightarrow Hom(\mathcal{H}, \mathbb{C}_p),\ x \mapsto (\chi_x : h \mapsto a(h)(x))$$

induit une bijection entre $\pi^{-1}(w')$ et l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}$ dans $S_{w'}^{cl,\alpha}$ comptés sans multiplicités.

iii) χ_{x_f} est le caractère de $\mathcal{H}$ sur f.

iv) L'image de $\mathcal{H}$ dans $A(X)^0$ est d'adhérence compacte.

v) La restriction de π a chaque composante irréductible de X est surjective sur $B(w,r)$. Cette propriété est de plus encore vérifiée pour le changement de base de π à tout fermé irréductible de $B(w,r)$.

vi) $\pi^{-1}(B(w,r)(\mathbb{Q}_p)) \subset X(F)$.

Preuve : C'est essentiellement une conséquence des techniques de [Che], à ceci près que nous expliquons ici comment gérer la présence du type J, et le fait que le niveau n'est pas nécessairement net (cf. 4.1. *loc. cit.*).

Soit $B := B(0,1)/\mathbb{Q}_p$ d'algèbre affinoide $A(B) := \mathbb{Q}_p < T_1, T_2, T_3 >$. On considère le $A(B)$-module de Banach orthonormalisable noté $S_{(\tau^{-k_3}, \tau^{-k_2}, \tau^{-k_1})}(1)$ dans [Che], §3.6. On le note ici M. C'est en particulier un $A(B)[I\Delta^+I]$-module (*loc. cit.* 3.6.2), I agissant par endomorphismes de norme 1. Nous ne prendrons pas exactement la même paramétrisation des poids que dans [Che] (voir *loc. cit.* §2.3), nous choisissons ici l'unique telle que les spécialisations $M_{w'}$ en $w' \in \mathbb{Z}^{3,+} \subset B(\mathbb{Q}_p)$ contiennent $V_{-w'}(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tau^{w'-w}$ comme représentation de I (cf. remarques 3.7.2, *loc. cit.* pour la notation τ^w). En particulier, M_w contient $V_{-w}(\mathbb{Q}_p)$ comme sous-représentation de $I\Delta^+I$.

On fixe une norme sur $J(F_0)$ et on définit le $A(B)$-module de Banach des formes p-adiques pour U(3), de type J, comme étant

$$S := H^0(M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))$$

L'application φ_S montre que $S \simeq (M \otimes_{\mathbb{Q}_p} J^*(F_0))^{\Gamma_i}$ est un $A(B)$-isomorphisme. S est donc un $A(B)$-module de Banach satisfaisant la condition (Pr) de [Bu] §2, on a donc bien une théorie des séries caractéristiques pour ses endomorphismes compacts (voir [Col] A, [Bu] §2).

Si U est l'opérateur de Hecke agissant sur S donné par la double classe $I\mathrm{diag}(1,p,p^2)I$, alors U est $A(B)$-linéaire compact ([Che] 3.6.2). Il faut remarquer de plus que si $w' \in$

$w+(p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$, $S_{w'} \supset S^{cl}_{w'}$, et $U_{|S^{cl}_{w'}}$ coïncide alors avec $U_1^w U_2^w U_3^w$. On pose

$$g(T) := \det(1 - TU_{|S}) \in 1 + TA(B)\{\{T\}\}$$

C'est une fonction analytique sur $B \times \mathbb{A}^1$.

On fixe $F \supset F_0$ un corps local contenant les valeurs propres λ_i des U_i^w sur f, on note $\alpha_i := v(\lambda_i)$, $\alpha_3 = 0$. Utilisant [Che] 5.4, il est aisé de voir que pour un certain $r \in [0,1[\cap|F|$, g se restreint en une fonction analytique sur $B(w,r) \times \mathbb{A}^1$ telle que :

- $g_{|A(B(w,r))} = PS$, avec $P \in 1 + TA(B(w,r))[T]$, $S \in 1 + TA(B(w,r))\{\{T\}\}$,
- $(P,S) = 1$ dans $A\{\{T\}\}$,
- $\forall x \in B(w,r)(F)$, P_x a toutes ses racines de valuation $-\alpha_1 - \alpha_2$, et S_x n'en a pas.

On applique à la donnée ci-dessus la construction des variétés de Hecke locales faite en §6.2 *loc. cit.* On découpe tout d'abord un sous-$\mathcal{H}_{B(w,r)}$-module N de $S_{B(w,r)}$, localement libre de rang fini sur $A(B(w,r))$, sur lequel $\det(1-TU) = P$. Quitte à diminuer r, on peut remplacer N par un facteur direct N' ayant la propriété que $\forall x \in B(w,r')(F)$, $\det(1 - T[I\mathrm{diag}(1,1,p)I]_{|N'_x})$ a exactement pour racines celles de $\det(1 - T[I\mathrm{diag}(1,1,p)I]_{|N_x})$ qui sont de valuation $-\alpha_1$. On définit alors X comme l'affinoide d'algèbre l'image de $\mathcal{H}_{B(w,r)}$ dans $\mathrm{End}_{A(B(w,r))}(N')$. Si X n'est pas réduit, on le remplace par sa nilréduction. On dispose alors de $X \to B(w,r)$, a et x_f comme dans l'énoncé de la proposition 8.1 satisfaisant i), ii) et iii). Il faut noter que la proposition de 4.7.1 *loc. cit.* ("classicité des formes de poids régulier") est encore vérifiée pour nos espaces de formes typées, la preuve étant rigoureusement analogue.

Quitte à remplacer F par une extension finie, vi) vient de ce qu'il n'existe qu'un nombre fini d'extensions de $\mathbb{Q}_p$ de degré donné. La première partie de la condition v) provient de 6.4.2. loc. cit. La seconde se ramène à la première en utilisant le lemme 6.2.5 *loc. cit.* (bien qu'il soit énoncé avec un idéal m maximal, une modification immédiate de sa preuve marche pour tout idéal m).

Enfin pour iv), on note que si $0 < r' < r \in |F|$, alors $B(w,r') \hookrightarrow B(w,r)$ est compacte sur les algèbres affinoides, ainsi donc que $A(X) \to A(X)\widehat{\otimes}_{A(B(w,r))}A(B(w,r'))$. On conclut car $a(\mathcal{H}) \subset A(X)^0$ et l'image d'un borné par une application compacte entre espaces de Banach sur un corps local est d'adhérence compacte. □

8.2.3. Un point de $X(F)$ sera dit *classique* si $\pi(x) \in w + (p-1)\mathbb{Z}^{3,+}$ et si le caractère χ_x de $\mathcal{H}$ qui lui correspond par le *ii)* de la proposition 8.1 est réalisé dans $S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$. Les points classiques sont Zariski-denses dans $X(\mathbb{C}_p)$ par v), *i*), *ii*) ci-dessus ainsi que le lemme 6.4.7 de [Che].

8.3. **Pseudo-caractères galoisiens.**

8.3.1. On se replace dans les hypothèses du paragraphe précédent. Fixons $x \in X(F)$ un point classique, et $f \in S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$ un vecteur de caractère χ_x sous $\mathcal{H}$. On peut considérer un constituant irréductible Π de la représentation automorphe de U(3) engendrée par f, Π_l est alors déterminée par χ pour tout l premier ne divisant pas N. En particulier,

la représentation galoisienne p-adique continue semi-simple associée à Π dans 3.2.2, que nous noterons disons $V(x)$, ne dépend que de x et pas du Π choisi, par le théorème de Cebotarev. Soit $T(x) : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to F$ la trace de cette représentation, elle est continue et la détermine. Si $l = v_1 v_2$ est un nombre premier totalement décomposé dans E comme en 4.2.1, ne divisant pas Np, alors d'après §3.2.2 3 et 5.2.1 on a les relations :

$$T(x)(\mathrm{Frob}_{v_1}) = l^{-1} a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1,1,l)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])(x) \quad (9)$$

$$T(x)(\mathrm{Frob}_{v_2}) = l^{-1} a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(l^{-1},1,1)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])(x) \quad (10)$$

Si $T : E \to A(X)$ est une application d'un ensemble E à valeur dans $A(X)$, $x \in X(F)$, on notera T_x la composition de T par l'évaluation en x. On renvoie en 7.2.1 pour les généralités sur les pseudo-caractères.

Corollaire 8.1. *Il existe un unique pseudo-caractère continu de dimension* 3,

$$T : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \to A(X)$$

tel que pour tout $x \in X(F)$ classique, $T_x = T(x)$. Il satisfait $\forall g \in G$, $T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$.

Preuve : On définit tout d'abord T sur certaines classes de conjugaisons de Frobénius. Soit $l = v_1 v_2$ un nombre premier totalement décomposé dans E comme en 4.2.1, on suppose que $(l, Np) = 1$, on pose alors

$$T(\mathrm{Frob}_{v_1}) := l^{-1} a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(1,1,l)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])(x)$$

$$T(\mathrm{Frob}_{v_2}) := l^{-1} a([\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)\mathrm{diag}(l^{-1},1,1)\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_l)])(x)$$

Pour assurer que T est bien définie, il faut vérifier que si deux classes de conjugaisons de Frobénius se rencontrent, T y prend les même valeures. X étant réduit, il suffit de le vérifier sur les points classiques $x \in X(F)$, qui sont Zariski-denses. C'est clair par la formule 9.

Par le théorème de Cebotarev, la condition *iv)* de 8.1, et la continuité de $T(x)$ si x est classique, il vient que T se prolonge d'une unique façon sur $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$ en une application continue K-valuée (voir [Che] §7.1 pour plus de détails). Le fait que c'est un pseudo-caractère, l'assertion d'unicité, ainsi que $T(\tau g \tau) = T(g^{-1})$, découlent par Zariski-densité (X étant réduit) en se ramenant aux résultats analogues pour les T_x avec x classiques qui sont connus. □

8.3.2. Nous aurons besoin d'un dernier fait :

Proposition 8.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X(F)$ classique, si $\delta(\pi(x)) > C$ alors $V(x)$ est cristalline. En particulier ces points sont Zariski-dense.*

Preuve : Soit $x \in X(F)$ classique, on choisit $f \in S^{cl}_{\pi(x)} \otimes_{F_0} F$ comme en §8.3.1, ainsi que Π. On sait que Π_p est engendrée par ses I-invariants, c'est donc un sous-quotient d'une induite complète du Borel $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ pour un certain ψ comme dans 5.2.1. Pour voir que $V(x)$ est cristalline il suffit de montrer que Π_p est non ramifiée d'après 3.3, ou mieux que $\mathrm{Ind}_B(\psi)$ est irréductible. Or on sait que ceci se produit dès que $\forall i \neq j,\ \psi_i(p)/\psi_j(p) \neq p$

([Z] 4.2). Il se trouve que si $\pi_i(x) = (k_1, k_2, k_3)$, $(a_1, a_2, a_3) := (-k_1 - 1, -k_2, -k_3 + 1)$ alors §6.2.4 montre que

$$p^{a_i}\iota(\psi_i(p)) = \frac{\chi_x(U_i^{\pi(x)})}{\chi_x(U_{i-1}^{\pi(x)})}$$

La proposition 8.1 i) conclut l'existence de C. La seconde assertion s'en déduit à la manière de 8.2.3 □

8.4. **Déformations de $\chi \oplus 1 \oplus \chi^\perp$.**

8.4.1. On reprend les notations de 8.2.1, avec $N := \mathrm{cond}(\chi_0)$, $K_f = \prod K_l$ où :

- Si est l premier à $p\mathrm{cond}(\chi_0)$, K_l est le sous-groupe défini en 4.2.3, 4.3.2, 4.3.3 selon que l est décomposé, inerte ou ramifié,
- Si l divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, K_l est le sous-groupe $K_J(l)$ défini en 4.2, $J := \otimes_{l|N}(J(l) \otimes \chi_0 \circ \det)$ où $J(l)$ est la représentation de $K_J(l)$ définie aussi en 4.2.

On reconsidère la représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ de U(3), et on fixe dans tout ce qui suit $\sigma \in \{1, (2,\,3), (1,\,3,\,2)\}$ accessible pour $\pi(\chi_0)$ (cf. §6.2.3). On pose $w := (\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}, 1) \in \mathbb{Z}^{3,+}$. On peut choisir un $f \neq 0 \in \pi(\chi_0)^I \cap (S_w^{cl} \otimes_{F_0} \overline{\mathbb{Q}}_p)$ propre pour $\mathcal{H}$, de caractère sous $\mathcal{A}(p)$ correspondant à σ comme dans 6.2.3. On applique alors 8.1 à ce f, puis 8.1 et 8.3.2 aux conclusions de 8.1, ce qui nous fournit un corps local F, un F-affinoide X, $x_f \in X(F)$, $B(w,r) \subset \mathbb{A}^3$, un morphisme F-affinoide fini $\pi : X \to B(w,r)$, un pseudo-caractère T, des F_i et $C > 0$ comme dans ces propositions.

8.4.2. Il sera commode de raisonner en terme des poids de Hodge-Tate des $V(x)$ plutôt que de leurs "poids automorphes" $\pi(x)$. On définit à cet effet (cf. §6.2.2) $\kappa : X \to B(\kappa(w), r)$ comme étant la composée de π avec $(x, y, z) \to (-x - 1, -y, -z + 1)$. Ainsi, si $x \in X(F)$ est classique, $V(x)$ est de Hodge-Tate de poids $\kappa(x)$. On pose

$$\kappa_0 := \kappa(w) = (-\frac{k+1}{2}, -\frac{k-1}{2}, 0)$$

8.4.3. Quitte à prendre une extension finie de F, comme le précisera sa preuve, on a la

Proposition 8.3. *Il existe :*

a) Un F-affinoide Y intègre régulier de dimension 1, $y_0 \in Y(F)$,

b) Une représentation continue semi-simple

$$\rho_{K(Y)} : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np} \to GL_3(K(Y))$$

satisfaisant (ABS), $\rho_{K(Y)}^\perp \simeq \rho_{K(Y)}$ et $tr(\rho_{K(Y)}(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E))) \subset A(Y)$,

c) Un F-morphisme

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) : Y \longrightarrow \mathbb{A}^3,\ \kappa_3 := 0,\ \kappa(y_0) = \kappa_0,$$

d) Une partie $Z \subset Y(F)$ telle que $\kappa(Z) \subset \kappa_0 + (p-1)\mathbb{Z}^{3,--}$,

e) Des fonctions F_1, F_2 et F_3 dans $A(Y)$, chacune de valuation constante sur $Y(\mathbb{C}_p)$,

le tout satisfaisant aux propriétés suivantes :

i) Pour tout ouvert affinoide Ω de Y contenant y, la fonction

$$x \in Z \mapsto -\delta(\kappa(x)) \in \mathbb{N}$$

est non majoré sur $Z \cap \Omega$, d'image incluse dans $\mathbb{N}^{\geq Max(C,k)}$. En particulier, $Z \cap \Omega$ est Zariski-dense dans Ω,

ii) Si $z \in Z \cup \{y_0\}$, $\rho_z^{ss} := \rho_{K(Y),z}^{ss}$ (cf. 7.1) est la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe Π irréductible de $U(3)$ telle que $Hom_{K_f}(J, \Pi) \neq 0$,

iii) $\rho_{y_0}^{ss} \simeq 1 \oplus \chi_p \oplus \chi_p^{\perp}$.

iv) Si $z \in Z \cup \{y_0\}$, $(\rho_z^{ss})_{|D_{v_1}}$ est cristalline de poids de Hodge-Tate $\kappa(z)$. Elle est raffinée par

$$(p^{\kappa_1(z)}F_1(z), p^{\kappa_2(z)}F_2(z), p^{\kappa_3(z)}F_3(z))$$

v) Ce raffinement est $\mathcal{R}(\sigma)$ en y_0.

Preuve : Soit $B \subset B(\kappa_0, r) \subset \mathbb{A}^3$, le fermé affinoide de $B(\kappa_0, r)$ défini par $x_3 = 0$, et $x_2 = 2x_1 + \frac{k-3}{2}$. $\kappa_0 \in B(F)$. On pose :

$$\mathcal{Z} := \{z \in B(F) \cap (\kappa_0 + (p-1)\mathbb{Z}^{3,--}),\ -\delta(z) > \mathrm{Max}(C, k, \alpha_1 + \alpha_2 - 1)\}$$

Le choix de B, assez arbitraire, est tel que les fonctions $x_2 - x_1$ et $-x_2$ sont non bornées sur $U \cap \mathcal{Z}$ pour tout U ouvert affinoide de B contenant κ_0.

On considère $X_B := X \times_{B(\kappa_0,r)} B$, c'est un F-affinoide de dimension 1, $x_f \in X_B(F)$. Le morphisme déduit par extension des scalaires $\kappa_B : X_B \to B$ est encore fini, surjectif restreint à chaque composante irréductible de X_B d'après 8.1 v). On choisit alors X' une composante irréductible (réduite) de dimension 1 de X_B contenant x_f.

Le pseudo-caractère T peut être vu à valeur dans $A(X')$, par composition $A(X) \to A(X_B) \to A(X')$, et on peut appliquer le lemme 7.2 à la donnée de $A(X')$ et T. Il nous fournit un F-affinoide intègre Y, régulier de dimension 1, muni d'un morphisme fini et surjectif $h : Y \to X'$, ainsi qu'une représentation semi-simple $\rho : G \to \mathrm{GL}_3(K(Y))$ de trace T, satisfaisant (ABS). Quitte à remplacer F par une extension finie, on peut choisir $y_0 \in Y(F)$ tel que $h(y_0) = x$. Notant que $T(g^{-1}) = T(\tau.g.\tau)$ d'après 8.1, on a prouvé a) et b).

On définit κ comme étant la composée $Y \stackrel{h}{\to} X' \hookrightarrow X_B \stackrel{\kappa_B}{\to} B$. Notons que $\kappa : Y \to B$ est plat, car c'est le cas des extensions finies d'anneaux de Dedekind. Cela prouve c). On pose $Z := \kappa^{-1}(\mathcal{Z})$, il satisfait d) par 8.4.2 et i) par choix de $\mathcal{Z}$ et platitude de κ. X' étant un fermé de X, on peut y restreindre les F_i de 8.4.1, et les définir sur Y en les composant au morphisme $h : Y \to X'$. Ce sont ces derniers que l'on choisit pour e), l'assertion sur les valuations des F_i est déjà satisfaite sur X par construction (cf. 8.1).

Soit $z \in Z \cup \{y_0\}$, $\rho_{K(Y),z}^{ss}$ est la représentation semi-simple de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$ de trace $T_z = T_{h(z)}$ (cf. 7.1, 8.1). Par choix de Z et 8.1 iii), $h(z) \in X(F)$ est un point classique, et l'assertion *ii*) découle donc de 8.3.1 et 8.1. On déduit alors iii) de ii), 8.1 iii) et du choix de f dans 8.4.1.

La première assertion de iv) est alors une conséquence de ii), 6.2.2, 8.4.2, ainsi que 8.3.2 et le fait que $-\delta(\kappa(z)) > C$ par i). La seconde assertion, ainsi que v), découlent de 6.2.3 et 6.1.2. □

Remarques : On rappelle que toute la construction ci-dessus dépend du choix initial du $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ accessible pour $\pi(\chi_0)$. Ceci fait, le second choix réellement effectué dans la construction ci-dessus est celui de la composante irréductible X' de X'_B passant par x_f. Il semble difficile d'évaluer le nombre de composantes irréductibles de X (ou de X_B) au voisinage de x. En ce qui concerne ce texte, chaque choix de composante permet de conclure dans la section 9.

9. Construction de l'extension

On reprend les notations de la proposition 8.3, où l'on a fixé $\sigma = (2,3)$.

9.1. **Irréductibilité générique.**

Proposition 9.1. *$\rho_{K(Y)}$ est absolument irréductible.*

Preuve : D'après 8.3 b), $\rho_{K(Y)}$ vérifie la propriété (ABS) (voir 7.1.1). Il suffit donc de montrer que $\rho_{K(Y)}$ est irréductible. Supposons par l'absurde que $\rho_{K(Y)} \simeq \rho_{1,K(Y)} \oplus \rho_{2,K(Y)}$, $\rho_{i,K(Y)}$ étant une $K(Y)$-représentation de G de dimension $\neq 0$. Le lemme 7.1 ii) montre que $\mathrm{tr}(\pi_i(G)) \subset A(Y)$, car $A(Y)$ est régulier d'après 8.3 a). Soit $z \in Z$, l'évaluation en z de $\mathrm{tr}(\rho(g))) = \mathrm{tr}(\rho_1(g)) + \mathrm{tr}(\rho_2(g)), g \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)_{Np}$ a un sens et montre que ρ_z^{ss} est réductible (cf. 7.1). Nous allons montrer que c'est absurde par notre choix du raffinement.

D'après 8.3 e), $v(F_i(.)) : X(F) \to \mathbb{Q}, x \mapsto v(F_i(x))$ est constante, on la note α_i. En évaluant en y_0, 8.3 iv), v) ainsi que 5.2.4 appliqué à $(3,\ 2)$ montrent que :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, \frac{k-1}{2}, -\frac{k+1}{2})$$

Notons qu'avec ce choix, $\forall i,j \in \{1,2,3\}$, $\alpha_i \neq 0$ et $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$. De plus, si $i \neq j$, $|\alpha_i| < k$ et $|\alpha_i + \alpha_j| < k$.

D'après 8.3 iv), ρ_z^{ss} est cristalline de poids de Hodge-Tate $k_i := \kappa_i(z)$, avec $k_1 < k_2 < k_3$, et les valeurs propres de son Frobénius cristallin ont pour valuation $k_1 + \alpha_1$, $k_2 + \alpha_2$ et $k_3 + \alpha_3$. Par le théorème A de [CF], pour voir que ρ_z^{ss} est irréductible, il suffit de voir que $D := D_{cris}(\rho_z^{ss})$ n'admet pas de sous-module filtré faiblement admissible. Si D' est un tel sous-module de rang 1, alors par faible admissibilité $t_H(D') = t_N(D')$ (cf. *loc. cit.*) entraîne $k_i = k_j + \alpha_j$ pour un couple (i,j). Mais par 8.3 i), $|k_i - k_j| > k$, les inégalités sur les α_i entraînent donc $i = j$ puis $\alpha_i = 0$, ce qui est absurde. De même, si D' est un sous-module filtré faiblement admissible de rang 2 de D, on arrive à une contradiction en résolvant $k_{i'} + k_{j'} = k_i + k_j + \alpha_i + \alpha_j$. □

Remarques : Une légère modification de la preuve montrerait qu'en fait $\rho_{K(Y)|D_{v_1}}$ est irréductible. Notons de plus que l'argument d'irréductibilité étant local en p, il n'utilise pas le fait que les représentations galoisiennes attachées aux représentations automorphes stables tempérées sont globalement irréductibles, mais simplement 3.3. Le point clé est

que nous disposons d'un σ accessible tel que le raffinement $\mathcal{R}(\sigma)$ est aussi éloigné que possible du raffinement ordinaire au point y_0.

9.2. **L'inertie aux places ne divisant pas p.**

9.2.1. Nous allons préciser l'action de l'inertie aux places de E ne divisant pas p. Pour énoncer commodément nos résultats, on introduit

$$\rho'_{K(Y)} := \rho_{K(Y)} \otimes_F (\chi_p^{\perp})^{-1}.$$

Proposition 9.2. *Soit w une place de E au-dessus de $l \neq p$. Alors*
- *Si w ne divise pas cond(χ_0), $\rho_{K(Y)}$ et $\rho'_{K(Y)}$ sont non ramifiées en w.*
- *Si w divise cond(χ_0), on a*

$$\dim_{K(Y)}(\rho'_{K(Y)})^{I_w} = 2.$$

Le reste de la sous-section est consacré a la preuve de cette proposition. D'après 8.3 a), b) et 7.1 iv) appliqué en l'idéal maximal de y_0, on peut trouver $g \in A(Y)$ avec $g(y_0) \neq 0$, tel que $\rho_{K(Y)}$ admette un $A(Y)_g$-réseau stable. On note ρ la représentation de G définie par ce réseau, S l'ensemble fini des zéros de g, et pour $y \in Y \backslash S$, ρ_y la réduction de ρ en y.

Remarquons que ρ_y est bien définie à isomorphisme près, et non plus seulement à semi-simplification près. De plus, $\rho_{K(Y)}$ étant semi-simple, ρ_z l'est aussi pour un sous-ensemble infini de $Z \cap (Y \backslash S)$, que l'on note Z'. Enfin, si $z \in Z'$, alors $\rho_z^{ss} \simeq \rho_z$ est par 8.3 ii) la représentation galoisienne attachée à une représentation automorphe notée $\Pi(z)$ de U(3), comme en 8.3.1.

9.2.2. *Le cas w ne divisant pas cond(χ_0).* Il suffit de montrer que les ρ_z sont non ramifiées pour $z \in Z'$. Par construction (cf. 8.4.1), $\Pi(z)$ a un vecteur fixe par le compact maximal K_l. Si l est non ramifié dans E, K_l est hyperspécial (4.2.3, 4.3.2) et $\Pi(z)$ est non ramifié, si bien que la représentation galoisienne ρ_z associée l'est aussi, d'apres la propriété 3 §3.2.2. Si l est ramifié, K_l est très spécial (4.3.3), si bien que d'après [La] p.88, le changement de base π_E est non ramifié, et on en déduit encore que ρ_z est non ramifiée, cette fois d'après la proposition 3.1.

9.2.3. *Le cas w divisant cond(χ_0).* Par construction (cf. 8.4.1), on a

$$\mathrm{Hom}_{K_J(l)}(J(l), (\Pi(z) \otimes (\chi_0 \circ \det)^{-1})_l) \neq 0$$

D'après 4.2, il existe un sous-groupe ouvert I'_w de I_w tel que pour tout $z \in Z'$ on a $\rho'_z(I'_w) = 1$. On en tire $\rho'_{K(Y)}(I'_w) = 1$.

Notons que pour démontrer la proposition, il suffit de le faire après une extension finie de $K(Y)$. Mais il existe une extension finie F'/F telle que la représentation $\rho'_{K(Y)_{|I_w}}$, qui se factorise par le groupe *fini* I_w/I'_w, soit définie sur F'. Autrement dit, si L est une extension composée de $K(Y)$ et F' et $\rho'_L := \rho'_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$, alors $\rho'_{L|I_w}$ est isomorphe à $\theta \otimes_{F'} L$, où θ est une représentation de I_w sur F' triviale sur I'_w. Comme θ est nécessairement semi-simple, on en déduit par évaluation des traces en y_0 que $(\rho'_{|I_w})^{ss}_{y_0} \simeq \theta$. En particulier, $\theta \simeq 1 \oplus 1 \oplus ((\chi_p^{\perp})^{-1})_{|I_w}$ d'après 8.3 point iii). La proposition en découle.

9.3. **Application des méthodes à la Ribet et Kisin.** Dans ce paragraphe on tire les fruits de la variante du lemme de Ribet démontré dans la proposition 7.1, et la proposition 6.1 "à la Kisin". Introduisons encore quelques notations : on pose

$$u := \chi^{\perp}(\mathrm{Frob}_{v_1})$$

Notons alors qu'on a $\chi(\mathrm{Frob}_{v_1}) = up^{-1}$. Notons D_{cris,v_1} le foncteur $D_{cris,v_1}(V) := D_{cris}(V_{|D_{v_1}})$, qui est exact à gauche. L'action du Frobenius cristallin φ sur les droites $D_{cris,v_1}(\chi_p^{\perp})$, $D_{cris,v_1}(\chi_p)$ et $D_{cris,v_1}(1)$ est la multiplication respectivement par u, up^{-1} et 1 (cf. §2.6). Ces trois nombres sont deux à deux distincts, puisque leur valuations (respectivement $-(k-1)/2$, $-(k+1)/2$ et 0) le sont.

Proposition 9.3. *Il existe une représentation continue $\bar{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to GL_3(F)$ vérifiant*

i. Pour toute place w de E ne divisant pas p on a

$$\dim_F(\bar{\rho} \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w} \geq 2 \text{ si } w|disc(\chi_0) \tag{11}$$

$$\dim_F(\bar{\rho} \otimes (\chi_p^{\perp})^{-1})^{I_w} = 3 \text{ si } w \not| disc(\chi_0) \tag{12}$$

ii. $D_{cris,v_1}(\bar{\rho})^{\phi=u}$ est non nul.

iii. On a $\bar{\rho}^{ss} \simeq \chi_p \oplus \chi_p^{\perp} \oplus 1$. Une des deux assertions suivantes est vraie :

a. Soit $\bar{\rho}$ admet un sous-quotient r de dimension 2, vérifiant $r \simeq r^{\perp}$ et tel que r est une extension non triviale de $\chi_p^{\perp}$ par χ_p.

b. Soit $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}^{\perp}$, $\bar{\rho}$ admet une unique sous-représentation r_1 de dimension 2 et un unique sous-quotient r_2 de dimension 2, avec r_1 extension non triviale de 1 par χ_p, r_2 extension non triviale de $\chi_p^{\perp}$ par 1, et $r_1 \simeq {r_2}^{\perp}$.

Preuve : Notons $\mathcal{O}$ l'anneau local rigide de Y en y_0, L le corps des fractions de cet anneau, et $\rho_L := \rho_{K(Y)} \otimes_{K(Y)} L$. L'anneau $\mathcal{O}$ est de valuation discrète, de corps résiduel F. Le représentation ρ_L est irréductible d'après la proposition 9.1

D'après la proposition 8.3 iii), $\overline{\rho_L}^{ss}$ est la somme de trois caractères, χ_p, $\chi_p^{\perp}$ et 1. Ces trois caractères sont deux à deux distincts (ils n'ont pas les mêmes poids) et on est donc en mesure d'appliquer la proposition 7.1 à ρ_L. Cette proposition affirme précisément l'existence d'un $\mathcal{O}$-réseau $\Lambda \subset L^3$ stable par ρ_L, tel que la représentation réduite associée $\bar{\rho} := \overline{\rho_L}_{\Lambda}$ vérifie soit la condition iii.a soit la condition iii.b de 9.3. $\mathcal{O}$ étant de valuation discrète, il résulte immédiatement de la proposition 9.2 que $\bar{\rho}$ vérifie la propriété ii.

Nous allons montrer que $\bar{\rho}$ vérifie ii. Le lemme 7.3 appliqué à ρ_L a y_0 et à la classe d'homothéties s du réseau Λ donne l'existence d'un ouvert affinoide $\Omega \subset Y$ contenant y_0, telle que la représentation ρ_L admet un $A(\Omega)$-réseau stable M ; notant ρ la représentation $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}(M)$, le lemme 7.3 assure que $\rho_{y_0} \simeq \bar{\rho}$. $\bar{\rho}$ est continue d'après le corollaire 7.2.

Nous allons maintenant appliquer la proposition 6.1 à la donnée de $\rho_{|D_{v_1}} : D_{v_1} \to \mathrm{GL}_3(A(\Omega))$, de $\kappa_{|\Omega}$ et des $F_{i|\Omega}$ (cf. §6.3.2). On choisit pour ensemble noté Z *loc. cit.* l'ensemble $Z \cap \Omega$ auquel on enlève le sous-ensemble des z tels que ρ_z n'est pas semi-simple. Ce dernier est fini car $\rho_{K(\Omega)}$ est semi-simple. La proposition 8.3 assure que les

hypothèses i) à vi) de 6.3.2 de la proposition 6.1 sont vérifiées, iii) par notre choix de Z. On voit donc que

$$D_{cris,v_1}(\rho_{y_0})^{\phi=F_1(y_0)\kappa_1(y_0)} \text{ est non nul,}$$

où κ_1 et F_1 sont ceux donnés par la proposition 8.3. D'après les points iv) et v) de 8.3, $p^{\kappa_1(y_0)}F_1(y_0)$ est la première valeur propre du raffinement $\mathcal{R}((3,2))$ de $\rho_{y_0|D_{v_1}}$, donc d'après 5.2.4, $p^{\kappa_1(y_0)}F(y_0) = \chi^\perp(p) = u$, ce qui prouve ii. □.

9.4. **Élimination du cas a.** Nous voulons montrer, par l'absurde, que l'on n'est pas dans le cas iii. a. de la proposition précédente. On se place donc dans ce cas. La représentation $\bar\rho$ admet comme sous-quotient une extension non triviale r de $\chi_p^\perp$ par χ_p. Par conséquent, $\bar\rho' := \bar\rho \otimes (\chi_p^\perp)^{-1}$ contient comme sous-quotient $r' := r \otimes (\chi_p^\perp)^{-1}$, extension non triviale de F (la représentation triviale sur F) par $F(1)$ (le caractère cyclotomique sur F).

Lemme 9.1. *La représentation r' est cristalline en v_1 et en v_2.*

Preuve : Il suffit de le prouver pour r, car $\chi_p^\perp$ est cristallin en v_1 et v_2, $\chi^\perp$ étant non ramifié en ces places. De plus, comme $r \simeq r^\perp$, il suffit de le prouver en v_1. Comme D_{cris,v_1} est exact à gauche, ainsi que le foncteur $V \mapsto D_{cris,v_1}(V)^{\phi=u}$, on voit que

$$\dim_F D_{cris,v_1}(\bar\rho)^{\phi=u} \leq \dim_F D_{cris,v_1}(r)^{\phi=u} + \dim_F D_{cris,v_1}(1)^{\phi=u}.$$

Comme $D_{cris,v_1}(1)^{\phi=u} = 0$ car $u \neq 1$, il résulte de 9.3 ii) que $D_{cris,v_1}(r)^{\phi=u}$ est non nul.

Utilisant encore que D_{cris,v_1} est exact à gauche il vient

$$D_{cris,v_1}(\chi_p) \subset D_{cris,v_1}(r)$$

et il y a donc dans $D_{cris,v_1}(r)$ deux droites sur lesquelles φ agit par u et par up^{-1} ce qui implique qu'elles sont distinctes. On en déduit que $\dim_F D_{cris,v_1}(r) = 2$, i.e. r est cristalline en v_1. □

Lemme 9.2. *La représentation r' est non ramifiée en toutes les places w ne divisant pas p.*

Preuve : Si w ne divise pas $\mathrm{cond}(\chi_0)$, $\bar\rho'$ est non ramifiée en w d'après ii., et r' non plus.

Si w divise $\mathrm{cond}(\chi_0)$, l'exactitude à gauche du foncteur des invariants sous I_w donne

$$\dim_F(\bar\rho')^{I_w} \leq \dim_F r'^{I_w} + \dim_F((\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w}$$

Comme $((\chi_p^\perp)^{-1})^{I_w} = 0$, il découle de i. que r' est non ramifié. □.

L'existence de r' est alors en contradiction avec le lemme bien connu suivant,

Lemme 9.3. *Soit E est un corps quadratique imaginaire, $F/\mathbb{Q}_p$ un corps local, alors il n'existe pas d'extension non triviale de représentations continues de* $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ *de F par $F(1)$ qui soit non ramifiée hors de p et cristalline en les places divisant p.*

Preuve : La théorie de Kummer entraine que la dimension sur F du groupe de ces extensions est égale au rang de $\mathcal{O}_E^*$ (voir par exemple [Rulivre], proposition 1.6.4). Ce dernier groupe est fini si E est quadratique imaginaire. □

Remarque 9.1. *Dans le lemme précédent, il est essentiel que les extensions considérées soient non ramifiées (resp. cristallines) à toutes les places. Si on relâche la condition à une place quelconque, de telles extensions non triviales existent. Par ailleurs il est essentiel que le corps de base E soit quadratique imaginaire. Pour tout autre corps, à part $\mathbb{Q}$, l'énoncé précédent serait mis en défaut : on construirait par la théorie de Kummer une extension non triviale, en partant d'une unité de E qui n'est pas racine de 1. En fait, l'énoncé précédent correspond, par les conjectures de Bloch-Kato, au fait que la fonction ζ du corps E ne s'annule pas en $s = 0$. Comme on le sait, ceci n'est vrai que pour E quadratique imaginaire ou $\mathbb{Q}$. C'est ici, et ici seulement à part la formule de multiplicité 4.1, que l'on utilise dans ce papier l'hypothèse que E est quadratique imaginaire. Tout le reste marcherait tout aussi bien en travaillant avec E/F extension CM, et le groupe unitaire $U(3)$ compact à toutes les places à l'infini sur F. Dans ce cadre, la preuve de 4.1 montre que l'analogue de la représentation automorphe $\pi(\chi_0)$ existe si et seulement si $\varepsilon = (-1)^{\dim_{\mathbb{Q}} F}$. En particulier, si $\dim F$ est pair, on peut avoir $L(\chi_0, 1/2) \neq 0$, et on ne s'attend alors pas à ce qu'une extension de 1 par χ_p cristalline existe. On voit que dans ce cas, c'est un élément non trivial de $H^1_f(E, \mathbb{Q}_p(1))$ qu'aurait construit notre méthode.*

9.5. **Fin de la preuve.** On est donc dans le cas b. de la proposition.

Lemme 9.4. *r_1 et r_2 sont cristallines en v_1 et en v_2.*

Preuve : Comme $r_1 \simeq r_2^{\perp}$, la cristallinité de r_1 en v_2 (resp. v_1) équivaut à celle de r_2 en v_1 (resp. v_2). Il suffit donc de prouver que r_1 et r_2 sont cristallines en v_1.

En ce qui concerne r_1, extension non triviale de 1 par χ_p, on observe que les poids de Hodge-Tate en v_1 de χ_p et 1 sont respectivement $-(k+1)/2$ et 0, avec $-(k+1)/2 \leq -2 = 0 - 2$. Une telle extension est automatiquement cristalline d'après [PR] proposition 3.1.

Considérons la représentation r_2, pour laquelle le même argument de poids ne marche plus. Cependant la cristallinité de r_2 en v_1 se montre exactement comme celle de r dans le lemme 9.1, à l'aide du point i. □.

La représentation r_1 fournit une extension de 1 par χ_p, non triviale, qui a bonne réduction aux deux places divisant p d'après le lemme précédent. Comme χ_p n'est pas le caractère cyclotomique, une telle extension a automatiquement bonne réduction (voir l'introduction) aux places ne divisant pas p : cf. par exemple [Rulivre, lemme 1.3.5]. Ceci prouve le théorème 1.1.

Joël Bellaïche : Institute for Advanced Studies
Einstein drive, Princeton, NJ 08540, États-unis
email : jbellaic@ias.edu

Gaëtan Chenevier : Département de mathématiques et applications, École normale supérieure

45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France
email : chenevie@ens.fr

Références

[AC] **J. Arthur & L. Clozel** *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*
Annals of math. studies **120** , Princeton university press

[AT] **E. Artin & J. Tate** *Class field theory*
Benjamin 1967

[Bel1] **J. Bellaïche** *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*
Thèse de l'université Paris 11, janvier 2002. Disponible sur http ://www.math.u-psud.fr/theses-orsay/2002/2395.html

[Bel2] **J. Bellaïche** *À propos d'un lemme de Ribet*
Preprint DMA, École normale supérieure, no. 02-17

[Be-Gr] **J. Bellaïche et P. Graftieaux** *À propos d'un lemme de Ribet II*
Preprint de l'universite de Nice

[Bla-Rog1] **D. Blasius et J.Rogawski** *Tate class and arithmetic quotient of two-ball*
[ZFPMS] pages 421–443

[Bla-Rog2] **D. Blasius et J. Rogawski** *Zeta functions of Shimura Varieties*
Motives [Mot], pages 525–571

[Bla-Rog3] **D. Blasius et J. Rogawski** *Motives for Hilbert modular forms*
Inventiones mathematicae **114**, pages 55–87 (1993)

[Blas] **L. Blasko** *Description du dual admissible de* $\mathrm{U}(2,1)(F)$ *par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko*
Manuscripta Math. **107**, no. 2, pages 151–186 (2002)

[Bor] **A. Borel** *Some finiteness properties of adele groups over number fields*
IHES Publ.math. **16**, pages 5–30 (1963)

[BGR] **S. Bosch , U. Guntzer & R. Remmert** *Non archimedian analysis*
Grundlehren der math. **261** (1982)

[Bus] **C. Bushnell** *Smooth representations of p-adic group*
ICM 1996, pages 770–779

[Bus-Kut1] **C. Bushnell & P. Kutzko** *Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types*
Proc. Lond. Math. Soc (3) **77**, pages 582–634 (1997)

[Bus-Kut2] **C. Bushnell & P. Kutzko** *Semi-simple types*
Compositio mathematica **119**, pages 53–117 (1999)

[Bu] **K.Buzzard** *Eigenvarieties*
Non publié.

[Che] **G. Chenevier** *Familles p-adiques de formes automorphes pour* $GL(n)$
Soumis, disponible sur http ://www.dma.ens.fr/ chenevie/

[Clo] **L. Clozel** *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* $GL(n)$
Publ. math. IHES **73**, pages 13–145 (1991)

[CF] **P. Colmez & J.-M. Fontaine** *Construction des représentations p-adiques semi-stables*
Inventiones mathematicae **140**, pages 1–43 (2000)

[Col] **R. Coleman** *P-adic Banach spaces & families of modular forms*
Inventiones mathematicae **127**, pages 417–479 (1997)

[CR] **C. Curtis et I. Reiner,** *Representation theory of finite groups and associative algebras*
Wiley-Interscience, 1962

[Fa1] **G. Faltings** *p-adic Hodge theory.*
J. Amer. Math. Soc. **1**, no. 1, pages 255–299 (1988)

[Fa2] **G.Faltings** *Cristalline cohomology and p-adic Galois representations*
Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press, pages 25–80 (1989)

[Fo1] **J.-M. Fontaine** *Le corps des périodes p-adiques*
Périodes p-adiques [PP], exposé 2

[Fo2] **J.-M. Fontaine** *Représentations p-adiques semi-stables*
Périodes p-adiques [PP], exposé 3

[FP] **J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou** *Autour des conjectures de Bloch-Kato : cohomologie Galoisienne et valeurs de fonctions L*
[Mot] part 1, pages 599-706 (1994)

[HT] **M.Harris & R.Taylor** *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*
Annals of math. studies (2002)

[Hum] **J.E. Humphreys** *Reflection Groups and Coxeter Groups*
Cambridge studies in advanced mathematics **29**

[Ki] **M. Kisin** *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*
Prépublication. Disponible sur http ://wwwmath.uni-muenster.de/math/Personen/Angestellte/pages/Kisin.html

[KE] **D. Keys** *Principal series representations of special unitary groups over local fields,*
Compositio mathematica **51**, no. 1, pages 115–130 (1984)

[KMe] **N. Katz & W. Messing** *Some consequences of the Riemann Hypothesis for varieties over finite fields*
Inventiones mathematicae **23**, pages 73–77 (1974)

[La] **J.-P. Labesse** *Cohomologie, stabilisation et changement de base*
Société mathématique de France, Astérisque **257** (1999)

[Ma] **B. Mazur** *The theme of p-adic variation*
Mathematics : Frontiers and perspectives
V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax & B. Mazur Ed., AMS (2000)

[Mot] *Motives*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **55**

[PP] *Périodes p-adiques*
Société mathématique de France, Astérisque **223** (1994)

[PR] **B. Perrin-Riou** *Représentations p-adiques ordinaires*
Périodes p-adiques [PP], exposé 4.

[Ribet] **K. Ribet** *A modular construction of unramified extensions of* $\mathbb{Q}(\zeta_p)$
Inventiones mathematicae **34**, no. 3, pages 151–162 (1976)

[Rog1] **J.Rogawski** *Analytic expression for the number of points mod p*
[ZFPMS] pages 65–109

[Rog2] **J.Rogawski** *The multiplicity formula for A-packets*
[ZFPMS] pages 395–419

[Rog3] **J.Rogawski** *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*
Inventiones mathematicae **79**, pages 443–465 (1985)

[Roglivre] **J.Rogawski** *Automorphic representations of unitary groups in three variables,* Annals of math. studies **123**, Princeton University Press (1990)

[Rou] **R.Rouquier** *Caractérisations des caractères et pseudo-caractères* Journal of algebra **180**, pages 571–586 (1996)

[Ru1] **K. Rubin** *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields.* Inventiones mathematicae **103**, no. 1, pages 25–68 (1991)

[Rulivre] **K. Rubin** *Euler systems* Annals of math. studies **147** (2000)

[Sen1] **S. Sen** *Continous cohomology and p-adic Galois representations* Inventiones mathematicae **62**, pages 89–116 (1980)

[Sen2] **S. Sen** *An infinite dimensional Hodge-Tate theory* Bull. Soc. math. France, **121**, pages 13–34 (1993)

[Sk-Ur] **C. Skinner & E. Urban** Sur les déformations p-adiques des formes de Saito-Kurokawa C.R.A.S Paris I 335, pages 581–586 (2002)

[Tate] **J. Tate** *Number theoretic background* Preceedings of Symposia in Pure Mathematics **33**, *Automorphic forms, representations and L-functions* Part 2, pages 3–26 (1977)

[Tay] **R. Taylor** *Galois representations attached to Siegel modular forms of low weight* Duke math. Journal **63**, pages 281–332 (1991)

[Ti] **J. Tits** *Reductive groups over local fields* Automorphic forms, representations, and L-functions, P.S.P.M. **33**, volume 1, pages 29–69 (1979)

[Z] **A. V. Zelevinsky** *Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of $GL(n)$* Annales scientifiques E.N.S. série 4, t. 13, pages 165–210 (1980)

[ZFPMS] **Edited by R. Langlands and D. Ramakhrisnan,** *The Zeta functions of Picard modular surfaces, 1992, CRM* Publications C.R.M., Montréal