LISSITÉ DE LA COURBE DE HECKE DE GL_2 AUX POINTS EISENSTEIN CRITIQUES.

J. BELLAÏCHE ET G. CHENEVIER

Abstract : Let p be a prime number and $\mathcal{C}$ be the p-adic tame level 1 eigencurve. We prove that $\mathcal{C}$ is smooth at the evil Eisenstein points and we give necessary and sufficient conditions for etaleness of the map to the weight space at these points.

Soit p un nombre premier et $\mathcal{C}$ la courbe de Hecke p-adique de GL_2 de niveau modéré 1, "*the eigencurve*", introduite par Coleman et Mazur dans [CM]. Notre objectif dans ce texte est d'étudier $\mathcal{C}$ et son morphisme κ vers l'espace des poids au voisinage des points Eisenstein critiques de $\mathcal{C}$, i.e. paramétrant les "*evil Eisenstein series*". Nous démontrons que $\mathcal{C}$ est lisse en ces points et donnons des conditions galoisiennes nécessaires et suffisantes pour que κ y soit étale. Cette étude complète celle faite par Kisin dans [K, thm. 11.10] en certains points classiques irréductibles (voir aussi [CM, cor. 7.6.3]).

Remerciements : les auteurs sont heureux de remercier Pierre Colmez, Barry Mazur, Christophe Soulé et Jacques Tilouine pour leur soutien et des discussions utiles, ainsi que le C.I.R.M (Luminy, France) où une partie de ce travail a été réalisée en novembre 2003. L'un des auteurs (J. B.) remercie de plus l'I.P.D.E. pour son soutien financier et l'université de Rome I pour son hospitalité.

Notations : p est un nombre premier, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{Q}_p$, et $v : \overline{\mathbb{Q}}_p^* \to \mathbb{Q}$ la valuation p-adique normalisée par $v(p) = 1$. Si $X/\mathbb{Q}_p$ est un espace rigide, on note $A(X)$ l'anneau des fonctions analytiques globales sur X et $\mathcal{O}_X^{\mathrm{rig}}$ le faisceau structural de X. Nous entendrons par $X(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ la réunion des $X(F)$ où F parcourt les sous-extensions finies de $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

1. Rappels sur $\mathcal{C}$

La référence pour cette partie est [CM].

1.1. Soient p un nombre premier, $\mathcal{W} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr-cont}}(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{G}_m^{rig})_{pairs}$, et $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$ la courbe de Hecke p-adique de niveau modéré 1 pour le groupe GL_2. C'est la courbe analytique[1] sur $\mathbb{Q}_p$ construite par Coleman et Mazur dans [Co1] et [CM, Chap. 7] (voir aussi [Bu] pour $p = 2$) à partir du système de modules de Banach sur $\mathcal{W}$ des formes modulaires p-adiques surconvergentes. La courbe $\mathcal{C}$ est séparée, réduite, équidimensionnelle de dimension 1. Le morphisme κ est plat, localement fini.

[1]Précisément, la courbe $\mathcal{C}$ étudiée ici est celle notée D loc.cit. Nous n'utiliserons pas l'identification de D avec la nilréduction de l'espace C_p considéré aussi loc.cit.

1.2. Soit $\mathcal{H} := \mathbb{Z}[\{T_l, l \neq p\}, U_p]$. On dispose par construction ([CM, Chap. 7]) d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{H} \to A(\mathcal{C})$ de sorte que l'on verra les éléments de $\mathcal{H}$ comme des fonctions analytiques globales, bornées par 1 partout, sur $\mathcal{C}$. Par construction toujours ([CM]), l'application canonique "système de valeurs propres" $\chi : \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{ann}}(\mathcal{H}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ est injective, et identifie $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à l'ensemble des formes modulaires p-adiques surconvergentes propres, de pente finie, et de niveau modéré 1. Soient $F/\mathbb{Q}_p$ un corps local, $x \in \mathcal{C}(F)$. On note f_x l'unique forme p-adique surconvergente propre normalisée correspondante[2], et $M(x) \subset M^{\dagger}_{\kappa(x)}$ l'espace caractéristique pour $\mathcal{H}$ de f_x. L'image $\mathcal{H}(x)$ de $F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}$ dans $\mathrm{End}_F(M(x))$ est une F-algèbre locale de dimension finie. L'accouplement standard $M(x) \times \mathcal{H}(x) \to F$, $(f, h) \mapsto a_1(h(f))$ est non dégénéré, sauf si $\kappa(x) = 1$ et x est sur la droite Eisenstein ordinaire, auquel cas il est nul mais $\dim_F(M(x)) = \dim_F(\mathcal{H}(x)) = 1$ (cf. [CM, prop. 3.6.1]).

Proposition 1. *Si $x \in \mathcal{C}(F)$, il existe un F-voisinage affinoide Ω de x tel que :*

(a) $\kappa(\Omega)$ est un ouvert affinoide,

(b) $\kappa_{|\Omega}$ est fini et plat, étale hors de x, de degré $\dim_F M(x)$,

(c) la fibre de $\kappa_{|\Omega}$ au dessus de $\kappa(x)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spec}(\mathcal{H}(x))$.

De plus, l'application naturelle $\mathcal{O}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{W},\kappa(x)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H} \to \mathcal{O}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{C},x}$ est surjective.

Preuve: Choisir Ω tel que (a) et le premier point de (b) soient vrai est possible par construction. Posons $V := \kappa(\Omega)$, F_x la fibre de $\kappa_{|\Omega}$ au dessus de $\kappa(x)$. D'après [Be, lemme 2.1.6], les $\kappa^{-1}(U)$ avec $\kappa(x) \in U$ forment une base de voisinages rigides analytiques de F_x. Ainsi, quitte à réduire V et remplacer Ω par sa composante connexe contenant x, on peut supposer que F_x est un schéma local, et que κ est étale hors de x. Soit $y \in V \backslash \{\kappa(x)\}$, alors par construction, le degré de κ est $|\kappa^{-1}(y)| = \sum_{\kappa(z)=y} \dim_F(\mathcal{H}(y)) = \sum_{\kappa(z)=y} \dim_F(M(y))$. Ce degré est aussi $\dim_F(M(x))$ car la famille de formes modulaires découpée par Ω est localement libre sur $A(V)$, ce qui termine de prouver (b). En réappliquant le raisonnement ci-dessus au point x et en utilisant la platitude de κ et $\dim_F(M(x)) = \dim_F(\mathcal{H}(x))$, on en déduit (d). La dernière assertion est satisfaite par construction. $\square$

2. Rappels sur la théorie de Mazur-Wiles

Nous rappelons dans cette section, en les étendant légèrement, quelques résultats démontrés dans [MW] (voir aussi [HP]).

2.1. Soit (A, m, k) un anneau local noethérien hensélien réduit. On note $K = \prod_j K_j$ son anneau total de fractions, et on suppose donnée $\rho = (\rho_j) : G \to \mathrm{GL}_2(K)$ une représentation de trace notée T telle que $T(G) \subset A$, de déterminant dans A. On suppose que T mod m est somme de deux caractères *distincts* $\chi_i : G \to k^*$, $i = 1, 2$.

Fixons $s \in G$ tel que $\chi_1(s) \neq \chi_2(s)$. Le polynôme caractéristique de s est scindé dans A car A est hensélien, à racines distinctes dans chacun des K_j. On note $\lambda_i \in A$ l'unique

[2]Cela existe toujours sauf si x est sur la droite Eisenstein ordinaire et de poids trivial, auquel cas on pose $f_x = 1$ (cf. [CM, prop. 3.6.1]).

racine telle que $\lambda_i \bmod m = \chi_i(s)$. On peut donc trouver une K-base de K^2, e_1, e_2 telle que $s(e_i) = \lambda_i e_i$. Une telle base sera dite *adaptée à s*. On note a, b, c, d les coefficients matriciels de ρ dans cette base, et B et C les sous-A-modules de K engendrés par les $b(g)$ et $c(g')$ respectivement.

2.2. Soit $I \subsetneq A$ un idéal tel que $T \bmod I$ soit la somme de deux caractères ψ_1, ψ_2 : $G \to (A/I)^*$, tels que $\psi_i \bmod m = \chi_i$.

Proposition 2. *$\mathrm{Hom}_A(B, A/I)$ s'injecte dans $\mathrm{Ext}^1_{(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1)$. De plus,*
(a) si les ρ_j sont semi-simples, B est un sous-A-module de type fini de K,
(b) si les ρ_j sont irréductibles, alors l'annulateur de B est nul.

Lemme 1. *Pour tout $g \in G$, on a $a(g), d(g) \in A$ et $a(g) - \psi_1(g)$, $d(g) - \psi_2(g) \in I$. De plus, pour tous g, $g' \in G$, $b(g)c(g') \in I$.*

Preuve: Les éléments $T(sg) = \lambda_1 a(g) + \lambda_2 d(g)$ et $T(g) = a(g) + d(g)$ sont dans A, ainsi donc que $a(g)$ et $d(g)$ car $\lambda_1 - \lambda_2$ est inversible dans A. En réduisant modulo I les deux relations plus haut, il vient que $a(g) - \psi_1(g)$ et $d(g) - \psi_2(g)$ sont solutions du système $x + y = 0$ et $\bar{\lambda}_1 x + \bar{\lambda}_2 y = 0$ qui est inversible dans A/I, car dans A/m. Cela conclut le premier point. Le second point en découle, car

$$a(gg') = a(g)a(g') + b(g)c(g'). \tag{1}$$

□

Notons $\bar{b}$ l'image de b dans B/IB. Un conséquence immédiate du lemme 1 est le :

Lemme 2. *L'application*

$$G \longrightarrow \begin{pmatrix} A/I & B/IB \\ 0 & A/I \end{pmatrix}, \quad g \mapsto \begin{pmatrix} \psi_1(g) & \overline{b(g)} \\ 0 & \psi_2(g) \end{pmatrix},$$

est un morphisme de groupes.

En particulier, on dispose d'une une application A-linéaire

$$\mathfrak{j} : \mathrm{Hom}_A(B/IB, A/I) \to \mathrm{Ext}^1_{(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1).$$

Posons $H := \ker(\psi_1/\psi_2)$.

Lemme 3. *B/IB est engendré comme A-module par les $b(h), h \in H$, et $\mathfrak{j}$ est injective.*

Preuve: Soit g dans G, un calcul montre que

$$b(sgs^{-1}g^{-1}) = \frac{b(g)}{\psi_2(g)}(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1)$$

dans B/IB. Comme $sgs^{-1}g^{-1} \in H$, cela conclut le premier point. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{j})$, $g \mapsto f(b(g))$ est un cobord, donc trivial restreint à H. Donc f est nulle sur $A.b(H) = B/IB$ par le premier point. □

Lemme 4. *Si les ρ_j sont semi-simples, B est un A-module de type fini.*

Preuve: Comme le A-module B est un quotient de $A[\rho(G)]$, il suffit de montrer que ce dernier est de type fini sur A. Comme $A[\rho(G)] \subset \prod_j \rho_j(A[G])$, on peut supposer que K est un corps. Comme ρ est semi-simple, la trace de $M_2(K)$ est non dégénérée sur $K[\rho(G)]$. De plus, elle est à valeurs dans A sur le sous-A-module $R := A[\rho(G)]$. Comme A est noethérien et R engendre $K[\rho(G)]$ comme K-espace vectoriel, un argument standard montre que R est de type fini. □

Enfin, il est clair que si ρ_j est irréductible, $\mathrm{Im}(B \to K_j)$ est non nulle. Cela achève la preuve de la proposition 2. □

2.3. Remarquons que le lemme 1 montre que $BC \subset m$ est le plus grand idéal J de A ayant la propriété que T mod J est somme de deux caractères. On l'appellera *l'idéal de réductibilité de* T.

Corollaire 1. *Supposons les* ρ_j *semi-simples.*

(a) Si $\dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_2, \chi_1)) = 1$*, alors* ρ *est définie sur* A*. Si de plus l'annulateur de* B *est nul,* B *est libre de rang* 1 *sur* A*, et il existe une base adaptée à* s *dans laquelle* $B = A$*.*

(b) Si l'idéal de réductibilité de T *est l'idéal maximal de* A *et si* $\dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_1, \chi_2)) = \dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_2, \chi_1)) = 1$*, alors* A *est de valuation discrète.*

Preuve: Prouvons le (a). Si l'on applique la proposition 2 à l'idéal maximal de A, il vient que $\dim_k B \otimes_A k \leq \dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_2, \chi_1)) = 1$. Comme B est de type fini par le lemme 4, $\dim_k B \otimes_A k = 1$ et donc B est un A-module monogène par Nakayama, ainsi donc que son image B_j dans K_j. Posons $f_j = 1$ si $B_j = 0$ et $(f_j) = B_j$ sinon, on a $f := (f_j) \in K^*$. Ainsi, quitte à remplacer e_2 par $f^{-1}e_2$, on conclut le (a).

Si pour $(i_1, i_2) = (1, 2)$ et $(2, 1)$ on a $\dim_k(\mathrm{Ext}^1_{k[G]}(\chi_{i_1}, \chi_{i_2})) = 1$, alors pour les mêmes raisons que plus haut, B et C sont monogènes, ainsi donc que $m = BC$ par hypothèse. L'anneau A étant réduit, il est donc de valuation discrète. □

2.4. En vue d'appliquer les résultats de cette section à un groupe topologique, nous avons besoin d'un sorite de topologie. On conserve les hypothèses du §2.1 et on suppose que G est un groupe topologique. On suppose de plus que A est un anneau topologique séparé ayant la propriété suivante : (TOP) le foncteur d'oubli des A-modules topologiques séparés de type fini vers les A-modules de type fini admet une section pleinement fidèle munissant A de sa topologie. On fixe une telle section, de sorte que tout A-module de type fini est muni de la topologie donnée par cette section. En particulier, si I est un idéal de A, on dispose d'une topologie sur A/I. Noter qu'un sous-A-module N d'un A-module M de type fini est automatiquement fermé, car M/N est séparé et $M \to M/N$ continue.

Proposition 3. *Supposons que* $T : G \to A$ *est continu et que les* ρ_j *sont semi-simples. Alors les* $\psi_i : G \to (A/I)^*$ *sont continus et l'application*

$$\mathrm{j} : \mathrm{Hom}_A(B/IB, A/I) \to \mathrm{Ext}^1_{(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1)$$

a son image dans $\mathrm{Ext}^1_{cont,(A/I)[G]}(\psi_2, \psi_1)$*.*

Preuve: D'après le lemme 1 et sa preuve, ψ_1 coïncide avec a mod I et

$$a(g) = \frac{T(sg) - \lambda_2 T(g)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Ainsi, $g \mapsto a(g), \psi_1(g)$ et $\psi_1(g)^{-1} = \psi_1(g^{-1})$ sont continus, car T l'est et par (TOP). Il en va de même pour ψ_2. Cela a donc un sens de parler d'extensions continues entre ψ_2 et ψ_1. Comme B est de type fini par le lemme 4, et que toute application A-linéaire $B \to A/I$ est continue par (TOP), il ne reste qu'à montrer que $b : G \to B$ est continue. Soit B_j l'image de B dans K_j ; c'est un quotient de B, donc de type fini sur A. L'application canonique $B \to \prod_j B_j$ est injective et c'est un homéomorphisme sur son image. Il suffit donc de vérifier que $g \mapsto b(g)_j$ est continue. On peut supposer que K est un corps, puis que ρ est irréductible, car sinon $C = B = 0$. Soit $g' \in G$ tel que $c(g') \neq 0$, la multiplication par $c(g')$ induit un homéomorphisme de B sur son image dans A. Il suffit donc de vérifier que $g \mapsto c(g')b(g) \in A$ est continue, ce qui découle de ce que a l'est et de la formule (1). $\square$

Une preuve identique à celle du corollaire 1 démontre alors le :

Corollaire 2. *Sous les hypothèses de la proposition 3, le corollaire 1 reste vrai s'il on remplace dans son énoncé les groupes d'extensions mis en jeu par leurs sous-groupes d'extensions continues.*

Exemple : Soient k un corps local non archimédien, X un k-affinoide réduit, $x \in X$ et A l'anneau local rigide en x. On rappelle que l'anneau A est limite inductive filtrante des $A(U)$ où U est un ouvert affinoide de X contenant x. C'est un anneau local noethérien réduit ([BGR, §7.3.2]) et hensélien ([Be, §2.1]). On le munit de la topologie localement convexe la plus fine telle que les $A(U) \to A$ soient continues (cf. [Sc, ch. I, E]), $A(U)$ étant muni de sa topologie de k-espace de Banach. En particulier, si m est l'idéal maximal de A, la projection canonique $A \to A/m^n$ est continue. Cette topologie fait de A une k-algèbre topologique, elle est séparée car A/m^n l'est et $\bigcap_{n\geq 0} m^n = \{0\}$. Si M est un A-module de type fini et $f : A^n \to M$ une surjection A-linéaire, la topologie localement convexe quotient de M le munit d'une structure de A-module topologique qui est en fait indépendante de la surjection f choisie, et séparée. On voit facilement que toute application linéaire entre deux A-modules de type fini est continue. Ainsi, A satisfait (TOP).

3. La pseudo-représentation portée par $\mathcal{C}$.

3.1. Soit G le groupe de Galois de la sous-extension maximale de $\overline{\mathbb{Q}}$ non ramifiée hors de p, $D \subset G$ un groupe de décomposition en p attaché à un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ que l'on fixe. On note $Z \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ l'ensemble des points classiques de $\mathcal{C}$. Par définition $z \in Z$ si, et seulement si, $\chi(z)$ est le système de valeurs propres d'une forme modulaire classique sur $X_1(p^n)$ pour un certain entier $n \geq 0$. Les formes modulaires apparaissant ainsi sur $\mathcal{C}$ sont exactement celles qui ne sont pas supercuspidales en p. On sait que l'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}$ ainsi obtenu est très Zariski-dense dans $\mathcal{C}$.

3.2. À chaque $z \in Z$ est associée, par les travaux de Eichler-Shimura, Igusa, Deligne, une unique représentation semi-simple continue

$$\rho_z : G \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p),$$

ayant la propriété que la trace d'un Frobenius géométrique en $l \neq p$ est $T_l(x)$. La compacité relative de l'image de $\mathcal{H}$ dans $A(\mathcal{C})$ (cf. par exemple [Ch2, §4.6 rem. i.]), et le fait que $A(\mathcal{C})$ est réduit, entraînent que la trace $x \mapsto \mathrm{tr}(\rho_x)$ de ces représentations se prolonge analytiquement en une unique pseudo-représentation continue de dimension 2 :

$$T : G \to A(\mathcal{C}),$$

satisfaisant $T(F_l) = T_l$. En particulier, pour tout $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, il existe[3] une unique représentation *semi-simple* continue $\rho_x : G \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ dont la trace est l'évaluation en x de T. En particulier, un point $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est uniquement déterminé par le couple $(\rho_x, U_p(x))$.

3.3. Si $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, on sait que le polynôme de Sen de $(\rho_x)_{|D}$ est $T(T - d\kappa(x) + 1)$, où $d\kappa(x)$ désigne la dérivée en 1 du caractère de $\mathbb{Z}_p^*$ associé à $\kappa(x)$. Par les travaux de Kisin ([K, thm. 6.3]), on a

$$D_{\mathrm{cris}}((\rho_x)_{|D})^{\varphi = U_p(x)} \neq 0.$$

4. Points réductibles de $\mathcal{C}$

4.1. **Points Eisenstein.** Commençons par définir les points *Eisenstein critiques* de $\mathcal{C}$. Soient $k \geq 2$ un entier et $\varepsilon : \mathbb{Z}_p^* \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ un caractère d'ordre fini tel que $\varepsilon(-1) = (-1)^k$, de sorte que $w = (x \mapsto x^k \varepsilon(x)) \in \mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On suppose que $k \neq 2$ si $\varepsilon = 1$. Il existe (cf. [Mi, thm. 4.7.1]) une unique forme modulaire classique, propre pour $\mathcal{H}$, de q-développement

$$E_w^{crit} := q + \sum_{n \geq 2} a_n q^n,\ a_p = p^{k-1},\ a_l = \varepsilon(l) + l^{k-1}\ si\ \ l \neq p.$$

Soit $F := \mathbb{Q}_p(\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$. La forme E_w^{crit} définit donc un unique F-point de $\mathcal{C}$ que l'on note x_w, on a $\kappa(x_w) = w$. Il est clair que $\rho_{x_w} = \varepsilon \oplus F(1-k)$. Un tel point de $\mathcal{C}$ sera dit *Eisenstein critique*.

Soit $\zeta_p : \mathcal{W} \backslash \{1\} \longrightarrow \mathbb{A}^1$ la fonction zêta p-adique de Kubota-Leopold. Si $w \neq 1$, Il existe une unique forme modulaire surconvergente, ordinaire et propre pour $\mathcal{H}$, de q-développement (cf. [Co1, §B1]) :

$$E_w^{ord} := \zeta_p(w)/2 + q + \sum_{n \geq 2} a_n q^n,\ a_p = 1,\ a_l = 1 + w(l) l^{-1}\ si\ \ l \neq p.$$

On pose de plus $E_1^{ord} := 1$. Soit $F := \mathbb{Q}_p(w(\mathbb{Z}_p^*))$. On notera y_w le F-point de $\mathcal{C}$ (en fait du lieu ordinaire $\mathcal{C}^{ord}$) correspondant. Un point de la forme y_w sera dit *Eisenstein ordinaire*.

[3] En fait, si $x \in \mathcal{C}(F)$, alors ρ_x est définie sur F. Cela vient de ce que $\rho_x(\mathrm{Frob}_\infty)$ a pour polynôme caractéristique $(X-1)(X+1)$, donc l'obstruction à ne pas être définie sur F est nulle.

Remarque : Notons que y_w est dans la courbe de Hecke parabolique si, et seulement si, $\zeta_p(w) = 0$, ce qui arrive si, et seulement si, p est un nombre premier irrégulier.

4.2. **Points réductibles de $\mathcal{C}$.** Un point $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est dit réductible si ρ_x l'est.

Proposition 4. *L'ensemble des points réductibles de $\mathcal{C}$ est exactement l'ensemble des points Eisenstein.*

Preuve: Soit x un point de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\rho_x = \chi_1 + \chi_2$ est somme de deux caractères (automatiquement continus). D'après [K, thm. 6.3], pour $i = 1$ ou 2, on a $D_{\mathrm{cris}}(\chi_i)^{\varphi = U_p(x)} \neq 0$. Supposons que $i = 1$, quitte à les renuméroter. Le caractère $(\chi_1)_{|D}$ est donc cristallin de poids $k - 1 := v(U_p(x)) \in \mathbb{N}$ (car $|U_p(x)| \leq 1$ pour tout x dans $\mathcal{C}$). D'autre part, χ_1 est non ramifié hors de p, c'est donc $\mathbb{Q}_p(1-k)$. Comme les poids de Hodge-Tate-Sen de ρ_x sont 0 et $d\kappa(x) - 1$, il y a deux possibilités :

- Si $v(U_p(x)) > 0$, alors $k \geq 2$. Il vient que $\varepsilon := \chi_2$ est un caractère de poids 0, donc d'ordre fini. Comme E_2 n'est pas surconvergente d'après [CGJ] (cf. aussi la discussion dans l'appendice de [Ch1]), $k = 2 \Rightarrow \varepsilon \neq 1$. Ainsi, x est de la forme x_w.
- Si $v(U_p(x)) = 0$, alors χ_1 est le caractère trivial et donc $\chi_2 = \det(\rho_x)$. Ainsi, x est de la forme y_w. $\square$

La démonstration ci-dessus montre de plus que

Proposition 5. *L'ensemble des $x \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tels que $v(U_p(x)) \neq 0$ et $(\rho_x)_{|D}$ est réductible est discret, composé de x tels que $v(U_p(x)) = d\kappa(x) - 1$ est un entier strictement positif.*

5. Lissité de $\mathcal{C}$ aux points réductibles non ordinaires

5.1. **Rappels de cohomologie galoisienne.** Soient $k \geq 2$ un entier, $\varepsilon : \mathbb{Z}_p^* \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ un caractère d'ordre fini tel que $\varepsilon(-1) = (-1)^k$, et $F := \mathbb{Q}_p(\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$. On considère le caractère de G

$$\chi := F(k-1) \otimes \varepsilon,$$

et on fait l'hypothèse que $\chi \neq F(1)$. On rappelle le cas particulier suivant connu des conjectures de Bloch-Kato (cf. [BK], [FP]) pour les fonctions L de Dirichlet[4] :

$$\begin{array}{rclcl} \dim_F H^1_f(\mathbb{Q}, \chi) & = & \mathrm{ord}_{s=2-k} L(s, \varepsilon^{-1}) & = & 1 \\ \dim_F H^1_f(\mathbb{Q}, \chi^{-1}) & = & \mathrm{ord}_{s=k} L(s, \varepsilon) & = & 0 \end{array}$$

Les égalités de droite proviennent de l'équation fonctionnelle des caractères de Dirichlet, et de ce que $L(s, \varepsilon^{-1})$ n'a ni zéro ni pôle en $s = n$ entier si $\varepsilon \neq 1$ et $n \geq 1$ ou si $\varepsilon = 1$ et $n \geq 2$. Les égalités de gauche découlent de manière standard des travaux de Soulé ([So]). Notons que comme $\chi \neq \mathbb{Q}_p(1)$, $H^1_f(\mathbb{Q}_p, \chi) = H^1(\mathbb{Q}_p, \chi)$ est de dimension 1 et $H^1_f(\mathbb{Q}_p, \chi^{-1}) = 0$. En particulier, $H^1_f(\mathbb{Q}, \chi) = H^1(G, \chi)$ et $H^1_f(\mathbb{Q}, \chi^{-1}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H^1(G, \chi^{-1}) \to H^1(\mathbb{Q}_p, \chi^{-1})})$. Il est clair d'autre part que $H^1(G, \chi^{-1})$ est non nul (cela découle par exemple de la formule pour la caractéristique d'Euler globale). En récapitulant, on obtient la :

[4]Tous les groupes de cohomologie galoisienne considérés dans cette section sont sous-entendu en cohomologie continue.

Proposition 6. *i) Pour $H = G$ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on a*

$$\dim_F(\mathrm{Ext}^1_{cont,F[H]}(\varepsilon, F(1-k))) = \dim_F(\mathrm{Ext}^1_{cont,F[H]}(F(1-k),\varepsilon)) = 1.$$

ii) L'application de restriction

$$\mathrm{Ext}^1_{cont,F[G]}(\varepsilon, F(1-k)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{cont,F[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(\varepsilon, F(1-k))$$

est un isomorphisme.

5.2. Dans ce qui suit, on se fixe un point Eisenstein critique $x := x_w$, $w : z \mapsto z^k\varepsilon(z)$. On a $x_w \in \mathcal{C}(F)$ où $F = \mathbb{Q}_p(\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$. On choisit un F-voisinage Ω de x comme en §1.2 proposition 1. Soit A l'anneau local rigide de Ω en x_w et nommons encore $T : G \to A$ le pseudo-caractère induit par T. L'anneau A est une F-algèbre topologique (cf. §2.4) et $T : G \to A$ est continu par définition de la topologie sur A et §3.2.

Si m désigne l'idéal maximal de A, on a $A/m = F$ et par construction

$$T \bmod m = \varepsilon + F(1-k),$$

de sorte que T est résiduellement somme de deux caractères, distincts une fois restreints à D. De plus, d'après la théorie des pseudo-représentations de Wiles, il existe une représentation $\rho = (\rho_j) : G \to \mathrm{GL}_2(K)$ de trace T, où K est l'anneau total de fractions de A (cf. §2.1) et les ρ_j sont semi-simples. On pose $\chi_1 := F(1-k)$ et $\chi_2 := \varepsilon$.

Fixons un $s \in D$ comme au §2.1 et choisissons une base s-adaptée de K^2. Cette base nous permet de définir B, C (resp. B_p, C_p) comme en §2.1 associés à ρ (resp. $\rho_{|D}$). On a $B_p \subset B$ et $C_p \subset C$.

Lemme 5.

(a) Les $(\rho_j)_{|D}$ sont irréductibles,

(b) ρ est définie sur A, et quitte à changer de base adaptée à s, $B_p = B = A$. De plus, C_p et C sont libres de rang 1 sur A.

Preuve: Vérifions le (a). Soient $A(\Omega_j)$ l'affinoide image de $A(\Omega)$ dans K_j, $\Omega_j \subset \Omega$ le fermé Zariski contenant x correspondant (il est d'équidimension 1), et T_j l'image de T dans $A(\Omega_j)$. Si $(\rho_j)_{|D}$ est réductible, les images de B_p et C_p dans K_j sont nulles. Il vient que $(T_j)_{|D}$ est identiquement somme de deux caractères, ce qui est absurde d'après la proposition 5.

D'après (a) et la proposition 6, le corollaire 2 (a) s'applique à ρ et nous donne une base adaptée à s dans laquelle $B = A$. En particulier, ρ est définie sur A. De même, il vient que C, B_p et C_p sont libres de rang 1 sur A. De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{cont,F[G]}(\varepsilon, F(1-k)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{cont,F[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(\varepsilon, F(1-k)) \\
\mathrm{Hom}_A(B, A/m) \arrow[r, "can"] \arrow[u, "\mathrm{j}"] & \mathrm{Hom}_A(B_p, A/m) \arrow[u, "\mathrm{j}"']
\end{tikzcd}$$

La flèche du haut est un isomorphisme entre F-espaces vectoriels de dimension 1 d'après la proposition 6, et les flèches verticales sont des isomorphismes d'après ce que l'on vient de voir. Il vient que la flèche du bas est un isomorphisme, ainsi donc que l'inclusion $B_p \subset B$ d'après le lemme de Nakayama.$\square$

5.3. On se place définitivement dans la base adaptée donnée par le lemme ci-dessus, i.e. $B_p = B = A$. En particulier, $C = BC \subset m$ est un idéal de A.

Théorème 1. *A est de valuation discrète et C est l'idéal maximal de A.*

En particulier, $\mathcal{C}$ est lisse en x_w. D'après le corollaire 2 (b), qui s'applique par le lemme 5 (a) et la proposition 6, il suffit de montrer la seconde assertion. Un ingrédient crucial est la conséquence suivante de [K] :

Lemme 6. *Soit $J \subset m$ un idéal de codimension finie de A, alors $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{|D} \otimes A/J)^{\varphi = U_p}$ est libre de rang 1 sur A/J.*

Preuve: Tout d'abord, notons que la trace de la représentation (à composantes génériquement semi-simples) $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A)$ tombe dans l'anneau noethérien $A(\Omega)$. Par un argument standard déjà donné dans le lemme 4, $A(\Omega)[\rho(G)]$ est de type fini. Or A est limite inductive des $A(\Omega')$ où Ω' parcourt les voisinages de x de dans $\mathcal{C}$. Ainsi, quitte à rétrécir Ω on peut supposer que ρ provient d'une représentation continue

$$\rho^* : G \to \mathrm{GL}_2(A(\Omega)),$$

par $A(\Omega) \to A$. Quitte à restreindre encore Ω, on peut de plus supposer qu'il existe un idéal J^* de $A(\Omega)$ tel que $J^*A = J$ et l'application canonique $A(\Omega)/J^* \to A/J$ est un isomorphisme.

Le polynôme de Sen (cf. [Se]) de ρ^* est clairement de la forme $T(T - d\kappa + 1) \in A(\Omega)[T]$. On peut donc appliquer la proposition 5.4 de [K] à $X = \Omega$, $Y = U_p$ et $M = A(\Omega)^2$ muni de l'action de D via ρ^*. Par (2), X_{fs} contient tous les points classiques de Ω, qui sont Zariski-denses dans Ω. Comme c'est un fermé Zariski, $X_{fs} = \Omega$. On applique alors encore (2) et la remarque 5.5. (1) à $f : \mathrm{Specmax}(A(\Omega)/J^*) \to \Omega$, qui est Y-*small* car de codimension finie, et se factorise par $\Omega_{d\kappa - j}$ pour tout $j \leq 0$ car $d\kappa(x_w) - 1 = k - 1 > 0$. Cela conclut. $\square$

5.4. Terminons la preuve. L'idéal C est libre de rang 1 dans l'anneau local noethérien A qui est d'équidimension 1, il est donc de codimension finie d'après le Hauptidealsatz. Notons que $r := \rho \otimes A/C$ est par construction une extension

$$0 \to (A/C).\psi_1 \to r \to (A/C).\psi_2 \to 0,$$

où ψ_1 (resp. ψ_2) est la réduction modulo C de la fonction a (resp. d). Par construction, les $\psi_i : G \to (A/C)^*$ sont des caractères continus (cf. proposition 3), tels que

$$\psi_1 \bmod m \equiv F(1-k), \quad \psi_2 \bmod m \equiv \varepsilon.$$

Considérons la suite exacte de A/C-modules :

$$0 \to D_{\mathrm{cris}}((\psi_1)_{|D})^{\varphi=U_p} \to D_{\mathrm{cris}}(r_{|D})^{\varphi=U_p} \to D_{\mathrm{cris}}((\psi_2)_{|D})^{\varphi=U_p}$$

Le lemme 6 implique que le terme central est libre de rang 1. Comme ψ_2, vu comme F-représentation, est une extension successive de caractères égaux à ε et que

$$D_{\mathrm{cris}}(\varepsilon)^{\varphi=U_p(x)=p^{k-1}} = 0,$$

le terme de droite est nul. De plus, la dimension sur F du terme de gauche est $\leq \dim_F(A/C)$. Il vient donc que $D_{\mathrm{cris}}((\psi_1)_{|D})^{\varphi=U_p}$ est libre de rang 1 sur A/C. Cela implique que $(\psi_1)_{|D}(k-1)$ est cristallin de poids 0, donc non ramifié. Comme ce caractère est d'autre part non ramifié hors de p, il est identiquement trivial, puis

$$\psi_1 = (A/C)(1-k), \;\; U_p \equiv p^{k-1} \in A/C, \;\; \text{et} \;\; \psi_2 = \varepsilon.(A/C).$$

Le dernier point de la proposition 1 implique alors que $A/C = F$, i.e. C est l'idéal maximal de A. $\square$

5.5. La démonstration du §5.4 ci-dessus appliquée à C_p plutôt qu'à C montre encore que $(\kappa - k) \subset C_p$, de sorte que $A/C_p = \mathcal{H}(x_w)/C_p$. Mieux, elle prouve la :

Proposition 7. *La restriction à D de la représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A/C_p)$ est une extension de $(A/C_p)(\varepsilon \otimes u^{-1})$ par $(A/C_p)(1-k) \otimes u$, où u est le caractère non ramifié $D \to (A/C_p)^*$ envoyant le Frobenius géométrique sur U_p/p^{k-1}.*

Il ne semble cependant pas possible d'en déduire que ρ est constante, i.e. que C_p est l'idéal maximal de A. Cela vient de ce que l'on ne sait pas si le morphisme $H^1(G,\chi) \to H^1(\mathbb{Q}_p,\chi)$ est trivial ou non.

Remarques :

i) Une conséquence du lemme 5 (b) et de la première partie de la preuve du lemme 6 est que le lieu non ordinaire de $\mathcal{C}$ est admissiblement recouvert par des ouverts affinoides sur lesquels T est la trace d'une vraie représentation (c'est aussi une conséquence simple du théorème 1, cf. la remarque suivant [CM, thm. 5.1.2]).

ii) Le théorème 1 montre que le diviseur de réductibilité de T est réduit : est-il celui d'une fonction globale sur $\mathcal{C}$?

6. Régulateurs p-adiques

Soit $x_w \in \mathcal{C}(F)$ un point Eisenstein critique comme dans la section précédente. On reprend les notations précédentes pour A et C_p. Nous avons vu que $\mathcal{C}$ est lisse en x_w. Notons e l'indice de ramification de κ en x_w, c'est donc aussi le degré de κ en x_w. Posons $\chi = F(k-1) \otimes \varepsilon$ le caractère de G correspondant à w, et $w^* := (z \mapsto z^{2-k}\varepsilon^{-1}(z))$ le poids du point Eisenstein ordinaire de $\mathcal{C}$ jumeau à x_w.

Théorème 2. *On a les équivalences suivantes :*

i) C_p est l'idéal maximal de A,

ii) L'application naturelle $H^1(G,\chi) \to H^1(\mathbb{Q}_p,\chi)$ est un isomorphisme,

iii) $\zeta_p(w^*) \neq 0$,

iv) $e = 1$,
v) $\dim_F M(x_w) = 1$,

Preuve: On montre comme dans le lemme 5 que ii) est équivalent à $C = C_p$. Comme $C_p \subset C = m$ par le théorème 1, i) est équivalent à ii).

L'équivalence entre ii) et iii) est bien connue. Par exemple, ii) $\Rightarrow$ iii) découle de ce que sous l'hypothèse d'annulation de $\zeta_p(w^*)$, le point jumeau y_{w^*} rencontre alors la partie cuspidale ordinaire de $\mathcal{C}$. Un argument de réseaux (par exemple comme au §2) construit un élément non trivial de $H^1(G,\chi)$ scindé en p, ce qui conclut. iii) $\Rightarrow$ ii) découle de la conjecture principale d'Iwasawa démontrée dans [MW], qui implique que si $\dim_F(\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\chi) \rightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_\mathrm{p},\chi))) \geq 1$, alors $\zeta_p(w^*) = 0$.

Notons que κ est un isomorphisme restreint à toute la droite Eisenstein de $\mathcal{C}$, de sorte que κ est de degré 1 en y_{w^*} si, et seulement si, y_{w^*} n'est pas dans la partie cuspidale de $\mathcal{C}$ (qui est d'équidimension 1). Comme $\zeta_p(w^*)/2$ est le terme constant de $E_{w^*}^{ord}$, κ est de degré 1 en y_{w^*} si, et seulement si, $\zeta_p(w^*) \neq 0$. Le cas limite du critère de classicité de Coleman [Co2, cor. 7.2.2], [Co3], montre que le degré de κ en y_{w^*} est égal à e. Ainsi, iii) $\Leftrightarrow$ iv).

Enfin, iv) $\Leftrightarrow$ v) est conséquence de la proposition 1 (b). $\square$

Il est communément conjecturé que les propriétés ii) et iii) équivalentes ci-dessus sont satisfaites, ainsi donc que i) à v). Si p est un nombre premier régulier, elles sont toujours satisfaites.

Références

[Be] V. Berkovich *Étale cohomology for nonarchimedian analytic spaces*
Publications mathématiques de l'IHES 78 (1993)

[BK] S. Bloch & K. Kato *L-functions and Tamagawa numbers of motives*
Progr. Math. 86, The Grothendieck Festschrift I, pages 330-400 (1990)

[BGR] S. Bosch, U. Guntzer & R. Remmert *Non archimedian analysis*
Grundlehren der math. **261** (1982)

[Bu] K.Buzzard *Eigenvarieties*
En préparation.

[Ch1] G. Chenevier *Familles p-adiques de formes automorphes et applications aux conjectures de Bloch-Kato*, Thèse de l'université Paris 7 (2003)

[Ch2] G. Chenevier *Une correspondance de Jacquet-Langlands p-adique*
À paraître à Duke Math. Journal.

[Co1] R. Coleman *P-adic Banach spaces & families of modular forms*
Inventiones math. 127, pages 417-479 (1997)

[Co2] R. Coleman *Classical and overconvergent modular forms*
Inventiones math. 124, 214-241 (1996)

[Co3] R. Coleman *Classical and overconvergent modular forms of higher level*
Journal de théorie des nombres de Bordeaux 9, 395-403 (1997)

[CGJ] R. Coleman, F. Gouvêa & N. Jochnowitz *E_2, Θ, and overconvergence*
Int. Math. Res. Not. 1995, No.1, pages 23-41 (1995)

[CM] R. Coleman & B. Mazur *The Eigencurve*
Proc. Durham, 1996. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 254, (1998)

[FP] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou *Autour des conjectures de Bloch-Kato : cohomologie Galoisienne et valeurs de fonctions L*, Motives part 1, pages 599-706 (1994)

[HP] G. Harder & R. Pink *Modular konstruierte unverzweigte abelsche p-Erweiterungen von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ und die Struktur ihrer Galois Gruppen*, Math. Nachr. 159 pages 83-99 (1992)

[K] M. Kisin *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*
Inventiones math. 153, pages 363-454 (2003)

[Ma] B. Mazur *The theme of p-adic variation*
Math. : Frontiers and perspectives, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax & B. Mazur Ed., AMS (2000)

[MW] B. Mazur & A. Wiles *The class field of abelian extensions of $\mathbb{Q}$*
Inventiones math. 76 no.2, pages 179-330 (1984)

[Mi] T. Miyake *Introduction to modular forms*
Springer Verlag (1989)

[Sc] P. Schneider *Nonarchimedian functional analysis*
Springer Monographs in Math. (2001)

[Se] S. Sen *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*
Bull. Soc. math. France, 121, pages 13-34 (1993)

[So] C. Soulé *On higher p-adic regulator*
Lecture Notes in Math. 854, pages 372-401 (1981)

[W] A. Wiles *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*
Inventiones math. 94, pages 529-573 (1988)