ORSAY
N° d'ordre :

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI-ORSAY
spécialité : MATHÉMATIQUES

par

Joël BELLAÏCHE

Soutenue le 7 janvier 2002 devant le jury composé de

Laurent CLOZEL	Directeur de thèse.
Benjamin ENRIQUEZ	Examinateur.
Michael HARRIS	Examinateur.
Guy HENNIART	Examinateur.
Éric URBAN	Rapporteur.
Marie-France VIGNÉRAS	Présidente du Jury.

Autres Rapporteurs :
Alain GENESTIER
Günter HARDER

Remerciements

Je remercie tout d'abord, et tout particulièrement, mon directeur de thèse Laurent Clozel, pour le beau sujet qu'il m'a donné, et sa constante disponibilité ; je remercie mes rapporteurs, Éric Urban, Alain Genestier et Günter Harder, ainsi que Michael Harris, Marie-France Vignéras, Guy Henniart, et Benjamin Enriquez, qui ont bien voulu faire partie de mon Jury.

Je remercie aussi tous ceux qui, au cours de ces années, ont discuté avec moi, m'ont appris des maths, aidé à résoudre un problème, ou simplement encouragé. Parmi eux, trois ont une influence déterminante : sans eux, cette thèse aurait été visiblement différente. Je pense à Gaëtan Chenevier, Phillippe Graftieaux, et Ania Otwinowska. Je suis redevable à beaucoup d'autres. J'en oublie sûrement : Bruno Klingler, Fabrice Orgogozo, François Pierrot, Luc Illusie, Laurent Berger, le forum des élèves (et en particulier David Madore, Hugues Randriambololona, Joël Riou, Denis Auroux, Nicolas George), Vincent Lafforgue, Michel Raynaud, Ivan Marin, mon père, David Harari, Antoine Chambert-Loir, Vincent Maillot, Pierre Cartier, Benjamin Enriquez, Mladen Dimitrov, Gérard Laumon, Bernadette Perrin-Riou, Christophe Breuil, Ariane Mézard, Laurent Lafforgue, Pierre Colmez, Yves Laszlo, François Lœser, James Milne, Jacques Tilouine, Ralph Greenberg.

Je remercie enfin tous ceux qui étaient présents à la soutenance, et en particulier ceux qui m'ont aidé à préparer le déjeuner qui a suivi : mes parents, et mes tantes Annie et Liliane.

Table des matières

Chapitre 0. Introduction 3

Première partie. Géométrie algébrique 7

Chapitre I. La compactification de Larsen 9
1. Introduction 9
2. Rappels sur le type d'un module avec action de $\mathcal{O}$ 12
3. L'espace de modules des $\mathcal{M}$-structures de niveau N. 13
4. Construction du bord 17
5. Compactifications et corollaires 25

Chapitre II. Relèvement des formes modulaires de Picard 35
1. Introduction 35
2. Formes modulaires sur $\mathcal{M}_N$ 36
3. Comparaison avec la théorie analytique sur $\mathbb{C}$. 48
4. Le changement de base pour les formes modulaires de Picard 53
5. Application : construction d'un analogue de l'invariant de Hasse 59

Chapitre III. Mauvaise réduction des surfaces modulaires de Picard 63
1. Introduction 63
2. Préliminaires 63
3. Définition du modèle entier des surfaces modulaires de Picard iwahoriques 67
4. Étude infinitésimale du modèle entier $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ 71
5. Géométrie du modèle entier $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ 92
6. Mauvaise réduction des surfaces modulaires de Picard avec structure de niveau parahorique en une place déployée 97
7. Modèle canonique 101

Deuxième partie. Théorie des groupes 105

Chapitre IV. Module universel en caractéristique $l \neq p$ pour un groupe de rang un 107
1. Introduction 107
2. Rappels et définitions sur les actions transitives et 2-transitives 111
3. Cas des arbres homogènes 113
4. Cas des arbres bihomogènes 128
5. Module universel et algèbre de Hecke 147
6. Module universel et série principale non ramifiée 153
7. Compléments sur l'algèbre de Hecke-Iwahori 155

Chapitre V. Module universel pour GL_3 (avec Ania Otwinowska) 165
1. Introduction 165
2. Traduction en un problème sur l'immeuble de G 166
3. Preuve du théorème 168

Chapitre VI. Variations sur un lemme de Ribet 183
1. Introduction 183
2. La méthode de Serre pour démontrer le lemme de Ribet 185
3. Le cas $n = 3$ 188
4. Preuve du théorème 1.2.5 201

Chapitre VII. Augmentation du niveau 209
1. Introduction et notations 209
2. Preuve du théorème 1.4.6 218
3. Preuve du théorème 1.5.3 226

Chapitre VIII. Une construction automorphe d'extensions de caractères galoisiens 239
1. Introduction 239
2. Construction d'une représentation endoscopique de G 248
3. Augmentation du niveau de π 253
4. Représentations galoisiennes associées 256
5. Élimination des extensions parasites 262
6. Fin de la preuve 265

Bibliographie 267

CHAPITRE 0

Introduction

Les congruences entre formes automorphes, et leurs conséquences pour la théorie des représentations galoisiennes sont le thème central de cette thèse. Son objectif principal est de développer une nouvelle méthode pour obtenir des extensions non triviales de représentations galoisiennes, lorsque celles-ci sont prévues par des conjectures à la Bloch-Kato.

Cet objectif est atteint au huitième et dernier chapitre dans un cas particulier, mais nous pensons que cette méthode a une portée beaucoup plus générale.

Cette méthode repose sur des congruences entre formes automorphes cuspidales stables et formes automorphes cuspidales endoscopiques[1]. De telles congruences sont obtenues, sous des hypothèses adéquates, grâce aux formules de multiplicités endoscopiques prévues par la conjecture d'Arthur, et à des résultats d'augmentation du niveau. Nous renvoyons à l'introduction du chapitre VIII (et spécialement à VIII.1.2.2 et VIII.1.2.3) pour un exposé détaillé de cette méthode.

Le cadre principal de cette thèse est le groupe unitaire quasi-déployé à trois variables $\mathrm{U}(2,1)$, ses formes sur $\mathbb{Q}$, et les variétés de Shimura qui leur sont associées. Pourquoi s'intéresser spécialement à ce groupe? Comme le dit Langlands[2], il offre "a coherent account of all pertinent techniques [for the general case] in a context that is as simple as possible and, yet, in which, as far as one can see, all difficulties arise, even though in mitigated forms." En ce qui concerne notre méthode, il nous faut un groupe avec de l'endoscopie (ce ne sera donc pas GL_2), pour lequel les conjecture d'Arthur sont démontrées, et aux représentations automorphes duquel on sait associer des représentations galoisiennes. Cela laisse peu de choix pour le moment, et le groupe $\mathrm{U}(2,1)$ qui vérifie ces conditions grâce au travail de Rogawski ([**Ro1**], [**Ro3**]), de Blasius-Rogawski ([**BL-RO1**]), et de tous les auteurs de [**ZFPMS**], est certainement le plus simple.

Si la mise en œuvre de cette méthode s'appuie sur un certain nombre de résultats obtenus tout au long de cette thèse, elle n'en est pas l'unique objectif, et la plupart des résultats obtenus ici sont (du moins nous l'espérons) d'un intérêt indépendant. Ils concernent d'ailleurs souvent d'autres groupes que $\mathrm{U}(2,1)$. Nous proposons donc maintenant un bref panorama[3], chapitre par chapitre, de cette thèse dont voici le *leitfaden*:

1. À la différence des méthodes employées habituellement, par exemple par Ribet ([**Ri**]), qui utilisent des congruences entre formes cuspidales et formes d'Eisenstein.

2. cf. [**ZFPMS**] page ix

3. Le lecteur est invité à consulter les introductions de chaque chapitre pour de plus amples détails.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{I} \arrow[dl] \arrow[d, thick] & & \mathrm{IV} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathrm{II} & \mathrm{III} \arrow[dr] & \mathrm{VI} & & \\
 & & \mathrm{V} & &
\end{tikzcd}$$

Nous déterminons complètement[5] la structure de G-représentation de ce module universel pour tous les groupes p-adiques de rang un, en toute caractéristique l, et nous démontrons les théorèmes de comparaison avec les séries principales non ramifiées attendus.

Le chapitre V est un travail commun avec Ania Otwinowska. Nous y démontrons, dans le cas du groupe GL_3, la conjecture de Lazarus, qui affirme la platitude du module universel pour un groupe p-adique sur n'importe quelle k-algèbre A, où k est un corps de caractéristique différente de p, et même des résultats un peu plus précis (par exemple le même énoncé pour A anneau quelconque). Nous espérons que nos méthodes, qui reposent sur la combinatoire de l'immeuble de Bruhat-Tits associé au groupe considéré, permettront de montrer dans un proche avenir cette conjecture pour GL_n, voire pour tout groupe réductif.

Dans le chapitre VI, nous généralisons au cas d'une représentation de dimension finie n quelconque un résultat simple (mais crucial pour obtenir des extensions de représentations galoisiennes) de [**Ri**], qui traite le cas $n = 2$. Dans le cas $n = 3$, qui est le cas que nous utiliserons au chapitre VIII, nous donnons des informations beaucoup plus précises, qui permettront, dans les applications, de contrôler la ramification des extensions obtenues.

Le chapitre VII est consacré à la preuve de deux résultats d'augmentation du niveau. Le premier concerne l'augmentation du niveau en une place de rang un : notre résultat concerne tous les groupes qui ont une telle place, que celle-ci soit ramifiée ou non, et est valable en toutes les caractéristiques banales (cf. [**CL**]), ainsi que certaines caractéristiques non banales. Il s'appuie lourdement sur les résultats du chapitre IV. Le second résultat concerne l'augmentation du niveau en une place où le groupe est GL_3, donc de rang (modulo le centre) égal à deux. Nos résultats sont moins complets que dans le cas de rang un, mais ils sont cependant cruciaux pour les applications arithmétiques du chapitre suivant.

Enfin, au chapitre VIII nous construisons des extensions de caractères galoisiens modulo l. Pour une description de la méthode et des résultats, nous renvoyons à ce chapitre.

5. En fait, à une petite exception près

Première partie

Géométrie algébrique

CHAPITRE I

La compactification de Larsen

1. Introduction

1.1. Les champs $\mathcal{M}_N$ et leurs compactifications.

1.1.1. Les variétés de Shimura associées aux formes quasi-déployées du groupe unitaire à trois variables, et leurs compactifications arithmétiques sont des objets centraux dans cette thèse.

Plus précisément, soit $\mathcal{O}$ un anneau d'entiers quadratiques imaginaires, de discriminant D, et de corps de fractions K.

On peut associer à $\mathcal{O}$ une forme entière du groupe algébrique dont les points réels sont $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})$ (voir 3.2.1). Si Γ désigne le groupe des points entiers de cette forme $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Z})$, et plus généralement si $\Gamma(N)$ désigne le groupe des points de Γ qui se réduisent en l'identité dans $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, et si K_∞ est un compact maximal de $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})$, alors on peut considérer la variété de Shimura – appelée dans ce cas *surface modulaire de Picard*:

$$\Gamma(N)\backslash \mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})/K_\infty, \tag{1}$$

que nous noterons dans cet article $\mathcal{M}_N^0(\mathbb{C})$. C'est une surface algébrique connexe, qui est une composante connexe d'une variante adélique $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ (voir 3.1.2 pour la définition précise).

1.1.2. La variété $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ s'interprète comme l'ensemble des points complexes d'un espace de modules $\mathcal{M}_{N,\mathbb{C}}$ paramétrant des variétés abéliennes de dimension 3 à multiplication par $\mathcal{O}$, munies de structures additionnelles soumises à certaines conditions de compatibilités. Ces objets, dont la définition précise est donnée au paragraphe 3.2.2, s'appellent *$\mathcal{M}$-structures de niveau N*.

En fait, la notion de $\mathcal{M}$-structures de niveau N garde un sens sur un schéma S beaucoup plus général que $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$: on peut la définir dès que S est muni d'un morphisme vers $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/DN]$. On peut donc aussi considérer le problème de modules consistant à classifier les $\mathcal{M}$-structures de niveau N sur cette base, et on obtient ainsi un champ algébrique, encore noté $\mathcal{M}_N$, qui est un modèle sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/DN]$ du champ $\mathcal{M}_{N,\mathbb{C}}$ défini précédemment.

1.1.3. On dispose, sur $\mathbb{C}$, depuis [**A-M-R-T**], d'un procédé de compactification (dite *toroïdale*) des variétés de Shimura. En général, cette compactification n'est pas unique, mais dépend d'un choix de nature combinatoire. Dans le cas de $\mathrm{U}(2,1)$ qui nous intéresse, il n'y a qu'un seul choix possible, si bien que la compactification toroïdale de $\mathcal{M}_{N,\mathbb{C}}$ est canonique.

1.1.4. Un des problèmes les plus importants de la théorie des variétés de Shimura depuis plus de trente ans a été la recherche d'analogues arithmétiques des compactifications toroïdales des variétés de Shimura, fournissant des modèles sur

des anneaux d'entiers (comme $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/DN]$) des compactifiactions obtenues sur $\mathbb{C}$ par des méthodes transcendantes.

La premier résultat dans cette direction a été la compactifiaction arithmétique des courbes modulaires $X(N)$ par [**D-R**] (variétés de Shimura associés à SL_2 sur $\mathbb{Q}$). Peu après, Rapoport a obtenu des compactifications arithmétiques pour les variétés de Hilbert-Blumenthal. Le principal progrès a ensuite été obtenu par [**C-F**], qui fournissent, aux débuts des années 90, une compactification arithmétique des variétés modulaires de Siegel (variétés de Shimura associés aux groupes symplectiques), et des outils pouvant s'appliquer à beaucoup d'autres cas.

1.1.5. Le cas des surfaces modulaires de Picard a fait l'objet, à la même époque, de la thèse de M. Larsen, un élève de Faltings. Larsen obtient une compactification lisse canonique $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ de $\mathcal{M}_N$, définie sur la même base $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/DN]$. Les résultats de Larsen ont été utilisés plusisurs fois depuis. En particulier, ils sont l'un des fondements du gros livre [**ZFPMS**].

1.2. Pourquoi revenir sur le travail de Larsen ? Pour trois raisons :

1.2.1. Les résultats de Larsen se trouvent dans [**L1**] (pages 34-35 pour le cas $N = 1$, i.e. "sans structures de niveau", pages 42-43 en général) qui constitue le deuxième chapitre du livre [**ZFPMS**]. Les preuves sont données dans la première (et plus grande) partie de sa thèse [**L2**].

Le premier problème est que les résultats énoncés dans [**L1**] laissent en suspens plusieurs questions naturelles, et ne sont souvent pas assez précis pour permettre de se servir, dans les applications, de la compactification de Larsen comme d'une "boîte noire", en évitant d'avoir recours aux détails de la construction.

Par exemple, le principal théorème affirme qu'il existe une compactification lisse $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$, à laquelle s'étend comme groupe algébrique G la variété abélienne universelle sur $\mathcal{M}$, et que le bord $D = \widetilde{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$ est un champ propre et lisse de codimension 1, dont l'espace grossier associé est une union de courbes elliptiques.

Mais on aimerait bien savoir si la multiplication complexe dont dispose la variété universelle sur $\mathcal{M}$ s'étend à G ; à quoi ressemble, précisément le bord D et pas seulement son espace grossier associé ; et ce qu'on peut dire du groupe G (et de sa multiplication complexe) restreint au bord D.

Dans le cas des structures de niveau, on aimerait disposer d'informations sur les morphismes "d'oublis" reliant les différentes compactifications $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ pour différents N.

Enfin, mais il est vrai plus par commodité que par véritable nécessité, on aimerait bien savoir que $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ est un schéma projectif pour $N \geq 3$, et pas seulement "un espace algébrique pour N suffisament grand", ([**L1**], page 43)

1.2.2. Le second problème est que, tout insuffisants qu'ils soient, les résultats de [**L1**] ne sont pas tous prouvés dans [**L2**]. Du théorème principal page 34, on ne

trouve de preuve que pour les affirmations 1 et 2. Pour le cas $N \geq 2$, il n'y a rien dans [**L2**].

1.2.3. Enfin, le troisième problème est que tous les théorèmes énoncés dans [**L1**] sont inexacts. C'est le cas des résultats avec structures de niveau $N \geq 2$ où la définition choisie empêche déjà que $\mathcal{M}_N$ soit un champ. C'est aussi le cas du théorème sur la compactification minimale, page 35, qui impliquerait que $\mathcal{M}$ est un schéma. Et surtout c'est le cas du théorème principal, page 42 : les composantes de l'espace grossier associé au bord D sont des droites projectives et non des courbes elliptiques.

Il n'est pas possible de déterminer où précisément se situe l'erreur dans la preuve de ce point, puisque cette preuve n'existe pas, mais, psychologiquement, le coupable est certainement le lemme de la page 9 de [**L2**], qui est faux.

1.3. Que trouvera-t-on dans ce chapitre ? Les remarques qui précèdent nous semblent justifier la décision de reprendre, de manière assez détaillée, la construction de la compactification de Larsen $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ de $\mathcal{M}_N$. Néanmoins l'essentiel du travail de [**L2**] est correct (en particulier le noyau dur de la construction, pages 16-23) et nous ne voyons pas l'utilité de le paraphraser. Les preuves dans ce chapitre ne seront donc pas *self-contained*, mais constitués de références précises à des arguments de [**L2**] et des nouveaux arguments nécessaires pour les compléter.

Cependant, nous avons fait en sorte que ce chapitre soit *self-contained* pour un lecteur qui voudrait prendre la compactification comme une boîte noire, c'est-à-dire que nous donnons toutes les définitions nécessaires pour comprendre les énoncés des théorèmes.

1.4. Notations. On fixe une fois pour toutes un corps de nombres quadratique imaginaire $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ et une racine carrée de $-d$ dans K, que l'on note $\sqrt{-d}$. On note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K, et D son discriminant.

On utilisera aussi le corps de classes K' de K, et on travaillera souvent sur l'anneau $\mathcal{O}_{K'}[1/D]$. On notera C_K le groupe de classes de K, et h l'ordre de C_K, i.e. le degré de l'extension K'/K.

Plus généralement, N étant un entier strictement positif, on définit K'_N comme le "corps de classes de rayons" de K de conducteur N ([**Si**], II.3.2), et on pose $R_N = \mathcal{O}_{K'_N}[1/DN]$. Ainsi, si $N = 1$, on a $K'_1 = K'$ et $R_1 = \mathcal{O}_{K'}[1/D]$.

Enfin, $\mathcal{O}^*$ désignera comme d'habitude le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{O}$, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) si $K = \mathbb{Q}(i)$ (resp. $\mathbb{Q}(j)$, resp. un autre corps quadratique imaginaire).

Par ailleurs, on utilisera librement les notions d'espaces algébriques (voir [**KN**]) et de champs algébriques (pour lesquels notre référence est [**L-MB**])

2. Rappels sur le type d'un module avec action de $\mathcal{O}$

Les notions de type d'un module localement libre nécessaires pour formuler correctement les problèmes de modules associés aux variétés de Shimura peuvent présenter des subtilités (voir [**KO**]). Dans notre cas, où nous travaillons avec un anneau d'entiers quadratiques, en rejetant les places ramifiées, la notion ne présente aucune difficulté. Par souci de complétude, nous prenons néanmoins le temps d'en rappeler la définition :

Soit R une algèbre sur $\mathcal{O}[1/D]$. Soit M un module sur R avec action de $\mathcal{O}$, i.e. muni d'un morphisme d'anneaux

$$i : \mathcal{O} \to \mathrm{End}_R(M).$$

Écrivons $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\tau]$, avec $\tau = \sqrt{-d}$ si d n'est pas congru à -1 modulo 4 et $\tau = (1+\sqrt{-d})/2$ si $d = 4d' - 1$.

Le morphisme i est déterminé par l'endomorphisme $J = i(\tau)$. On a $J^2 = -d$ dans le premier cas, $J^2 = J - d'$ dans le second cas.

Dans le premier cas, notons que le polynôme $X^2 + d$ a deux racines distinctes dans R, $\sqrt{-d}$, et $-\sqrt{-d}$, qu'on désigne respectivement par α et $\bar{\alpha}$. De même, dans le second cas, le polynôme $X^2 - X + d'$ a deux racines distinctes $(1+\sqrt{-d})/2$, et $(1-\sqrt{-d})/2$, qu'on appelle aussi α et $\bar{\alpha}$.

Notons que dans les deux cas, $\bar{\alpha} - \alpha$ est *inversible* dans R et on peut donc écrire, pour tout x dans M :

$$x = (\bar{\alpha} - \alpha)^{-1}((J-\alpha)x - (J-\bar{\alpha})x).$$

Or $(J-\alpha)x \in \mathrm{Ker}\,(J-\bar{\alpha})$ et $(J-\bar{\alpha})x \in \mathrm{Ker}\,(J-\alpha)$, et donc

$$M = \mathrm{Ker}\,(J-\alpha) + \mathrm{Ker}\,(J-\bar{\alpha}).$$

La somme est directe : si x est à la fois dans $\mathrm{Ker}\,(J-\alpha)$, et dans $\mathrm{Ker}\,(J-\bar{\alpha})$, on a $(\alpha - \bar{\alpha})x = 0$ d'où $x = 0$.

Dans les deux cas, on a donc une décomposition :

$$M = \mathrm{Ker}\,(J-\alpha) \oplus \mathrm{Ker}\,(J-\bar{\alpha}).$$

On pose $M^+ = \mathrm{Ker}\,(J-\alpha)$ et $M^- = \mathrm{Ker}\,(J-\bar{\alpha})$. Les deux sous-modules M^+ et M^- sont stables par $\mathcal{O}$, et pour $c \in \mathcal{O}$, on a

$$i(c)x = cx \quad \text{si} \quad x \in M^+,$$
$$i(c)x = \bar{c}x \quad \text{si} \quad x \in M^-.$$

Si M est localement libre de type fini (de rang n), alors ses facteurs directs M^+ et M^- le sont aussi; on note p et q leur rang, on a bien sûr $p + q = n$, et on définit le *type* de M comme le couple (p, q).

Plus généralement, si S est un schéma sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}[1/D]$, et $\mathbb{F}$ un faisceau cohérent localement libre sur S, muni d'une $\mathcal{O}$-action, on dira que $\mathbb{F}$ est de type (p, q) si, pour tout ouvert affine $\mathrm{Spec}\,A$ de S, $H^0(\mathrm{Spec}\,A, \mathbb{F})$ est de type (p, q). Il découle

facilement de ce qui précède que si S est connexe, tout faisceau cohérent localement libre avec action de $\mathcal{O}$ est bien d'un type (p,q) et d'un seul.

Enfin, si G est un schéma semi-abélien sur S muni d'une action i de $\mathcal{O}$, le faisceau localement libre $Lie(G/S) = e^*\Omega_{G/S}^{\otimes -1}$ hérite naturellement de l'action de $\mathcal{O}$, et son type, s'il existe, sera appelé le *type* de (G,i).

3. L'espace de modules des $\mathcal{M}$-structures de niveau N.

3.1. $\mathcal{M}$-structures.

3.1.1.

DÉFINITION PROVISOIRE. Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/D]$. On appelle $\mathcal{M}$-*structure* sur S un triplet (A,ϕ,i) où A est un schéma abélien sur S, de dimension relative 3, ϕ une polarisation principale de A, et i un morphisme d'anneaux de $\mathcal{O}$ dans $\operatorname{End}_S(A)$, tels que

- (1) Le schéma en groupe A sur S est de type $(2,1)$.
- (2) L'involution de Rosati associée à ϕ agit comme la conjugaison complexe sur $i(\mathcal{O})$.

3.1.2. Soit l un nombre premier, S un schéma au-dessus de $\mathcal{O}[1/Dl]$, et (A,ϕ,i) une $\mathcal{M}$-structure sur S.

Le module de Tate $T_l(A)$, défini comme la limite projective sur n des groupes finis $A(\bar{s})[l^n]$ (où $\bar{s}$ est n'importe quel point géométrique de S), est un module libre de rang 6 sur $\mathbb{Z}_l$ et hérite d'une action de $\mathcal{O}$, qui en fait un $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_l = \mathcal{O}_l$-module libre de rang 3. Il hérite par ailleurs, grâce à la polarisation ϕ, d'une forme $\mathbb{Z}_l$-bilinéaire antisymétrique, à valeurs dans $\mu_{l^\infty}(\bar{s}) = \mathbb{Z}_l$ (on suppose fixé un isomorphisme $\mu_{l^\infty} \simeq \mathbb{Z}_l$ sur $\bar{s}$), notée q, ou $<\ ,\ >_q$: l'accouplement de Weil.

D'après le point (2) de la définition 3.1.1, on a, pour tout $\alpha \in \mathcal{O}$, et pour tout $x, y \in T_l(A)$,

$$< \alpha x, y >_q = < x, \bar{\alpha} y >_q \tag{2}$$

Sur un tel module, la donnée d'une forme $\mathbb{Z}_l$–bilinéaire antisymétrique non dégénérée q, vérifiant (2), équivaut à la donnée d'une forme $\mathcal{O}_l$-hermitienne ψ_q non dégénérée, par la formule suivante :

$$\psi_q(x,y) = q(x,\tau y) - \bar{\tau} q(x,y). \tag{3}$$

Ici τ désigne soit $\sqrt{-d}$ soit $(1+\sqrt{-d})/2$, de manière à ce que $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\tau]$ (cf. [**L2**], page 25).

Posons $V_0 = \mathcal{O}^3$, et munissons V_0 de la forme q_0, $\mathbb{Z}$-bilinéaire antisymétrique non dégénérée, vérifiant (2), telle que la matrice de la forme hermitienne associée

ψ_{q_0} dans la base canonique soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose de même

3.1.4. Un *morphisme de $\mathcal{M}$-structures* sur S est un isomorphisme de schémas abéliens, commutant à l'action de $\mathcal{O}$ et à la polarisation.

Si S' est un schéma au dessus de S et si (A, ϕ, i) une $\mathcal{M}$-structure sur S, on vérifie immédiatement qu'on obtient une $\mathcal{M}$-structure sur S' en posant $A' = A \times_S S'$, et en définissant ϕ' et i' sur A' par extension de la base à partir de ϕ et i.

3.2. Structures de niveaux.

3.2.1. *Groupes unitaires.* On définit les schémas en groupes $\mathrm{GU}(2,1)$ et $\mathrm{U}(2,1)$, sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, par les égalités fonctorielles suivantes, valables pour tout anneau A.

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(2,1)(A) &= \operatorname{Aut}_{\mathcal{O}\otimes A}((V_0, \psi_{q_0}) \otimes A) \\ &= \{g \in \mathrm{GL}(V_0 \otimes A);\ \psi_{q_0}(gu, gv) = \psi_{q_0}(u, v)\} \end{aligned}$$

$$\mathrm{GU}(2,1)(A) = \{g \in \mathrm{GL}(V_0 \otimes A); \quad \text{il existe } \mu(g) \in A^* \text{ tel que } \psi_{q_0}(gu, gv) = \mu(g)\psi_{q_0}(u, v)\}.$$

Par ailleurs, on pose

$$\Gamma(N) = \operatorname{Ker}[\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})] \tag{6}$$

et plus généralement, si N divise N',

$$\Gamma(N', N) = \operatorname{Ker}[\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}) \to \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})] \tag{7}$$

Les morphismes (7) sont surjectifs, mais les morphismes (6) ne le sont pas, en général.)

Remarque. Le groupe $\Gamma(1)$ est parfois appelé *groupe modulaire de Picard*

3.2.2. *Structures de niveau N.* La définition d'une $\mathcal{M}$-structure $(\mathbb{A}, \phi, i)$ implique qu'il existe des isomorphismes $(T_l(A), q) \simeq (V_0, q_0) \otimes \mathbb{Z}_l$ pour tout premier l, mais ces isomorphismes ne sont pas *donnés* avec la $\mathcal{M}$-structure. La donnée de tels isomorphismes, modulo N, et *rationnels sur la base*, définira une structure de niveau N. Précisément :

Soit N un entier naturel, S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/DN]$, et (A, ϕ, i) une $\mathcal{M}$-structure sur S.

Définition. (voir [**L1**], page 42, [**G**], 3.1.3, page 1)

Une *structure de niveau N* sur la $\mathcal{M}$-structure (A, ϕ, i) consiste en la donnée d'un couple (σ, τ), où

– i)

$$\sigma : A[N] \to V_0 \otimes \mathcal{O}/N$$

est un isomorphisme de schémas en $\mathcal{O}/N$-modules sur S.

– ii)
$$\tau : \mu_N \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$
est un isomorphisme de schémas en groupes sur S.
– iii) La condition suivante est vérifiée :
$$\tau(q(x,y)) = q_0(\sigma(x), \sigma(y)).$$

On dit encore que $(A, \phi, i, \sigma, \tau)$ est une *$\mathcal{M}$-structure de niveau N*. Un morphisme de $\mathcal{M}$-structures de niveau N est un isomorphisme f entre les $\mathcal{M}$-structures (A, ϕ, i) et (A', ϕ', i') sous-jacentes, qui vérifie $\sigma = \sigma' \circ f$.

Remarques. – 1) Si (σ, τ) est une structure de niveau N, d'après le point iii) de la définition, σ détermine τ. Ceci peut expliquer pourquoi la définition d'un morphisme de $\mathcal{M}$-structures de niveau N ne fait par intervenir τ.
– 2) L'existence d'une $\mathcal{M}$-structure de niveau N sur une base S impose des restrictions assez fortes sur S. Par exemple si $S = \operatorname{Spec} k$ où k est un corps, l'existence de τ suppose que k contiennent les racines N-ièmes de l'unité. Ceci est très naturel : comparer par exemple avec le cas des courbes elliptiques ([**D-R**], page 67)
– 3) La définition de [**L1**], page 42, est formulée de manière incorrecte : elle n'impose aucune condition de rationalité sur les isomorphismes i) et ii), si bien que les $\mathcal{M}$-structures de niveau N au sens de cette définition ne forment pas un champ fppf.

3.2.3. Il est clair que la catégorie des $\mathcal{M}$-structures de niveau N sur une base S variable au dessus de $\mathcal{O}[1/DN]$ forme une catégorie fibrée en groupoïdes sur $\mathcal{O}[1/DN]$ dont on voit facilement qu'elle est un champ fppf. On note $\mathcal{M}_N$ ce champ. Il est naturellement muni d'une action de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$: à une $\mathcal{M}$-structure de niveau N sur S : $(A, \phi, i, \sigma, \tau)$, et à $g \in \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ on associe $(A, \phi, i, g \circ \sigma, \mu(g)\tau)$, où $\mu(g)$ est défini dans 3.2.1.

Théorème 3.2.4 (Larsen). *Le champ $\mathcal{M}_N$ est un champ algébrique (et même, un champ de Deligne-Mumford). Il est connexe, lisse et de dimension relative 2 sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN]$. Pour $N \geq 3$, $\mathcal{M}_N$ est un espace algébrique.*

Le champ $\mathcal{M}_N \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN]} R_N$ jouit de la propriété supplémentaire suivante : ses composantes connexes sont géométriquement irréductibles.

Si N divise N', sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN']$, on a un morphisme naturel d'oubli, fini étale,
$$\mathcal{M}_{N'} \to \mathcal{M}_N$$
qui identifie $\mathcal{M}_N$ au quotient de $\mathcal{M}_{N'}$ par le groupe $\Gamma(N', N)$.

Démonstration — Pour $N = 1$, i.e. sans structure de niveau, l'algébricité du champ $\mathcal{M}$, et l'assertion sur les composantes connexes sont énoncées dans [**L1**], page 34, et démontrées dans [**L2**], pages 20 et 28.

Pour N quelconque, ces deux assertions sont évoquées dans [**L1**], page 42 pour la première, au bas de la page 41 pour la seconde. Elles se démontrent facilement, à partir du cas $N = 1$, en étudiant le morphisme d'oubli $\mathcal{M}_N \to \mathcal{M}_1$.

Enfin l'assertion que $\mathcal{M}_N$ est un espace algébrique, pour $N \geq 3$, découle de la rigidité des $\mathcal{M}$-structures de niveau N, qu'il suffit par des arguments standards de vérifier quand la base S est un corps algébriquement clos, ce qui résulte alors du lemme de Serre (voir par exemple la proposition 17.5 de l'article *Abelian varieties* de Milne dans [**C-S**].) □

Remarque. Pour fixer les idées, rappelons ([**L1**], page 34) que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$ a , sur Spec $\mathcal{O}_{K'}$ palt emen C cm g´ stri u bee. r ste le $\mathcal{M}$ i P 3 e P i e 3 a . E Gm i

Sur une base S quelconque, tout morphisme d'un tore vers un schéma abélien est trivial.

Quand la base est un corps algébriquement clos, il est facile de trouver une référence, voir par exemple [**C-S**], exposé Abelian varieties de Milne, corollaire 3.9.

D'autre part le théorème 5.1 de [**SGA3**], exposé IX réduit l'assertion sur une base quelconque au cas d'un corps algébriquement clos. □

4.1.4. Si (G, i) est une $\mathcal{M}_\infty$-structure sur S, le tore maximal T de G hérite d'après le lemme d'une action de $\mathcal{O}$, qui est de type (1,1) (cf. [**L2**], page 9; les hypothèses sur la base faites *loc. cit.* sont inutiles vue le lemme 4.1.3), et la variété abélienne $E = G/T$ est une courbe elliptique, munie elle aussi d'une action de $\mathcal{O}$, de type (1,0) (i.e. "normalisée", selon la terminologie courante. On obtient donc un foncteur de la catégorie des $\mathcal{M}$-structures sur S vers celles des tores de dimension 2 à multiplication par $\mathcal{O}$ sur S, qu'on appelle Partie-torique, et un autre foncteur vers celle des courbes elliptiques à multiplications complexe par $\mathcal{O}$ sur S, qu'on appelle Partie-elliptique..

4.1.5. Si S est un schéma au dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/D]$, et $S' \to S$ un morphisme, on n'a aucun mal à définir un pullback (G', i') sur S' d'une $\mathcal{M}_\infty$-structure (G, i) sur S. Les $\mathcal{M}_\infty$-structures forment une catégorie fibrée en groupoïdes sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$. On le note $\mathcal{M}_\infty$.

De plus, la formation du tore maximal commute au changement de base par unicité, i.e. $T \times_S S'$ est le tore maximal de $G' = G \times_S S'$. La famille (pour tout S) de foncteurs Partie-torique de 4.1.4 définit donc un 1-morphisme (noté lui aussi Partie-torique) de la catégorie fibré en groupoïdes de $\mathcal{M}_\infty$ vers la catégorie fibré en groupoïde $\mathcal{T}_\mathcal{O}$ des tores de rang 2 avec action de $\mathcal{O}$:

$$\text{Partie-torique}: \ \mathcal{M}_\infty \to \mathcal{T}_\mathcal{O}.$$

De même, la famille (pour tout S) de foncteurs Partie-elliptique de 4.1.4 définit un 1-morphisme (noté lui aussi Partie-elliptique) de la catégorie fibré en groupoïdes de $\mathcal{M}_\infty$ vers la catégorie fibré en groupoïde $\mathcal{E}_\mathcal{O}$ des courbes elliptiques à multiplication complexe par $\mathcal{O}$ (de type (1,0)) :

$$\text{Partie-elliptique}: \ \mathcal{M}_\infty \to \mathcal{E}_\mathcal{O}.$$

Nous commençons par décrire $\mathcal{E}_\mathcal{O}$ et $\mathcal{T}_\mathcal{O}$.

4.1.6. La notion de courbe elliptique à multiplication complexe par $\mathcal{O}$ de type $(1, 0)$, ou *normalisée* garde un sens sur n'importe quel base au dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$: il suffit de demander que l'action des éléments de $\mathcal{O}$ sur $\operatorname{Lie}(E)$ comme scalaires soit la même que leur action induite par la multiplication complexe. Quand D est inversible, on retrouve bien sûr la définition du type $(1, 0)$. On peut donc définir la catégorie fibré $\mathcal{E}_\mathcal{O}$ au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$. Commençons par la décrire au dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$.

Nous allons voir que le champ $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ au dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$ forme naturellement une *gerbe* (cf. [**L-MB**], définition 3.15, page 22) au dessus de la somme disjointe $\mathfrak{E}_{\mathcal{O}}$ de h copies de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$, indéxés par les h valeurs dans $\mathcal{O}_{K'}$ que peut prendre l'invariant j d'une courbe elliptique (sur $\mathbb{C}$) à multiplication complexe par $\mathcal{O}$.

Rappelons que ceci signifie d'abord qu'il y a un 1-morphisme de champs de $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ vers $\mathfrak{E}_{\mathcal{O}}$, i.e. vers la somme de h copies de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$: il y en a un qui est naturel, celui qui pour une base S connexe au dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}$, envoie le S-point défini par une courbe elliptique CM E/S, sur le S-point de $\mathfrak{E}_{\mathcal{O}}$ défini par l'invariant j de la courbe $E_{\bar{s}}$, où $\bar{s}$ est n'importe quel point géométrique de S.

Que ce morphisme fasse de $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ une gerbe au dessus de $\mathfrak{E}_{\mathcal{O}}$ signifie ([**L-MB**], 3.16),

a) d'une part que deux courbes elliptiques (à CM par $\mathcal{O}$) sur une même base ayant même invariant j aux points géométriques sont localement (pour la topologie fppf) isomorphes,
b) d'autre part que pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$ on puisse, localement pour la topolgie fppf, construire sur S une courbe elliptique à multiplication par $\mathcal{O}$ au-dessus de S.

La vérification de b) est évidente, celle de a) résultera du lemme suivant :

LEMME 4.1.7 (Rigidité des courbes elliptiques à multiplication par $\mathcal{O}$). *Soit S' le spectre d'un anneau local et I un idéal de S' de carré nul. On note $j : S \to S'$ la nilimmersion définie par I. Alors la restriction j^* induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des courbes elliptiques à multiplication par $\mathcal{O}$ sur S' et la catégorie analogue sur S.*

Démonstration —

Une méthode consiste à appliquer le théorème de Grothendieck-Messing.

Soit (E, i) une courbe elliptique à multiplication par $\mathcal{O}$ sur S. La cohomologie cristalline associe à E un module $D(E)_S$ sur S, isomorphe à $\mathcal{O}_S^2$. (Voir par exemple [**DJ**], paragraphe 2). Ce module hérite par fonctorialité d'une action de $\mathcal{O}$, et l'on a $D(E)_S = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$ (si D est inversible sur $\mathcal{O}_S$, cette assertion sugnifie simplement que $D(E)_S$ est est de type (1,1).) Pour vérifier ce dernier point, on procède ainsi : le module $D(E)_S$ est muni d'une forme symplectique associée à la polarisation naturelle de E, telle que la transposition sur les isogénies de E corresponde à l'adjonction pour cette forme symplectique sur les endomorphismes de $D(E)$ (*loc. cit.*). Si $c \in \mathcal{O}$, la transposé de l'action $i(c)$ sur E est $i(\bar{c})$. L'action de c sur $D(E)_S$ admet donc pour adjoint l'action de $\bar{c}$. Il suffit alors d'appliquer ceci à $c = \tau$.

On a donc un isomorphisme

$$D(E)_S \simeq \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S,$$

tel que l'action de $c \in \mathcal{O}_S$ soit celle du scalaire c sur le premier facteur, et celle de $\bar{c}$ sur le second.

La nilimmersion $S \to S'$ étant supposée munie de sa structure de puissances divisées triviale, on dispose aussi du module $D(E)_{S'}$ sur S', isomorphe à $\mathcal{O}_S^2$ (*loc. cit.*), et héritant lui aussi d'une $\mathcal{O}$-action de type (1,1). De plus, on a un isomorphisme canonique (et en particulier compatible aux actions de $\mathcal{O}$) $D(E)_{S'} \times_{S'} S \simeq D(E)_S$, où le morphisme $S \to S'$ impliqué dans le produit fibré est l'immersion j. Il est clair qu'on peut écrire

$$D(E)_{S'} \simeq \mathcal{O}_{S'} \oplus \mathcal{O}_{S'},$$

avec l'action de $\mathcal{O}$ de type (1,0) sur le premier facteur, (0,1) sur le second, et de manière compatible pour la restriction à S avec l'écriture analogue de $D(E)_S$.

Par ailleurs, la cohomologie cristalline réalise le module des formes différentielles de E, ω_E comme un sous-module de $D(E)_S$ localement libre de rang 1, facteur direct, et stable par $\mathcal{O}$. Ce module est isomorphe au module des formes différentielles globales de E (loc. cit.) et est donc de type (1,0). Dans l'écriture $D(E)_S = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S$, ω_S s'identifie donc au premier facteur.

Le théorème de Grothendieck-Messing implique (*loc. cit.*, théorème 2.1) que la catégorie des courbes elliptiques à multiplication par $\mathcal{O}$ sur S' dont la restriction à S est munie d'un isomorphisme à (E, i) est isomorphe à la catégorie des sous-modules (localement libres et facteurs directs de rang 1) de $D(E)_{S'}$ stable par $\mathcal{O}$, se restreignant en ω_E. Or il est clair que cette dernière catégorie est ponctuelle : un seul objet, le premier facteur de $D(E)_{S'} = \mathcal{O}_{S'} \oplus \mathcal{O}_{S'}$. □

Pour vérifier a) à partir du lemme, soit E et E' deux courbes elliptique à multiplication par $\mathcal{O}$ normaliseée sur S, ayant les mêmes invariants j en tous points géométriques. Soit $\bar{s}$ un point géométrique de s, $A_{\bar{s}}$ le henselisé strict de l'anneau local de S en ce point, et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Alors le lemme permet de construire, par récurrence sur n, des isomorphismes de E sur E' restreints à $A_{\bar{s}}/\mathfrak{m}^n$, compatibles entre eux. Par propreté des courbes elliptiques, on obtient un isomorphisme sur $A_{\bar{s}}$. Mais les $A_{\bar{s}}$ recouvrent S et sont plats sur S, et des arguments standard montrent qlors que E et E' sont isomorphes sur un recouvrement fppf de S..

4.1.8. Ainsi, $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ est bien une gerbe sur $\mathfrak{E}_{\mathcal{O}}$. De plus, c'est une gerbe neutre (cf. [**L-MB**], définition 3.20), ce qui signfie que le morphisme $\mathcal{E}_{\mathcal{O}} \to \mathfrak{E}_{\mathcal{O}}$ admet une section, i.e. qu'il existe pour chaque j comme plus haut une courbe elliptique à multiplication par $\mathcal{O}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$. Il y a pas de choix canonique d'une telle courbe elliptique, donc de section : pour un j donné, les courbes elliptiques correspondent aux caractères χ continus sur les idèles de K', à valeur dans K^*, et prolongeant la norme galoisienne de K' vers K sur les idèles principaux. (cf. [**G**], théorème 9.1.3). Pour obtenir une section, choisir un tel caractère χ, obtenir une courbe E_χ sur K', et prolonger cette courbe sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ grâce à la théorie de la bonne réduction.

De cela, et du lemme 3.21 de [**L-MB**], on tire facilement que $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ est isomorphe, sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ au champ $B(\mathfrak{E}_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}^*)$, $\mathcal{O}^*$ agissant trivialement. En particulier c'est

un champ algébrique de Deligne-Mumford, et son espace grossier associé est $\mathfrak{E}_{\mathcal{O}}$, i.e. une union fini de h "points".

4.1.9. Par descente étale, on en déduit que $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ est aussi un champ algébrique (de Deligne-Mumford) sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$. Nous n'essairons pas de le décrire.

4.1.10. De la même façon, mais en utilisant la rigidité des tores au lieu du lemme précédent. on montrerait que le champ $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}_K$ (ou même sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, si l'on voulait) est une gerbe neutre sur le schéma $\mathfrak{T}$ constitué de h copies de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_H$ indéxés par C_K, et que $\mathcal{T} \simeq B(\mathfrak{T}/\mathcal{O}^*)$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford, d'espace grossier associé $\mathfrak{T}$.

Notons que contrairement au cas de $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{O}} \to \mathfrak{T}$ admet une section canonique, qui correspond aux choix de tores *scindés*.

Revenons maintenant à $\mathcal{M}_\infty$.

Lemme 4.1.11. *Le $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$-groupoïde $\mathcal{M}_\infty$ est un champ fppf.*

Démonstration — Si G est une $\mathcal{M}_\infty$-structure, de tore maximal T, et $G/T = E$, en notant p la projection de G sur E, on peut définir un faisceau inversible $\mathcal{L}_G$ sur G en posant :

$$\mathcal{L}_G = p^*\mathcal{L}_E,$$

où $\mathcal{L}_E$ est le faisceau inversible correspondant au diviseur de Cartier de la section nulle de E, ou si l'on veut, le faisceau inversible correspondant à la polarisation principale canonique de E.

Le faisceau $\mathcal{L}_E$ est ample sur S et la projection p est affine, si bien que $\mathcal{L}_G$ est ample. De plus, $\mathcal{L}_G$ est canonique, au sens où si G' est une autre $\mathcal{M}_\infty$-structure sur la même base, et f un morphisme (i.e. un isomorphisme) de G sur G', $f^*\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_{G'}$. La formation de $\mathcal{L}_G$ commute à tout changement de base.

Le lemme résulte alors de la théorie de la descente fppf de [**SGA1**], VIII, et tout spécialement pour montrer que les données de descentes sont effectives, du point VIII.7.8. □

4.1.12. Nous allons maintenant décrire présisément le champ (qui s'avèrera un champ algébrique de Deligne-Mumford) $\mathcal{M}_\infty$. Le foncteur

$$\text{Partie-torique} \times \text{Partie-elliptique}$$

permet de décomposer le champ $\mathcal{M}_\infty$ en h^2 composantes fermées-ouvertes ; considérons l'une d'entre elles, image réciproque de la composante de $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ correspondant à un invariant j et de la composante de $\mathcal{T}$ correspondant à un élément $c \in C_K$: nous la noterons ${\mathcal{M}_\infty}^{j,c}$.

Proposition 4.1.13. *Le champ ${\mathcal{M}_\infty}^{j,c}$ est isomorphe au champ*

$$[E_{c(j)}/\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K'}] \quad \textit{(voir } [\textbf{L-MB}]\textit{,2.4.2).}$$

Ici $c(j)$ désigne l'image de l'invariant j dans $\mathcal{O}_K$ par l'élémnt c du groupe de Galois C_K, et E_{cj} désigne n'importe laqelle des courbes elliptiques à multiplication par $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}_{K'}$, d'invariant cj. L'action du groupe $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$, vu comme schéma en groupes constant sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$, sur E_{cj} envisagée ici consiste à faire agir $(x, y) \in \mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$ par $i(x)i(y)$ où i est la multiplication complexe de E_{cj}.

En particuler ${\mathcal{M}_\infty}^{j,c}$ et $\mathcal{M}_\infty$ sont bien des champs de Deligne-Mumford.

Remarque. La proposition implique (et sa preuve prouvera au passage) que le quotient $[E_{c(j)}/\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}]$ ne dépend pas de la courbe elliptique sur $\mathcal{O}_K$ d'invariant $c(j)$ choisie.

Démonstration — Nous allons prouver la proposition à la main, c'est à dire que nous allons construire, pour tout schéma U au dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ une équivalence canonique et fonctorielle en U entre les catégories fibres $({\mathcal{M}_\infty}^{j,c}(U))$ et $[E_{c(j)}/\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}]_U$.

Comme on sait que ${\mathcal{M}_\infty}^{j,c}$ est un champ fppf, et qu'il en va de même de $[E_{c(j)}/\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}]$, il suffit de procéder à ces constructions localement pour la topologie fppf sur U.

Plus précisément, convenons d'appeler objet *scindé* de la catégorie ${\mathcal{M}_\infty}^{j,c}$ toute $\mathcal{M}_\infty$-structure dont le tore est scindée, et la courbe elliptique associée constante. Tout objet de ${\mathcal{M}_\infty}^{j,c}$ est localement scindé sur U. Un objet scindé consiste simplement en la donnée

- i) d'un tore T, scindé sur U à multiplication sur $\mathcal{O}$,
  de type c.
- ii) d'une courbe elliptique sur U à multiplication par $\mathcal{O}$, d'invariant j, qui est isomorphe à $E_j \times U$ sur U, E_j étant la courbe sur $\mathcal{O}_{K'}$ d'invariant j choisie une fois pour toutes.
- iii) d'une extension de E par T, qu'on peut munir d'une action de $\mathcal{O}$ et d'une structure de groupes compatibles avec celles de E et T, nécessairement de manière unique.

Notons $\operatorname{Bonnext}(E, T)$ l'ensemble des données iii). A vrai dire, $\operatorname{Bonnext}(E, T)$ a une structure naturelle de catégorie, les morphismes étant les isomorphismes d'extensions compatibles aux autres données, mais cette catégorie est rigide, ce qui revient à dire qu'un automorphisme de $\mathcal{M}_\infty$-structure qui induit l'identité sur sa partie torique et elliptique est l'identité ; sous cette forme l'assertion est évidente et laissée au lecteur.

L'ensemble $\operatorname{Bonnext}(E, T)$ dépend fonctoriellement (de manière covariante) de T et (de manière contravriante) de E. Ceci résulte de la fonctorialité bien connue de $\operatorname{Ext}^1(E, T)$, dont $\operatorname{Bonnext}(E, T)$ est un sous-ensemble, et du fait qu'étant donné un morphisme $T \to T'$ (on raisonnerait de même pour $E' \to E$), l'image dans $\operatorname{Ext}^1(E, T')$ d'un élément de $\operatorname{Bonnext}(E, T)$ hérite naturellement d'une structure

de groupe et d'une $\mathcal{O}$-action, par transport de structure, et est donc un élément de $\mathrm{Bonnext}(E, T')$.

L'ensemble $\mathrm{Bonnext}(E, T)$ est déterminé par Larsen, dans les 10 premières lignes de la page 10 : on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Bonnext}(E, T) \simeq E_{j(c)}.$$

On vérifie facilement une forme de compatibilité de cet isomorphisme avec la fonctorialité, à savoir que l'action de $\mathcal{O}^*$ sur $\mathrm{Bonnext}(E, T)$ par fonctorialité en E (resp. en T) est compatible avec l'action de $\mathcal{O}^*$ sur $E_{j(c)}$.

Maintenant que nous comprenons bien les objets scindés de $\mathcal{M}_{\infty j,c}(U)$, déterminons les morphismes (= les isomorphismes), entre deux tels objets. La donnée d'un isomorphise ϕ de G vers G' détermine, d'après 4.1.4, un isomorphisme des parties toriques $\phi_T : T \to T'$ et elliptiques $\phi_E : E \to E'$. La remarque sur la rigidité de la catégorie $\mathrm{Bonnext}(E, T)$ montre que le couple (ϕ_T, ϕ_E) détermine uniquement ϕ. Enfin, pour qu'un couple (ϕ_T, ϕ_E) provienne ainsi d'un isomorphisme ϕ, il faut et il suffit que l'application induite par (ϕ_T, ϕ_E) de $\mathrm{Bonnext}(E, T)$ vers $\mathrm{Bonnext}(E', T')$ envoie l'élément $g \in \mathrm{Bonnext}(E, T)$ correspondant à G sur l'élément $g' \in \mathrm{Bonnext}(E', T')$ correspondant à G'.

En particulier, les classes d'isomorphismes d'objets scindés sont les orbites de $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$ dans $E_{j(c)}(U)$, et les automorphismes des objets d'une telle classe forment le sous-groupe de $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$ qui stabilise n'importe quel point de cet orbite. □

Remarques. – La proposition qui précède corrige le lemme erroné de [**L2**], page 9.

– La preuve de la proposition montre aussi que le morphisme Partie-torique × Partie-elliptique est schématique (voir [**L-MB**], définition 3.9).

Autrement dit, pour tout schéma S, pour toute courbe elliptique E/S et pour tore de dimension 1 T/S, le S-champ $\S_2(E, T, S)$ classifiant les variétés semi-abéliennes sur S de tore maximal (à multiplication par $\mathcal{O}$) T et de courbe elliptique (à multiplication par $\mathcal{O}$) E (précisément : le champ dont la fibre en S'/S est la catégorie des variétés semi-abéliennes muni d'un S'-isomorphisme de leur tore maximal vers $T \times_S S'$ et de leur courbe elliptique vers $E \times S'$) est un schéma, et même une courbe à multiplication par $\mathcal{O}$ d'invariant cj.

Corollaire 4.1.14. *L'espace de module grossier associé à $\mathcal{M}_{\infty j,c}$ est la droite projective.*

Démonstration — D'après [**D-R**], I.8.2.2, l'espace grossier associé à

$$[E_{c(j)}/\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*/\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K]$$

est le quotient $E_{c(j)}/\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^* = E_{c(j)}/\mathcal{O}^*$ dans la catégorie des schémas sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$. C'est donc une courbe C, dont on peut calculer le genre (fibre géométrique à fibre géométrique) par la formule de Hurwitz : dans le cas où $\mathcal{O}^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, par exemple, le morphisme $E_{c(j)} \to C$ a 4 points ramifiés d'ordre de ramification 2, à savoir les quatres points d'ordre 2 de $E_{c(j)}$. On obtient donc $0 = 2g_E - 2 = 2(2g_C - 2) + 4$ d'où $g_C = 0$. On fait exactement de même dans les cas où $\mathcal{O}^* = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. □

4.2. Structures de niveau.

4.2.1. Les $\mathcal{M}_\infty$-structures ont elles aussi leurs structures de niveau (voir [**L1**], page 43). Si (G, i) est une $\mathcal{M}_\infty$-structure sur S (schéma au dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN]$) une *structure de niveau* N sur (G, i) consiste en la donnée, si T est le tore maximal de G et $E = G/T$,

- (i) d'un isomorphisme de $\mathcal{O}$-module $T[N] \simeq \mathcal{O}/N$;
- (ii) d'un isomorphisme de $\mathcal{O}$-module $E[N] \simeq \mathcal{O}/N$;
- (iii) d'une section $E[N] \to G[N]$ de la suite exacte

$$0 \to T[N] \to G[N] \to E[N] \to 0$$

La notion de morphisme de $\mathcal{M}_\infty$-structures de niveau N est évidente, ainsi que la vérification du fait que les $\mathcal{M}_\infty$-structures de niveau N forment un champ fppf, noté $\mathcal{M}_{\infty,N}$.

Lemme 4.2.2. *Si N divise N', sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN']$, le morphisme d'oubli $\mathcal{M}_{\infty,N'} \to \mathcal{M}_{\infty,N}$ est schématique et étale fini.*

Démonstration — Évident. □

Proposition 4.2.3. *Si $N \geq 3$, le champ $\mathcal{M}_{\infty,N}$ sur $\operatorname{Spec} R_N$ est un schéma, union disjointe de courbes elliptiques à multiplication par $\mathcal{O}$. Si $N = 1$ ou 2, $\mathcal{M}_{\infty,N}$ est un champ de Deligne-Mumford, union disjointe de quotients de courbes elliptiques à multiplication par $\mathcal{O}$, par des groupes constants finis sur R_N ; les espaces grossiers associés à ces composantes sont des droites projectives.*

Démonstration — Si $N \geq 3$, remarquons tout d'abord que le problème de module est rigide. Cela découle en effet de la rigidité des courbes elliptiques avec structure principale de niveau 3, de la rigidité des tores de dimension 2 quand la 3-torsion est fixé, et du fait qu'un automorphisme de $\mathcal{M}_\infty$-structure qui induit l'identité sur ses parties toriques et elliptiques est l'identité, fait remarqué plus haut.

Le champ $\mathcal{M}_{\infty N}$, qui est algébrique de Deligne-Mumford d'après le lemme, est donc un espace algébrique si $N \geq 3$, et comme il est propre et lisse de dimension 1 c'est un schéma, dont on vérifie facilement (directement) qu'il est union disjonte de courbes elliptiques CM.

Si $N = 1$, on est dans le cas des $\mathcal{M}_\infty$-structures ordinaires, déja traitée dans la proposition 4.1.13. Le cas $N = 2$ se traite de même. □

5. Compactifications et corollaires

5.1. Compactification toroïdale.

THÉORÈME 5.1.1 (Compactification lisse). *Soit $N \geq 1$. Il existe un champ algébrique (de Deligne-Mumford) $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN]$, un schéma en groupes G sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$, muni d'une action i de $\mathcal{O}$, et un morphisme $\mathcal{M}_N \to \widetilde{\mathcal{M}_N}$ tels que*

- *1) Le champ $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ est propre, lisse, et de dimension relative 2 sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN]$.*
- *2) Le morphisme $\mathcal{M}_N \to \widetilde{\mathcal{M}_N}$ est une immersion ouverte.*
- *3) La restriction de (G, i) à $\mathcal{M}_N$ est le schéma abélien à multiplication par $\mathcal{O}$ universel au dessus de $\mathcal{M}_N$.*
- *4) Le bord $D_N = \widetilde{\mathcal{M}_N} - \mathcal{M}_N$ est un champ algébrique (de Deligne-Mumford) propre, lisse et de dimension relative 1. Il est isomorphe à $\mathcal{M}_{\infty,N}$ et la restriction de (G, i) à D est la $\mathcal{M}_\infty$ structure universelle sur $\mathcal{M}_{\infty,N}$.*

Après extension des scalaires de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN]$ à $\operatorname{Spec} R_N$, $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ jouit des propriétés supplémentaires suivantes.

- *5) Les composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{M}_N} \times \operatorname{Spec} R_N$ (resp. de D_N) sont géométriquement irréductibles.*

PROPOSITION 5.1.2. *Soit N et N' deux entiers ≥ 1, et supposons que N divise N'. Alors le morphisme $\mathcal{M}_{N'} \to \mathcal{M}_N$ admet un unique prolongement $\widetilde{\mathcal{M}_{N'}} \to \widetilde{\mathcal{M}_N}$. Ce prolongement est fini et plat, et il fait de $\widetilde{\mathcal{M}_{N'}}$ le normalisé de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ dans $\mathcal{M}_{N'}$.*

Rappelons comment procède Larsen pour construire $\widetilde{\mathcal{M}}$, avec les légères modifications qui s'imposent pour tenir compte de la description correcte de $\mathcal{M}_\infty$.

5.1.3. Pour toute composante (c, j) de $\mathcal{M}_\infty$, on *choisit* une courbe elliptique sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ d'invariant $c(j)$, de manière à ce que $c \cdot E_j = E_{c(j)}$.

Le morphisme (sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$) de la proposition 4.1.13

$$E_{c(j)} \to \mathcal{M}_\infty^{j,c}$$

définit une $\mathcal{M}_\infty$-structure $(\widetilde{G}, i)$ sur $E_{c(j)}$ dont la partie torique est un tore de type c et la partie elliptique est (en tout point géométrique) d'invariant j.

5.1.4. Larsen associe, à cette situation, à l'aide de la polarisation canonique de E_j, un faisceau inversible $\mathcal{L}$ (dépendant de (j, c), et pas seulement de $c(j)$ mais nous ne le marquerons pas dans les notations) sur $E_{c(j)}$: cf. page 39, premier paragraphe de [**L1**], plus clair que [**L2**], page 15.

5.1.5. Notons L l'espace total du fibré associé à $\mathcal{L}$ sur $E_{c(j)}$ et $\hat{L}$ son complété formel le long de la section nulle. La $\mathcal{M}_\infty$-structure $(\widetilde{G}, i)$ s'étend par extension de la base en une $\mathcal{M}_\infty$-structure à $\hat{L}$, encore notée $(\widetilde{G}, i)$ et Larsen construit, à l'aide de la construction de Mumford (convenablement généralisée par [**C-F**]), un schéma semi-abélien $(\check{G}, i)$ de dimension relative 3 sur $\hat{L}$, qui est isomorphe à $(\widetilde{G}, i)$ sur la section nulle $E_{c(j)}$, et qui est "génériquement abélien et muni d'une polarisation".

[Il faut que je précise ce que cela signifie, car un schéma formel n'a, et c'est bien dommage, pas de point générique. J'entends par là que pour tout ouvert affine U de L rencontrant $E_{c(j)}$, si l'on note $\hat{U}$ le *schéma* (et non le schéma formel) spectre du complété de l'anneau de U par rapport à l'idéal du fermé $E_{c,j} \cap U$, il existe un (nécessairement unique) schéma semi-abélien sur $\hat{U}$ de fibre générique abélienne et muni d'une polarisation canonique, dont la restriction à l'espace annelé $\hat{L}_{|E\cap U}$ est $(\check{G}, i)$. Ouf!]

Cela est démontré par Larsen, *loc. cit.* . (Localement, i.e. avec les $\hat{U}$, mais il est clair par fonctorialité qu'on obtient par recollement un objet global sur $\hat{L}$)

5.1.6. Larsen montre alors (à l'aide du théorème d'approximation d'Artin - [**L2**] page 21, qui n'est pas très clair, mais qui semble correct. Mais que désigne donc exactement $\widetilde{R}$ de *loc. cit*?) qu'on peut trouver des anneaux strictement henseliens (R_α), munis d'un morphsime de type fini vers L, avec des variétés semi-abéliennes (G_α, i) sur chaque R_α vérifiant

- (i) si $\widehat{R_\alpha}$ est le complété formel de R_α par rapport à l'idéal de l'image inverse de la section nulle de L sur $\operatorname{Spec} R_\alpha$, alors le morphisme induit $\widehat{R_\alpha} \to \hat{L}$ est formellement étale.
- (ii) Les variétés semi-abéliennes sur $\widehat{R_\alpha}$ obtenues par extension des scalaires à partir de la variété semi-abélienne (G_α, i) sur R_α et d'autre part, à partir de $(\check{G}, i)$ sur $\hat{L}$ coïncident.

5.1.7. On peut recouvrir $E_{c(j)}$ par un nombre fini de $\operatorname{Spec} R_\alpha$; en recommançant pour chaque couple (c, j), on obtient encore un nombre fini de tels R_α, et l'on pose

$$\mathrm{U}_2 = \coprod \operatorname{Spec} R_\alpha.$$

Notons U_2^∞ la section nulle (qui correspond à la partie à l'infini de l'espace de modules, soit dit en passant pour justifier la notation) de U_2, i.e. la somme disjointe des images inverses de la section nulle de L par les morphismes $R_\alpha \to L$. Notons U_2^0 le complémentaire de U_2^∞ dans U_2.

Notons U_1 un schéma affine étale et surjectif sur $\mathcal{M}$, et posons

$$\nu = \mathrm{U}_1 \coprod \mathrm{U}_2,$$

$$\nu^\infty = \mathrm{U}_2^\infty,$$

$$\nu^0 = \mathrm{U}_1 \coprod \mathrm{U}_2^0,$$

Sur ν^0 on dispose d'une variété abélienne (G, i) avec une polarisation ϕ. On peut définir le schéma

$$T^0 := \underline{Isom}_{\nu^0 \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/D]} \nu^0}(\mathrm{pr}_1^*(G, i, \phi), \mathrm{pr}_2^*(G, i, \phi)).$$

Notons que T^0 est représentable d'après la théorie de schéma de Hilbert, applicable grâce à la projectivité de G sur ν^0 (c'est ce qui empêche de faire la même construction directement sur U), qu'il est muni d'un morphisme naturel $T^0 \to \nu^0 \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/D]} \nu^0$, et qu'intuitivement il représente le graphe de la relation d'équivalence sur U_0 : $x\mathcal{R}y$ ssi (G_x, i_x, ϕ_x) et (G_y, i_y, ϕ_y) sont isomorphes. Notons aussi qu'on a pris le produit fibré sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/D]$, et non sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}[1/D]$ comme semble le faire Larsen.

5.1.8. On note T la normalisation de $\nu \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/D]} \nu$ dons T^0. Larsen montre (pages 22-23) que les deux flèches $T \to \nu$ sont étales. Comme il est clair que $T \to \nu \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/D]} \nu$ est fini, et que T est un relation d'équivalence (cf. page 23) il existe bien, (par [**L-MB**], proposition 4.3.1) un champ quotient U/T, noté $\widetilde{\mathcal{M}}$, qui par construction contient $\mathcal{M}$ comme un ouvert, de complémentaire un champ lisse de dimension relative 1 – puisque ces propriétés se lisent sur un revêtement étale de ce complémentaire, à savoir U^∞.

Larsen montre que le schéma semi-abélien à multiplication complexe par $\mathcal{O}$, (G, i) descend en un schéma (G, i) sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ qui par construction prolonge le schéma abélien universel et sa multiplication complexe sur i, et est une $\mathcal{M}_\infty$-structure sur $\widetilde{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$. Il montre enfin que $\widetilde{\mathcal{M}}$ est propre sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ (pages 23-24).

5.1.9. Ceci prouve, pour $N = 1$, les points 1) à 3) du théorème, une partie de 4). La partie non respée du point 5) est prouvée dans [**L2**], page 28, à l'aide de la théorie transcendante). Pour prouver le reste, notons le lemme suivant, qui d'ailleurs est intéressant en soi.

LEMME 5.1.10. I) *Soit R une $\mathcal{O}_{K'}[1/D]$-algèbre, normale, locale, complète et strictement henselienne. Soit G une varieté semi-abélienne de dimension 3 sur $\operatorname{Spec} R$ avec action i de $\mathcal{O}$, et muni de plus d'une polarisation sur la fibre principale qui en fait une $\mathcal{M}$-structure. Alors il existe un morphsime*

$$\operatorname{Spec} R \to \nu,$$

qui envoie le point générique dans U^0, et pour lequel (G, i) (et la polarisation là où elle est définie) sont isomorphes au pull-back de (G, i) sur ν (et de la polarisation).

II) *Soit S un champ algébrique de Deligne-Mumford normal au dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}[1/D]$, et (G, i) un schéma semi-abélien de dimension 3 avec action de $\mathcal{O}$ sur S, muni d'une polarisation sur sa fibre générique qui en fait une $\mathcal{M}$-structure. Alors il existe un unique 1-morphisme de champs $S \to \widetilde{\mathcal{M}}$ tel que (G, i) sur S soit le pull-back de (G, i) sur $\widetilde{\mathcal{M}}$.*

REMARQUES. – Dans le cas où R est de dimension 1, donc de valuation discrète, le point I) est prouvé par Larsen ([**L2**], dernier paragraphe de la page 23 et début de la page 24.) C'est d'ailleurs l'ingrédient essentiel, avec le théorème de réduction potentiellement semi-stable de Grothendieck, de la preuve de la propreté de $\widetilde{\mathcal{M}}$.

– Comparer (respectivement) le point I) avec le proposition IV.5.1 de [**C-F**], et le point II) avec le point (5) du théorème IV.5.7. On voit que dans le cas de la compactification des espaces de Siegel, il faut des conditions supplémentaires, de nature combinatoire, pour que l'analogue du lemme soit vraie. C'est parce que la combinatoire est triviale dans le cas des surfaces modulaires de Picard que le lemme est vrai sans hypothèses supplémentaires, et pas seulement dans le cas où R est de valuation discrète.

Démonstration — I) se prouve comme la propsition IV.5.1 de [**C-F**].

Si l'on prouve II) dans le cas où S est un schéma, on l'aura aussi pour S quelconque car l'unicité rend la propriété à démontrer locale pour la topologie étale et un champ algébrique normal est localement isomorphe à un schéma normal. Dans le cas d'un schéma, II) découle de I) exactement de la même manière que IV.5.7.5 découle de IV.5.1 dans [**C-F**]. □

5.1.11. Soit

$$D_1 := \widetilde{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$$

le bord de la compactification de Larsen. On veut montrer, sur $\mathcal{O}[1/D]$, que D_1 est isomorphe à $\mathcal{M}_\infty$. La restriction de (G, i) à D_1 est une $\mathcal{M}_\infty$-structure, qui définit donc un 1-morphisme sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/D]$

$$D_1 \to \mathcal{M}_\infty.$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme de champ, il suffit de le faire sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}[1/D]$, d'après la théorie de la descente étale (cet énoncé, qui serait tout à fait standard si $\mathcal{M}_\infty$ et D_1 était des schémas, est encore vrai pour des champs, comme on peut facilement s'en convaincre).

5.1.12. On se place donc sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}[1/D]$, et on reprend les notations du paragraphe 5.1.3. La $\mathcal{M}_\infty$-structure $(\widetilde{G}, i)$ sur $E_{c(j)}$ est munie d'une donnée descente relative à l'action de $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$ sur $E_{c(j)}$, puisqu'elle provient par extension des scalaires de $\mathcal{M}_\infty^{j,c}$. Par fonctorialité de $\mathcal{L}$ par rapport à $(\widetilde{G}, i)$, le schéma L et le schéma formel $\hat{L}$ héritent aussi d'une action de $\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*$, et la $\mathcal{M}_\infty$-structure $(\widetilde{G}, i)$ sur ceux-ci d'une donnée de descente compatible à cette action. D'après les résultats généraux de [**C-F**], chapitre 3, de fonctorialité de la construction de Mumford, le schéma semi-abélien (G, i) sur $\hat{L}$ avec sa polarisation (là ou elle est définie) hérite elle aussi de cette donnée de descente. On obtient donc une schéma semi-abélien (G, i) sur le champ formel $[\hat{L}/\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*]$.

[Ou, si l'on préfère éviter ce genre d'objet, et si l'on souhaite être plus précis : pour tout ouvert affine U de L qui rencontre la section nulle, stable par l'action de $\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*$ - et il existe un recouvrement de L par de tels ouverts, on obtient par descente des schémas semi-abélien (G, i) sur $[\hat{U}/\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*]$, avec des polarisations sur l'image du complémentaire de la section nulle.]

Par le lemme précédent, point II), on obtient un morphisme $[\hat{L}/\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*]$ vers $\widetilde{\mathcal{M}}$, tel que (G, i) sur l'espace de départ soit le pull-back du (G, i) sur l'espace d'arrivée [Il serait plus rigoureux, mais moins parlant, d'appliquer le lemme à chacun des champs algébriques de Deligne Mumford $[\hat{U}/\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*]$ plutôt qu'au champ formel $\hat{L}$]. Il est clair que ce morphisme envoie le sous-champ fermé $\mathcal{M}_\infty^{j,c} = [E_{c(j)}/\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*]$ de $[\hat{L}/\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*]$ sur le bord D_1 de $\widetilde{\mathcal{M}}$. En appliquant ceci à tous les couples (c, j), on obtient un morphisme

$$\mathcal{M}_\infty \to D_1$$

qui est clairement un inverse sur $\mathcal{O}_{K'}$ du morphisme $D_1 \to \mathcal{M}_\infty$ construit plus haut.

Ceci termine la preuve du point 4) du théorème dans le cas $N = 1$. La partie respée du point 5) découle alors de la proposition 4.1.13

5.1.13. Nous laissons au lecteur intéressé le soin d'adapter la preuve du théorème au cas $N \geq 1$ en s'inspirant du cas analogue [**C-F**], V.6, et de prouver la proposition.

5.2. La compactification minimale de $\mathcal{M}_N$.

5.2.1. Un corollaire du théorème précédent est l'existence d'une version arithmétique de la compactification minimale, ou de Satake-Baily-Borel, de $\mathcal{M}_N$.

THÉORÈME 5.2.2 (Larsen). *Il existe un schéma normal, projectif $\mathcal{M}_N^*$ sur Spec R_N et un R_N-morphisme $\widetilde{\mathcal{M}_N} \xrightarrow{f} \mathcal{M}_N^*$ tel que, si $\mathfrak{M}_N$ désigne l'espace grossier associer à $\mathcal{M}_N$ (et donc $\mathfrak{M}_N = \mathcal{M}_n$ si $N \geq 3$) :*

- *1) Il existe une immersion ouverte $\mathfrak{M}_N \subset \mathcal{M}_N^*$ compatible avec f et l'inclusion de $\mathcal{M}_N$ dans $\widetilde{\mathcal{M}_N}$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_N & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}_N} \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathfrak{M}_N & \longrightarrow & \mathcal{M}_N^* \end{array}$$

- *3) Le bord $\mathcal{M}_N^* - \mathfrak{M}_N$ est une union disjointe de points (un pour chaque composante de D_N).*

Démonstration — Le théorème est un corollaire facile du théorème précédent et des résultats de Moret-Bailly sur la positivité de l'image directe du faisceau canonique pour un pinceau de variétés semi-abéliennes.

Le théorème est énoncé, pour le cas $N = 1$, dans [**L1**], page 35, et démontré dans [**L2**], page 28. (L'énoncé est dans les deux cas légèrement incorrect, puisqu'il prétend plonger $\mathcal{M}$ – et non son espace grossier associé – comme un ouvert de $\mathcal{M}^*$. Mais la preuve est correcte). La preuve pour N quelconque se fait de même. Le lecteur pourra aussi consulter [**C-F**], théorème V.2.5, page 153. □

5.2.3.

Remarques. – i) Les espaces $\mathcal{M}_N$ quand $N \geq 3$ sont des schémas quasi-projectifs, comme ouverts de $\mathcal{M}_N^*$.

– ii) Nous montrons dans la partie suivante qu'il en va de même pour $\widetilde{\mathcal{M}_N}$, $N \geq 3$. En attendant, remarquons déja qu'après extension de la base à un corps, $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ est un espace algébrique propre et lisse de dimension 2 sur un corps, donc est une surface, i.e. une variété algébrique de dimension 2 au sens usuel du terme.

5.3. Schématicité de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$, $N \geq 3$.

5.3.1. *Un lemme sur la projectivité des espaces algébriques.* Commençons par généraliser une construction bien connue ([**EGA**], II.6.5) pour la catégorie des schémas à celle des espaces algébriques : *la norme des faisceaux inversibles.*

Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et plat d'espaces algébriques noethériens, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Sur le site étale des schémas au-dessus de Y (i.e. la catégorie des schémas U munis d'un morphisme d'espace algébrique de U vers Y, les flèches de U_1 vers U_2 étant les morphismes de schéma au-dessus de Y qui sont étales, cette catégorie étant munie de la topologie de Grothendick étale), on définit un préfaisceau

$$N_{X/Y}(\mathcal{L}) : U \to H^0(U, N_{X \times_Y U/U}(\mathcal{L})).$$

Pour compremdre la définition précédente, il faut avoir noté les faits suivants: U étant un schéma, et $X \times_Y U$ fini sur U, $X \times_Y U$ est aussi un schéma; le foncteur $N_{X \times_Y U/U}$ est alors celui défini dans [**EGA**], II.6.5.5.1 (on est dans le cas de l'hypothèse (I) de *op. cit.*, II.6.5.1, car f est plat); enfin, si $\phi : U_1 \to U_2$ est une flèche étale, $N_{X/Y}(\mathcal{L})(\phi)$ est la flèche naturelle

$$\begin{aligned} H^0(U_2, N_{X \times_Y U_2/U_2}(\mathcal{L})) &\to H^0(U_1, \phi^* N_{X \times_Y U_2/U_2}(\mathcal{L})) \\ &= H^0(U_1, N_{X \times_Y U_1/U_1}(\mathcal{L})), \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de ce que la formation de $N_{X/Y}(\mathcal{L})$ commute au changement de base sur Y (*loc. cit.*, II.6.5.8).

On voit de plus que le préfaisceau $N_{X \times_Y U}(\mathcal{L})$ est en fait un faisceau : cela découle immédiatiement, compte-tenu de l'égalité

$$H^0(U_1, \phi^* N_{X \times_Y U_2/U_2}(\mathcal{L})) = H^0(U_1, N_{X \times_Y U_1/U_1}(\mathcal{L}))$$

sus-mentionnée, du fait que $N_{X\times_Y U_1/U_1}(\mathcal{L})$ est un faisceau Zariski cohérent, donc un faisceau étale cohérent.

Comme par définition ou presque ([**KN**], page 103) un faisceau sur le site étale des schémas sur Y s'identifie à un faisceau (étale) sur Y, on voit qu'on a bien défini un faisceau $N_{X/Y}(\mathcal{L})$, qui est clairement inversible, et qui est appelé, si personne n'y voit d'objection, la norme de $\mathcal{L}$ sur Y.

On vérifie que les propriétés de la norme sur les schémas se généralisent au cas des espaces algébriques:

- (i) $N_{X/Y}$ est un foncteur de la catégorie des faisceaux inversibles sur X vers la catégorie des faisceaux inversibles sur Y. En particulier, on a un morphisme canonique $N_{X/Y} : H^0(X,\mathcal{L}) \to H^0(Y, N_{X/Y}(\mathcal{L}))$. (cela découle immédiatement de [**EGA**], II.6.5.5 et de la descente étale des morphismes de faisceaux quasi-cohérents).
- (ii) Si $s \in H^0(X,\mathcal{L})$ et $s' = N_{X/Y}(s) \in H^0(Y, N_{X/Y}(\mathcal{L}))$, et si l'on suppose que f est surjectif, on a
$$f(X_s) = Y_{s'},$$
où X_s (resp. $Y_{s'}$) est l'ouvert de X (resp. Y) où s (resp. s') est non nulle.

  (L'assertion correspondante pour les schémas découle trivialement de *loc. cit.*, II.6.5.8, et on passe au cas des espaces algébrique par descente étale des morphismes de schémas.)

On est maintenant en mesure de démontrer le lemme

LEMME 5.3.2. *Soit U et S deux schémas, A un espace algébrique propre sur S, et $\pi : U \to A$ un recouvrement étale fini représentable (voir* [**KN**]*, II.1.3). Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A, tel que $\pi^*\mathcal{L}$ soit relativement ample sur S. Alors A est un schéma projectif sur S, et $\mathcal{L}$ est un faisceau ample sur A relativement à S.*

Démonstration — Quitte à changer $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}^{\otimes n}$ pour n assez grand, on peut supposer $\pi^*\mathcal{L}$ très ample relativement à S. ([**EGA**] II, prop. 4.6.11)

On veut montrer que A est un schéma. Comme c'est un problème local sur S (d'après la proposition II.3.13 de [**KN**]), on peut supposer S affine.

Comme $\pi^*\mathcal{L}$ est très ample, il existe des section globales $s_0, \ldots, s_n$ de $\pi^*\mathcal{L}$ tel que les ouverts $U_i = U_{s_i}$ de U soient affines et recouvrent U. Mais alors on peut considérer les ouverts (= les immersions ouvertes) $A_i = A_{N_{U/A}(s_i)}$. D'après (ii), $f(U_i) = A_i$ et comme f est fini, le théorème de Chevalley pour les espaces algébriques ([**KN**], III.4.1) montre que A_i est un *schéma* affine. De plus $\coprod U_i \to U$ est étale surjectif, il en est donc de même de $\coprod A_i \to A$. La proposition II.3.13 de [**KN**] permet donc de conclure: A est un schéma.

On prouve les autres assertions du lemme par invocation: $N_{U/A}(\mathcal{L})$ est ample sur A relativement à S par [**EGA**], II.6.6.1; A est donc un schéma projectif sur

S. $N_{U/A}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^n$ où n est le degré de π par II, 6.5.2.1. Donc $\mathcal{L}$ est relativement ample. □

5.3.3. *Application au cas qui nous intéresse.*

PROPOSITION 5.3.4. *L'espace algébrique $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ est en fait un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} R$. Soit $\mathcal{L}(-D_N)$ le faisceau associé au diviseur à l'infini $-D_N$ où $D_N = \widetilde{\mathcal{M}_N} - \mathcal{M}_N$. Alors $\mathcal{L}(-D_N)$ est ample sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ relativement à $f : \widetilde{\mathcal{M}_N} \to \mathcal{M}_N^*$*

Démonstration — Soit U un recouvrement représentable étale fini de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$. Soit $E_U = E \times_{\widetilde{\mathcal{M}_N}} U$ le "diviseur à l'infini" de U. E_U est un sous-schéma fermé, lisse sur S, de codimension 1 dans le schéma U propre et lisse sur S, d'après le théorème 5.1.1, point 4.

Nous allons montrer que le faisceau inversible sur U, associé au diviseur de Weil $-E_U$, que nous noterons $\mathcal{L}(-E_U)$ est ample relativement à $\mathcal{M}_N^*$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \widetilde{\mathcal{M}_N} \arrow[d] \\
& \mathcal{M}_N^* \arrow[d] \\
& S
\end{tikzcd}$$

Comme U est propre sur $\mathcal{M}_N^*$, il suffit d'après [**EGA**], III.4.7.1 de prouver que la restriction de $\mathcal{L}(-E_U)$ à toute fibre du morphisme $U \to \mathcal{M}_N^*$ est ample.

Les fibres au dessus des points de $\mathcal{M}_N \subset \mathcal{M}_N^*$ sont étales finies, donc affines, et la restriction de $\mathcal{L}(-E_U)$ y est donc ample.

Soit donc p un point de $\mathcal{M}_N^* - \mathcal{M}_N$, de corps résiduel k, et U_p la fibre au dessus de p. Il faut montrer que la restriction de $\mathcal{L}(-E_U)$ à U_p est ample.

Le but des manœuvres qui suivent est de montrer que tout se passe en fait au dessus du corps k : le diagramme suivant est commutatif et le rectangle qu'on y voit est cartésien:

$$\begin{tikzcd}
U_p \arrow[r] \arrow[dd] & U \arrow[d] \\
& \widetilde{\mathcal{M}_N} \arrow[d] \\
p = \operatorname{Spec} k \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{M}_N^* \arrow[d] \\
& \operatorname{Spec} R
\end{tikzcd}$$

Comme

$$U_p = U \times_{\mathcal{M}_N^*} \operatorname{Spec} k = U \times_{(\mathcal{M}_N^* \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} k)} \operatorname{Spec} k,$$

on peut dans le colonne de droite appliquer un changement de base de $\operatorname{Spec} R$ à $\operatorname{Spec} k$:

$$\begin{tikzcd}
U_p \arrow[r] \arrow[dd] & U_k \arrow[d] \\
 & (\widetilde{\mathcal{M}_N})_k \arrow[d] \\
p = \operatorname{Spec} k \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathcal{M}_N^*)_k \arrow[d] \\
 & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

et se ramener ainsi à un problème dans le monde familier des surfaces sur un corps, étant entendu que $(\widetilde{\mathcal{M}_N})_k$ est un espace algébrique lisse de dimension 2 sur un corps, donc un schéma. ([**KN**],V.4.9.10).

Il est alors clair qu'il suffit de montrer que le faisceau inversible $\mathcal{L}(E)$ sur $(\widetilde{\mathcal{M}_N})_k$ restreint à la fibre $(\widetilde{\mathcal{M}_N})_p$ est ample. Mais E est une union disjointe de courbes elliptiques E_i sur k et $(\widetilde{\mathcal{M}_N})_p$ est l'une de ces courbes (théorème 5.2.2, point 3), disons E_1.

Lemme 5.3.5. *Sur un corps, E_i^2 est strictement négatif.*

Démonstration — cela découle de ce que les E_i sont contractibles (théorème 5.2.2) et de [**HA**] V.5.7.2. □

(Et bien sûr $E_i \cdot E_j = 0$ si $i \neq j$). Or la restriction de $\mathcal{L}(-E)$ à E_1 est de degré $-E.E_1 > 0$, donc est ample.

On a donc prouvé que $\mathcal{L}(-E_U)$ était ample relativement à $\mathcal{M}_N^*$. D'après le lemme précédent, $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ est un schéma projectif, et $\mathcal{L}(-E)$ est ample sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ relativement à $\mathcal{M}_N^*$. □

Corollaire 5.3.6. *Sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ le faisceau $\wedge^2 \mathcal{T}_{\widetilde{\mathcal{M}_N}/\operatorname{Spec} R_N} \otimes \mathcal{L}(-E)$ est ample.*

Démonstration — Cela découle immédiatement du théorème 5.2.2, point 2, et de [**EGA**] IV. □

CHAPITRE II

Relèvement des formes modulaires de Picard

1. Introduction

1.1. Objectif.

1.1.1. Soit R un anneau au-dessus de $\mathbb{Z}[1/N]$. On sait définir, depuis [**D-R**], ce qu'est une forme modulaire (pour SL_2) de poids n et de niveau N sur R. L'ensemble de ces formes est un R-module noté

$$M_R(n, N).$$

Katz a démontré le théorème de changement de base suivant ([**K**], théorèmes 1.7.1, 1.8.1 et 1.8.2) :

THÉORÈME 1.1.2 (Katz). *On suppose $n \geq 2$, ou bien $n = 1$ et $N \leq 11$. Soit R une algèbre sur $\mathbb{Z}[1/N]$, $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de R, et $R' = R/\mathfrak{P}$. Si $N = 1$, on suppose aussi que 2 et 3 sont inversibles dans R. Alors on a*

$$M_R(n, N) \otimes_R R' = M_{R'}(n, N),$$

et $M_R(n, N)$ est un R-module localement libre et de type fini.

Un tel théorème a de multiples applications, parce qu'il permet de relever les formes modulaires de la caractéristique p à la caractéristique zéro, et donc de construire des formes modulaires en caractéristique nulle dont on contrôle la réduction modulo p.

1.1.3. L'objet de ce travail est double: il s'agit d'une part de démontrer un théorème analogue pour les formes modulaires de Picard, i.e. associées au groupe unitaire $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})$; et d'autre part de développer, la théorie des formes modulaires de Picard *arithmétiques*, i.e. définies sur un anneau d'entiers, en généralisant toutes les notions et outils qu'on trouve sur $\mathbb{C}$. En particulier, nous proposons une théorie arithmétique du développement de Fourier-Jacobi, qui se prête bien à la comparaison avec la théorie classique transcendante.

1.1.4. Plus précisément, on peut définir, en parfaite analogie avec le cas classique, une forme modulaire de Picard, de poids n et de niveau N, sur un anneau R au-dessus de $\mathcal{O}[1/DN]$ comme une section globale de la puissance tensorielle n-ième du faisceau des formes différentielles de degré maximal sur $\mathcal{M}_N$. Si l'on note $M_R(n, N)$ le module constitué de ces formes (resp. et $M_R^0(n, N)$ celui de ces formes qui sont paraboliques), nous démontrons le théorème de changement de base suivant (voir proposition 4.3.1 et théorème 1.2.4.)

THÉORÈME 1.1.5. *Soit $N \geq 1$, soit R une algèbre sur $\mathcal{O}[1/DN]$, et R' une R-algèbre. On suppose $n \geq 2$ (resp. $n \geq 1$). Si $N = 1$ ou 2, on suppose de plus que 2, 3 ou 7 sont inversibles dans R. Alors $M_R(n, N)$ (resp. $M_R^0(n, N)$) est un R-module*

localement libre et de type fini

$$M_R(n,N) \otimes R' = M_{R'}(n,N).$$

$$(\textit{resp. } M^0_R(n,N) \otimes R' = M^0_{R'}(n,N)$$

1.1.6. A notre connaissance, ce cas des formes modulaires pour $\mathrm{U}(2,1)$, avec celui des formes modulaires classiques pour SL_2, est le seul où l'on dispose d'un théorème de changement de base de ce type, où l'on exclut seulement un ensemble fini *explicite* de nombres premiers.

1.2. Plan. Indiquons brièvement le plan du chapitre:

La première partie est l'introduction, que vous êtes en train de lire.

La seconde partie précise la définition arithmétique des formes modulaires de Picard esquissée ci-dessus, et donne diverses variantes utiles, ainsi que des constructions et démonstrations arithmétiques du principe de Köcher et du développement de Fourier-Jacobi d'une forme modulaire. Ce dernier nécessite une étude détaillée de la géométrie de la compactification de $\mathcal{M}_N$ au voisinage de son bord, étude qui occupe le plus gros de cette partie.

La troisième partie consiste en une comparaison des notions arithmétiques introduites dans le chapitre précédent, et dans la première partie de celui-ci, avec les notions analogues déjà connues sur $\mathbb{C}$, dans l'objectif d'applications ultérieures à la théorie automorphe (nous avons en vue en particulier des congruences entre séries d'Eisenstein et formes paraboliques).

La quatrième partie démontre le théorème de relèvement 1.1.5.

Enfin, la cinquième et dernière partie donne une application : on construit, pour tout p décomposé dans $\mathcal{O}$ une forme modulaire de Picard, sur un corps de nombres, dont le développement de Fourier-Jacobi est congru à 1 modulo p. Pour cela, on utilise un analogue de l'invariant de Hasse, dont on calcule le développement de Fourier-Jacobi grâce aux résultats de la seconde partie, et qu'on relève ensuite en caractéristique nulle grâce au théorème de relèvement 1.1.5.

1.3. Notations. On garde les mêmes notations que dans le chapitre précédent.

2. Formes modulaires sur $\mathcal{M}_N$

2.1. Construction de faisceaux cohérents.

2.1.1. Tous les champs considérés ici sont des champs de Deligne-Mumford (cf. théorèmes I.3.2.4 et I.5.1.1). Rappelons que sur un tel champ $\mathcal{X}$, on a une notion très simple de module quasi-cohérent ([**L-MB**] page 118, 13.1.7). C'est un faisceau de modules $\mathcal{F}$ sur le site étale annelé sur $\mathcal{X}$, tel qu'il existe une présentation $P : X \to \mathcal{X}$ telle que $p^*\mathcal{F}$ est un module quasi-cohérent sur X.

En pratique, on définira un module quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}$ en se donnant, pour tout schéma U étale au dessus de X un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}_U$ sur U, de

manière compatible au changement de base U (i.e. avec des isomorphismes $\pi^*\mathcal{F}_U \simeq \mathcal{F}_{U'}$, pour tout $\pi : U' \to U$, vérifiant les conditions de transitivité usuelles). La manipulation (dual, produit tensoriel) des modules quasi-cohérents ainsi définis, et la vérification de leurs propriétés locales pour la topologie étale (par exemple être cohérent, être de rang n) est transparente.

2.1.2. En particulier, pour tout schéma étale U au dessus de $\mathcal{M}_N$ (resp. de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ si $N \geq 3$), on dispose du faisceau des 1-formes différentielles, $\Omega^1_{U/\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}[1/DN]}$, localement libre de rang 2, et aussi du faisceau inversible $\wedge^2\Omega^1_{U/\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}[1/DN]}$, qu'on notera simplement ω. Ceci définit un module inversible sur $\mathcal{M}_N$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}_N}$), encore noté ω_N, où simplement ω si le contexte lève l'ambiguïté.

Il est clair que ω_N sur $\mathcal{M}_N$ est la restriction de ω_N sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$, et que si N divise N', $\omega_{N'}$ est le pull-back de ω_N par le morphisme canonique $\mathcal{M}_{N'}$ sur $\mathcal{M}_N$ (d'après le lemme I.4.2.2).

2.1.3. Par ailleurs, soit U un schéma quelconque au dessus de $\mathcal{O}[1/D]$ et (G, i) un schéma semi-abélien sur U de dimension 3 muni d'une multiplication par $\mathcal{O}$ de type $(2, 1)$.

Si e désigne la section nulle $U \to G_U$, et $\mathcal{T}_{G_U/U}$ le faisceau tangent relatif, le faisceau $e^*\mathcal{T}_{G_U/U}$ est un module localement libre de rang 3 sur U qui hérite d'une action de $\mathcal{O}$, de type $(2, 1)$, et donc (voir 2) se scinde en deux modules cohérents, de type respectif (2,0) et (0,1) :

$$e^*\mathcal{T}_{G_U/U} = \tau^+ \oplus \tau^-,$$

où τ^+ est localement libre de rang 2 sur U et τ^- localement libre de rang 1 sur U. La formation de τ^+ et τ^- commute trivialement à tout changement de base $U' \to U$.

Ceci s'applique en particulier quand U est un schéma étale au dessus de $\mathcal{M}_N$ (resp. de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ si $N \geq 3$), pour lequel on dispose de (G_U, i_U), obtenu par pull-back à partir du (G, i) sur $\mathcal{M}_N$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}_N}$) du théorème I.5.1.1. On obtient des faisceaux τ_U^+ et τ_U^-, qui vérifient trivialement les conditions de compatibilité attendues.

Ces faisceaux définissent donc des faisceaux τ^+ et τ^-

théorie des déformations des $\mathcal{M}$-structures (voir [**L2**], pages 6-7-8)

$$\mathcal{T}_{\mathcal{M}_N/\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/DN]} \simeq \tau^+ \otimes \tau^- \tag{8}$$

L'isomorphisme de la proposition découlerait de (8) simplement par passage au dual et à la puissance extérieure seconde.

Faute d'avoir su trouver une référence s'appliquant facilement à notre cas, nous donnons une démonstration directe de l'existence de (8).

Remarquons tout d'abord que le résultat quand $N = 1$ implique le résultat pour N quelconque. En effet, si π est le morphisme d'oubli de $\mathcal{M}_N$ vers $\mathcal{M}$, le faisceau $\tau^- \otimes \tau^+$ (resp $\omega_{\mathcal{M}_N}$ sur $\mathcal{M}_N$ est le pull-back par π du faisceau correspondant sur $\mathcal{M}$ (resp. $\omega_{\mathcal{M}}$)

Prouvons le résultat quand $N = 1$, en construisant, pour tout schéma étale $U = \operatorname{Spec} A$ au dessus de $\mathcal{M}$, un isomorphisme canonique de A-module de $H^0(U, \mathcal{T}_{U/S})$ sur $H^0(U\tau^- \otimes \tau^+)$.

Notons $A[\varepsilon] = A[X]/X^2$ et considérons l'immersion $i : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A[\varepsilon]$ définie par $\varepsilon = 0$.

Rappelons que $H^0(U, \mathcal{T}_{\mathcal{M}/S}) = H^0(U, \mathcal{T}_{U/S})$ est isomorphe au A-module des morphismes

$$f : \operatorname{Spec} A[\varepsilon] \to \operatorname{Spec} A,$$

qui sont des rétractions de i :

$$f \circ i = Id_{\operatorname{Spec} A}.$$

(Rappelons que la structure de A-module sur l'ensemble des morphismes f est donnée de la manière suivante. Si f et g sont deux rétractions de i comme ci-dessus, on en obtient une troisième $f + g$ grâce à la comultiplication $\mathbb{A}[\varepsilon] \to A[\varepsilon] \otimes A[\varepsilon]$ donné par $\varepsilon \mapsto \varepsilon \otimes 1 + 1 \otimes \varepsilon$. La multiplication scalaire af pour $a \in A$ est donnée par la composition $f \circ [a]$, où $[a]$ est l'endomorphisme de $A[\varepsilon]$ défini par $\varepsilon \mapsto a\varepsilon$.)

D'autre part, désignons par (G, i, ϕ) la $\mathcal{M}$-structure sur $U = \operatorname{Spec} A$ définie par le morphisme $A \to \mathcal{M}_N$. Un morphisme f comme ci-dessus correspond à une déformation au-dessus de $\operatorname{Spec} A[\varepsilon]$ de (G, i, ϕ). Inversement, une déformation de (G, i, ϕ) sur $\operatorname{Spec} A[\varepsilon]$ définit un morphisme $\psi : \operatorname{Spec} A[\varepsilon] \to \mathcal{M}$ se restreignant au morphisme $\operatorname{Spec} A \to \mathcal{M}$ sur le lieu $\varepsilon = 0$, et ψ se relève en un morphisme $f : \operatorname{Spec} A[\varepsilon]$ vérifiant $f \circ i = Id$ par étalité de $\operatorname{Spec} A$ sur $\mathcal{M}$.

On a donc obtenu une bijection naturelle de $H^0(U, \mathcal{T}_{U/S})$ sur l'ensemble DEF des déformations de (G, i, ϕ) à $\operatorname{Spec} A[\varepsilon]$. L'ensemble des déformations considérées a naturellement une structure de A-module et la bijection mentionnée est tautologiquement un isomorphisme de A-modules.

Pour décrire le A-module DEF des déformations, on utilise le théorème de Grothendieck-Messing ([**DJ**]).

La cohomologie cristalline associe (entre autres) à (G, i, ϕ) un A-module localement libre de rang 6, $D(G)$, muni d'une $\mathcal{O}$-action i, et d'une forme bilinéaire

antisymétrique non dégénérée q. De plus, la cohomologie cristalline identifie le module ω_G des différentielles invariantes de G sur A à un sous-module localement libre de rang 3 et facteur direct de $D(G)$, stable par $\mathcal{O}$, de type (2,1) et totalement isotrope pour q.

Le théorème de Grothendieck-Messing affirme que la cohomologie cristalline induit une équivalence de catégories entre la catégorie des déformations de (G, i, ϕ) à $A[\varepsilon]$ (comme $\mathcal{M}$-structure), et la catégorie des déformations de ω_G à $A[\varepsilon]$ (comme sous-module localement libre de rang 3, facteur direct, stable par $\mathcal{O}$ (et de type (2,1) - mais cette condition est vide) et totalement isotrope, du module $D(G) \otimes_A A[\varepsilon]$).

Mais une déformation de ω_G comme sous-module localement libre facteur direct de rang 3 de $D(G) \otimes_A A[\varepsilon]$ (ou plutôt, une classe d'équivalence de telles déformations) correspond canoniquement à une application linéaire

$$h : \omega_G \to D(G)/\omega_G.$$

(à h on associe le sous-module ω_h de $D(G) \otimes A[\varepsilon]$ constitué des éléments de la forme $x + (y + h'(x))\varepsilon$, pour $(x, y) \in \omega_G$, et où $h'(x)$ désigne n'importe quel représentant de $h(x)$ dans $D(G)$ – il est facile de vérifier que ω_h est bien défini, que c'est un $A[\varepsilon]$-sous-module de $D(G) \otimes A[\varepsilon]$, qu'il est localement libre et facteur direct de rang 3, et enfin que $\omega_h \otimes_{A[\varepsilon]} A = \omega_G$, i.e. que c'est bien une déformation de ω_G).

Les conditions imposées à ω_h, d'être (a) stable par $\mathcal{O}$, et (b) totalement isotrope se traduisent en des conditions sur le morphisme h, à savoir:

Condition (a) : h commute aux actions de $\mathcal{O}$ sur ω_G et $D(G)/\omega_G$.

Condition (b) : pour tout $x \in \omega_G$, on a

$$< x, h(x) >= 0,$$

où $< x, y >$ désigne l'accouplement de ω_G avec $D(G)/\omega_G$, obtenu à partir de la forme q sur $D(G)$ grâce à l'isotropie de ω_G.

En bref, l'ensemble DEF des classes d'isomorphismes de déformations est canoniquement isomorphe à l'ensemble des morphismes h vérifiant (a) et (b).

Le module ω_G admet une décomposition

$$\omega_G^+ \oplus \omega_G^-,$$

et il en va de même pour $D(G)/\omega_G$. Que h vérifie (a) et (b) implique facilement qu'il est déterminé par sa restriction à ω_G^+, et que l'image de cette restriction est incluse dans $(D(G)/\omega_G)^-$. Donc

$$\mathrm{DEF} = \mathrm{Hom}(\omega_G^+, (D(G)/\omega_G)^-) = (D(G)/\omega_G)^- \otimes (\omega_G^+)^{\otimes -1},$$

la deuxième égalité résultant de ce que les modules en questions sont projectifs, comme facteur direct de modules localement libres.

Or le module $(D(G)/\omega_G)^-$ est canoniquement isomorphe à $H^0(U, \tau^-)$ (*loc. cit*) tandis que ω_G^+ est canoniquement dual de $H^0(U, \tau^+)$.

On a donc construit une bijection canonique

$$H^0(U, \mathcal{T}_{U/S}) = \mathrm{DEF} = H^0(U, \tau^+ \otimes \tau^-).$$

Que cette bijection soit un isomorphisme de A-modules se voit en suivant, à travers tous les isomorphimes canoniques impliqués, cette structure de A-module. L'idée est que la structure de A-module sur un ensemble de déformations (de $\mathcal{M}_\infty$-structures, comme DEF, ou d'objets d'algèbre linéaire) est codée, comme expliqué plus haut, dans la structure de catégorie qu'a la collection de ces déformations. Il suffit alors d'utiliser le théorème de Grothendieck-Messing dans toute sa force (équivalence de catégories, et non seulement bijection entre ensembles de classe d'isomorphisme). □

On aimerait étendre ce résultat de comparaison à $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ tout entier, pour $N \geq 3$.

2.1.6. Notons que si Y est un sous-espace fermé lisse de codimension 1 d'un espace algébrique lisse X, alors, pour tout schéma U étale sur X, $Y \times_X U$ est un sous-schéma fermé lisse de codimension 1 du schéma lisse U, auquel correspond un diviseur de Weil, et donc un faisceau inversible. Ceci permet de définir un faisceau inversible sur X, pour tout sous-espace Y lisse de codimension 1. Nous noterons ce faisceau $\mathcal{L}(Y)$. Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un module inversible sur X, nous noterons $\mathcal{F}(Y)$ le produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(Y)$.

LEMME 2.1.7. *Soit $N \geq 3$. Le module inversible $\omega(D_N)$ sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ est l'unique (à isomorphisme près) module inversible sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ dont la restriction à l'ouvert $\mathcal{M}_N$ est isomorphe à ω, et dont la restriction au bord D_N est triviale.*

Démonstration — On se ramène aisément au cas où la base est un corps algébriquement clos.

Dans ce cas, appelons K un diviseur de Weil de ω; c'est "le" diviseur canonique de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$. Le diviseur associé au bord D_n est de la forme

$$\sum_i E_i \,,$$

où les E_i sont les diviseurs des courbes elliptiques composantes du bord D_N (voir le théorème I.5.1.1 et la proposition 4.2.3); un diviseur de $\omega(D_N)$ est

$$K + \sum_i E_i \,;$$

et plus généralement un faisceau isomorphe à ω sur $\mathcal{M}_N$ admet un diviseur de la forme (cf. [**HA**],V.1.5)

$$K + \sum_i n_i E_i \,.$$

Pour qu'un tel faisceau soit trivial sur le bord D_N, i.e. sur chaque courbe elliptique E_i, il faut que son degré soit nul sur E_i, ce qui implique

$$(K + n_i E_i) \cdot E_i = 0,$$

soit, par la formule d'adjonction (cf. [**HA**],V.1.5),

$$(n_i - 1)E_i^2 = 0,$$

ou encore

$$n_i = 1$$

compte tenu du lemme I.5.3.5.

Inversement, la condition de nullité du degré sur E_i d'un faisceau de diviseur $K + \sum_i n_i E_i$ est suffisante pour sa trivialité sur E_i, toujours d'après (cf. [**HA**], V.1.5), ce qui montre que $\omega(D_N)$ vérifie les propriétés de l'énoncé, et est le seul, à isomorphisme près, à les vérifier. □

LEMME 2.1.8. *Soit (G, i) une $\mathcal{M}_\infty$-structure de niveau N ($N \geq 3$), sur un schéma S au-dessus de $\operatorname{Spec} R_N$.*

Alors le faisceau inversible $\left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\right)^{\otimes -1}$ (défini comme en (2.1.3)) est trivial sur S.

Démonstration — Plaçons notre $\mathcal{M}_\infty$-structure de niveau N dans une suite exacte

$$1 \to T \to G \to E \to 1.$$

Outre les faisceaux τ^+ et τ^- définis plus haut, notons qu'on peut définir les faisceaux localement libres $\tau_E := e^*\mathcal{T}_{E/S}$, $\tau_T := e^*\mathcal{T}_{T/S}$, τ_T^+, τ_T^-, de rang respectif 1,2,1 et 1. De plus il est clair (compte tenu de ce que T est de type (1,1) et E de type (1,0)) que

$$\tau_T^- = \tau^-,$$
$$\tau_T = \tau_T^+ \oplus \tau_T^-,$$

et qu'on a une suite exacte

$$0 \to \tau_T^+ \to \tau^+ \to \tau_{E'} \to 0.$$

Maintenant, (E, i) est un courbe elliptique à multiplication complexe par $\mathcal{O}$ sur S, avec une structure de niveau N et elle provient donc par pull-back d'une courbe elliptique sur $\operatorname{Spec} R_N$ (en tout cas si S est connexe – cela résulte du lemme I.4.1.8). On en déduit que τ_E' est trivial.

De même, le tore (T, i) est muni d'une structure de niveau N et provient par pull-back d'un tore à multiplication complexe sur $\operatorname{Spec} R_N$ (d'après le lemme I.4.1.10), et on en déduit que les faisceaux localement libres $\tau_T^- = \tau^-$, τ_T^+ et τ_T sont triviaux.

Enfin, le faisceau τ^+ extension du faisceau trivial τ_T^+ par le faisceau trivial $\tau_{E'}$ n'a aucune raison d'être trivial, mais sa puissance extérieure seconde $\wedge^2\tau^+$ l'est, puisque sa classe de Chern est la somme de celle de $\tau_{E'}$ et de celle de τ_T^+.

□

PROPOSITION 2.1.9. *On suppose $N \geq 3$ et l'on se place sur R_N.*

Il existe un unique isomorphisme de faisceaux prolongeant λ de $\omega(D_N)$ vers $\big((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\big)^{\otimes -1}$.

Démonstration — Le lemme précédent montre que $\big((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\big)^{\otimes -1}$ est trivial sur D_N, le lemme 2.1.7 et la proposition 2.1.5 montre l'existence d'un isomorphisme entre les deux faisceaux. L'unicité d'un tel isomorphisme est évidente. □

2.2. Le principe de Köcher.

2.2.1. On énonce maintenant un principe de Köcher arithmétique. Dans le cas des formes modulaires de Siegel, un principe analogue a été obtenu par [**C-F**] (proposition V.1.5).

PROPOSITION 2.2.2. *Soit k un entier, et $N \geq 3$. On se place sur R_N.*

Le morphisme de restriction

$$H^0(\widetilde{\mathcal{M}_N}, \omega(D_N)^{\otimes k}) \to H^0(\mathcal{M}_N, \omega^{\otimes k})$$

est un isomorphisme.

Démonstration — Rappelons le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_N \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \widetilde{\mathcal{M}_N} \arrow[d, "f"] \\ & \mathcal{M}_N^* \end{tikzcd} .$$

La restriction induit un morphisme

$$f_*\omega(E)^{\otimes k} \to v_* u^* \omega^{\otimes k},$$

qui est injectif. Pour montrer qu'il est surjectif, il suffit clairement de le faire après extension des scalaires à un corps algébriquement clos. Dans ce cas, compte tenu du lemme 2.1.7, c'est simplement la "formule de projection" de Sakaï ([**Sak**], théorème 2.1, qui n'est énoncé que sur $\mathbb{C}$ mais dont la démonstration marche en général).

Passant aux sections globales dans cet isomorphisme, on obtient la proposition. □

2.3. Définition des formes modulaires.

2.3.1. Soit n un entier naturel, et $N \geq 1$.

DÉFINITION. On appelle *forme modulaire* (de Picard) de poids [1] n et de niveau N, sur une base S au-dessus de $\operatorname{Spec} R_N$ tout élément de

$$H^0\left(\mathcal{M}_N \times S, \omega^{\otimes n}\right)$$

On note $M_S(k,N)$ le $H^0(S,\mathcal{O}_S)$-module des formes modulaires de poids k et de niveau N sur S, et $M_S(N)$ la $H^0(S,\mathcal{O}_S)$-algèbre graduée

$$\oplus_{k=0}^{\infty} M_S(k,N).$$

Il est clair que $M_S(k,N)$ et $M_S(k)$ dépendent fonctoriellement (de manière contravariante) de S.

LEMME 2.3.2. *Supposons que N divise N', et que S est un schéma au dessus de $\operatorname{Spec} R_{N'}$. Alors le morphisme $M_S(k,N) \to M_S(k,N')$ induit par le morphisme naturel $\mathcal{M}_{N'} \to \mathcal{M}_N$ est injectif, et son image est constituée des éléments de $M_S(k,N')$ invariants sous l'action naturelle de $\Gamma(N')/\Gamma(N)$.*

Démonstration — Évident. □

2.3.3. De manière canoniquement équivalente (grâce à la proposition 2.1.7), on aurait pu définir une S-forme modulaire de poids k et de niveau N comme un élément du $H^0\left(\mathcal{M}_N \times S, \left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\right)^{\otimes -k}\right)$, ou encore, si $N \geq 3$ grâce au principe de Köcher (prop 2.2.2), comme un élément du $H^0\left(\widetilde{\mathcal{M}_N} \times S, \left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\right)^{\otimes -n}\right)$ ou du $H^0(\widetilde{\mathcal{M}_N} \times S, \omega(E)^{\otimes n})$.

Sous ces deux dernières formes on voit que si S est noethérien, $M_S(n,N)$ (resp. $M_S(N)$) est un module (resp. une algèbre) de type fini sur $H^0(S,\mathcal{O}_S)$, pour tout entier naturel n et tout $N \geq 1$ (c'est trivial si $N \geq 3$ et le lemme précédent nous y ramène).

2.3.4. On dit qu'une forme modulaire est *parabolique* si elle s'annulle sur le bord E. Il est clair que l'espace des formes modulaires paraboliques de poids n et de niveau N (noté $M_S^0(n,N)$) s'identifie avec $H^0(\widetilde{\mathcal{M}_N}, \omega^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}(E)^{\otimes(n-1)})$.

2.4. Précisions sur la géométrie de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ à l'infini.

1. Cette définition correspond, sur $\mathbb{C}$ à celle choisie par une partie de la littérature : cf. par exemple la thèse de Hickey, University of Chicago, 1986, ou Holzapfell ; d'autres auteurs, comme Shintani ([**SH**]) propose cependant une définiton plus générale des formes modulaires, qui correspondrait, pour nous, à des formes de poids $n = k/3$, k entier. Le lecteur intéressé pourra vérifier que notre démonstration du théorème de relèvement pour les formes modulaires (resp. paraboliques) s'applique aussi, avec quelques arguments supplémentaires, à ces formes (sous les mêmes conditions de poids $n \geq 2$, resp $n \geq 1$).

2.4.1. *Rétractions infinitésimales.* Soit X un schéma, $j : F \to X$ une immersion fermés. On note F^n les fermés épaissis associés à F, et $\hat{X}$ le complété formel de F dans $\hat{X}$. On note encore j les morphismes naturels (d'espaces localement annelés) $F \to F^n$ et $F \to \hat{X}$.

Il revient au même de se donner un morphisme r d'espaces localement annelés de $\hat{X}$ dans F, tel que

$$r \circ j = Id_F,$$

ou de se donner une famille de morphisme

$$r_n : F^n \to F,$$

compatibles en un sens évident, tels que

$$r_n \circ j = Id_F.$$

On appellera l'une ou l'autre de ces données une *rétraction infinitésimale* de F dans X. On dira que F est *infinitésimalement rétracte* dans X s'il existe une rétraction infinitésimale de F dans X.

Exemples. Un point fermé est toujours infinitésimalement rétracte dans la droite affine sur un corps. Un point fermé de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ n'est jamais infinitésimalement rétracte.

Une hypersurface de $\mathbb{P}^n_k$, où k est un corps algébriquement clos, est rétracte si et seulement si c'est un hyperplan.

Si X est un espace algébrique, et $j : F \to X$ est une immersion fermée d'un *schéma* F dans X, les notions précédentes se généralisent sans aucune difficulté. En effet, on peut définir les épaississements F^n associés à F (cf. [**KN**], 2.5), ce sont des schémas (puisqu'un espace algébrique est un schéma si, et seulement si, son espace algébrique réduit associé l'est) et dans ce cas $\hat{X}$ est simplement la limite inductive des espaces localement annelés F^n. Une rétraction infinitésimale est définie exactement comme dans le cas où X est un schéma.

Proposition 2.4.2. *Soit $N \geq 3$. Le fermé D_N de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ admet une rétraction infinitésimale canonique.*

Démonstration — Il est clair qu'on peut travailler au-dessus de la base $\operatorname{Spec} R_N$ au lieu de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/DN]$, car les rétractions r_n obtenues au-dessus de $\operatorname{Spec} R_N$, étant canoniques, vérifieront les conditions de la descente étale.

Posons $F = D_N$ pour alléger les notations, et soit F^n les épaississements de F dans $\widetilde{\mathcal{M}_N}$. D'après le théorème I.5.1.1, il existe sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}$, et donc sur F^n un schéma semi-abélien G, muni d'une action i de $\mathcal{O}$, de type $(2,1)$. De plus, d'après le point 6) de ce théorème la restriction de G à F est une $\mathcal{M}_\infty$-structure, qui est munie canoniquement d'une structure de niveau N, et est la $\mathcal{M}_\infty$-structure de niveau N universelle sur $F = D_N = \mathcal{M}_{\infty,N}$.

D'après la rigidité des tores, le schéma réduit de F^n étant F, G admet un sous-tore de dimension 2 sur F^n et donc (G, i) est une $\mathcal{M}_\infty$-structure sur F^n.

Comme le champ (le schéma en fait) $\mathcal{M}_{\infty,N}$ est étale sur $\mathcal{M}_\infty$ (lemme I.4.2.2), la structure de niveau N dont dispose (G, i) au-dessus de F s'étend de manière unique en une structure de niveau N pour (G, i) sur F^n.

Par définition de $F = \mathcal{M}_{\infty,N}$ comme espace de modules (cf. I.4.2.1), cette $\mathcal{M}_\infty$-structure de niveau N sur F^n définit un morphisme r_n de F^n dans F, rétraction de l'immersion $j : F \to F^n$.

Il est clair que les r_n définis ainsi sont canoniques et vérifient les compatibilités nécessaires à la définition d'une rétraction infinitésimale de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ dans F. □

2.4.3. On note r cette rétraction infinitésimale. La construction de r (ou des r_n) a le corollaire suivant : le groupe (G, i) sur F^n est le pullback du groupe (G, i) sur F par r_n. En particulier, le morphisme naturel de modules sur F^n

$$(\tau^+)_{F_n} \to r_n^*(\tau_F^+),$$

est un isomorphisme, et de même pour τ^-. Cela découle formellement de la définition (2.1.3) de τ^+ et τ^- à partir de (G, i).

La limite inductive des F^n, autrement dit, la complété de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ par rapport à $F = D_N$ sera notée $\widehat{\mathcal{M}_n}$ – plutôt que l'affreux $\widehat{\widetilde{\mathcal{M}_N}}$. Son espace topologique sous-jacent est $F = D_N$, et son faisceau structural est noté $\mathcal{O}_{\widehat{M_N}}$

On déduit de ce qui précède, par passage à la limite sur n :

Corollaire 2.4.4. *On suppose $N \geq 3$. Le morphisme naturel de modules sur l'espace annelé $\widehat{\mathcal{M}_N}$*

$$r^* \left[\left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+) \right)_{D_N} \right] \to$$
$$\left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+) \right)_{\widehat{\mathcal{M}_n}}$$

est un isomorphisme.

2.5. Le développement de Fourier-Jacobi des formes modulaires. Dans tout ce paragraphe on suppose $N \geq 3$.

2.5.1. Nous avons vu que la restriction de $\left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+) \right)^{\otimes -1} = \omega(E)$ à D_N était triviale (proposition 2.1.8).

Choix 1. On fait le choix, dans tout ce paragraphe, d'une section génératrice

$$s \in H^0 \left(D_N, \left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+) \right)^{\otimes -1} \right).$$

Cette section s définit, pour tout entier k, un isomorphisme de modules :

$$\mathcal{O}_{D_N} \simeq \left((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+) \right)^{\otimes -k},$$

et de là, grâce au corollaire 2.4.4, pour tout entier k, un isomorphisme de modules sur $\widehat{\mathcal{M}_N}$

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}} \simeq (\omega(D_N)^{\otimes k})_{\widehat{\mathcal{M}_N}} \tag{9}$$

ne dépendant que du choix de s.

2.5.2. Nous allons définir, pour toute forme modulaire f de niveau N et de poids quelconque, sur une base S, un élément de $H^0(D_N \times S, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_n}} \otimes \mathcal{O}_S)$, noté $FJ(f)$ (ou $FJ_s(f)$ si l'on veut marquer la dépendance en s) et appelé *développement de Fourier-Jacobi de f*. L'application FJ vérifiera:

PROPOSITION 2.5.3. – *(i) L'application FJ est un morphisme d'anneau de $M_S(N)$ dans $H^0(D_N \times S, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}} \otimes \mathcal{O}_S)$*
– *(ii) L'application FJ est injective.*
– *(iii) La formation de FJ commute au changement de base S.*
– *(iv) $FJ_{\lambda s} = \lambda^k FJ_s$ pour $\lambda \in H_0(S, \mathcal{O}_S^*)$.*

Pour cela, il suffit d'associer à une forme modulaire f sur S, de niveau N et de poids k, vue comme un élément de $H^0(\widetilde{\mathcal{M}_N}, \omega(E)^{\otimes k})$ (on laisse tomber les S pour alléger les notations) sa restriction à $\widehat{\mathcal{M}_N}$, qui est un élément de $H^0(D_N, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$ via l'isomorphisme (9)

De la proposition précédente, les points (i), (iii) et (iv) sont triviaux, et (ii) résulte facilement de ce que chaque composante irréductible de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ contient au moins une composante de D_N.

2.5.4. En particulier, nous dirons d'une forme modulaire qu'elle a un développement de Fourier *constant* si l'élément $FJ(f)$ de $H^0(D_N, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$ est dans l'image de r^* :

$$FJ(f) \in r^* H^0(D_N, \mathcal{O}_{D_N}) = j_* H^0(D_N, \mathcal{O}_{D_N}).$$

2.5.5. Le développement de Fourier-Jacobi que nous venons de définir vit donc dans l'anneau $H^0(D_N, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$. C'est suffisant pour certaines applications. Mais pour mériter vraiment son nom, le développement de Fourier-Jacobi devrait apparaître, comme dans la théorie transcendante, comme une somme infinie de termes dépendant de certaines fonctions theta. Pour cela, nous allons donner de cet anneau une description plus "géométrique".

Tout d'abord D_N est une union de courbes elliptiques E_i, et $H^0(D_N, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$ est naturellement le produit des anneaux $H^0(E_i, \mathcal{O}^i_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$, où $\mathcal{O}^i_{\widehat{\mathcal{M}_N}}$ désigne la restriction de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}}$ à E_i, ou, ce qui revient au même, le faisceau structural du complété de $\mathcal{M}_N$ par rapport au fermé E_i.

Si f est une forme modulaire de niveau N, la composante de $FJ(f)$ dans $H^0(E_i, \mathcal{O}^i_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$ s'appelle simplement son développement de Fourier-Jacobi le long de E_i. Dorénavant, nous fixons une composante du bord E_i, et laissons tomber tous les i dans les notations.

Notons $\mathcal{C}$ le faisceau conormal à E dans $\widetilde{\mathcal{M}_N}$

LEMME 2.5.6. *La restriction j^* définit un isomorphisme de* Pic $(\hat{\mathcal{M}}_N)$ *sur* Pic E, *d'inverse r^*.*

Démonstration — D'après [**SGA2**], proposition XI.1.1, page 125, on sait que j^* est un isomorphisme si $H^i(E, \mathcal{C}^{\otimes k}) = 0$, pour tout $k \geq 1$ et pour $i = 1, 2$. Cette hypothèse est trivialement vérifiée si $i = 2$, et, pour $i = 1$, est équivalente par dualité de Serre à l'annulation du $H^0(E, \mathcal{C}^{\otimes -k})$, ce qui résulte du fait que l'auto-intersection de E est négative.

Le fait que r^* soit un isomorphisme, inverse de j^*, en découle formellement, vu que $r \circ j = Id$. □

LEMME 2.5.7. *Il existe une section de $H^0(\widehat{\mathcal{M}_N}, r^*\mathcal{C}^{-1})$, qui s'annule sur E à l'ordre 1, et ne s'annule pas ailleurs.*

Démonstration — Notons $\mathcal{L}(-E)$ la faisceau inversible associé au diviseur E sur $\hat{\mathcal{M}}_N$. Notons j l'injection canonique de E dans $\hat{\mathcal{M}}_N$. On sait que $j^*\mathcal{L}(-E)$ est isomorphe à $\mathcal{C}$. Il résulte alors du lemme précédent que $r^*\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{L}(E)$, et le lemme en découle. □

CHOIX 2. On fait le choix d'une telle section qu'on note e.

Un tel choix étant fixé, il existe alors un isomorphisme canonique :

$$H^0(E, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}}) \to \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^{\otimes k}.$$

En effet, soit $f \in H^0(E, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$, la restriction j^*f de f à E est une section du faisceau $\mathcal{O}_E$ sur E, donc une constante a_0. Alors

$$f - r^*a_0 = f - a_0$$

s'annule à l'ordre au moins 1 sur E, et

$$(f - a_0)/e$$

est une section de $r^*\mathcal{C}$. On note a_1 la restriction de $(f - a_0)/e$ à E : c'est une section sur E de $j^*r^*\mathcal{C} = \mathcal{C}$. On continue, en considérant $(f - a_0)/e - r^*a_1$, qui est une section sur $\widehat{\mathcal{M}_N}$ de $r^*\mathcal{C}$, et qui s'annule sur E. On note a_2 la restriction de $[(f - a_0)/e - r^*a_1]/a_2$: c'est une section sur E de $\mathcal{C}^{\otimes 2}$, et ainsi de suite...

On obtient de cette manière une famille (a_k) d'éléments de $H^0(E, \mathcal{C}^{\otimes k})$, pour $k = 0, \ldots, \infty$. Cette famille détermine f, par la formule (convergente pour la topologie naturelle de $H^0(E, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}_N}})$) :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (r^*a_k)e^k.$$

Il est clair que $f \to (a_k)_{k\geq 0}$ définit bien un isomorphisme d'algèbre.

Par abus de langage, on se permettra d'écrire

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^k, \tag{10}$$

où a_k est une *section de la puissance k-ième du fibré conormal de E dans $\widetilde{\mathcal{M}_N}$.*

Le développement de Fourier-Jacobi est dit *constant* au voisinage de E_i si $a_k = 0$ dès que $k > 0$. Il est clair qu'il est constant au sens de (2.5.4) si et seulement si il l'est au voisinage de chaque E_i.

3. Comparaison avec la théorie analytique sur $\mathbb{C}$.

3.1. L'espace de modules.

3.1.1. (voir [**G**], page 9)

On rappelle que le schéma en groupe sur $\mathrm{GU}(2,1)$ sur $\mathbb{Z}$ a été défini en I.3.2.1, et qu'on a défini $\Gamma(N)$ comme le noyau du morphisme naturel $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

On note $\mathbb{A}$ l'anneau des idèles de $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{A}_f$ le sous-anneau des idèles finis. On identifiera $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Q})$ à un sous-groupe de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A})$ (resp. de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A}_f)$) grâce au plongement diagonal.

On définit un sous-groupe K_N de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A}_f)$, en posant

$$K_N = \{g \in \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A}_f) \mid (g-1)V_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}} \in N(V_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}})\}.$$

On vérifie immédiatement que

$$K_N \cap \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Q}) = \Gamma(N).$$

Le groupe $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})$ est le groupe de Lie des similitudes unitaires de l'espace hermitien $(V_0, q_0) \otimes \mathbb{R}$. Mais on peut aussi le voir comme celui des similitudes unitaires de $(V_1, q_1) \otimes \mathbb{R}$, d'apres I.4. C'est cette manière de voir, qui correspond à un domaine de Siegel du second type, que nous choisirons : lorsque nous écrirons matriciellement un élément γ de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})$, il sera entendu que la matrice est prise dans la base canonique de $V_1 \otimes \mathbb{R}$.

On définit K_∞ comme le sous-groupe de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})$ qui laisse fixe la droite $\{(t, 0, -t) \;\; t \in \mathbb{C}\}$ dans $V_1 \otimes \mathbb{R}$. Notons que K_∞ contient le centre Z de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})$ et que K_∞/Z est compact maximal dans le groupe adjoint $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})/Z$.

On a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})/K_\infty &\simeq \mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})/(K_\infty \cap \mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})) \\ &\simeq \{ \text{ droites définies négatives de } V_1 \otimes \mathbb{R} \ \} \\ &\simeq \{(z,u) \in \mathbb{C}^2 \,, 2\,\mathrm{Re} z + |u|^2 < 0\} \end{aligned} \tag{11}$$

Les deux premiers isomorphismes sont évidents, précisons que le troisième est obtenu ainsi : une droite définie négative est une droite de coordonnées homogènes (z_1, z_2, z_3) vérifiant

$$|z_2|^2 + z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 < 0$$

ce qui implique $z_3 \neq 0$ et équivaut, en posant $z = z_1/z_3$ et $u = z_2/z_3$, à

$$2\,\mathrm{Re}z + |u|^2 < 0.$$

On note X l'ouvert de $\mathbb{C}^2$ défini par cette inégalité. C'est un domaine de Siegel du second type associé à $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})$) agit sur X via l'isomorphisme ci-dessus, et l'action est donnée par la formule :

$$\gamma(z,u) = \left(\frac{a_1z + b_1u + c_1}{a_3z + b_3u + c_3}, \frac{a_2z + b_2u + c_2}{a_3z + b_3u + c_3}\right) \tag{12}$$

pour tout $z \in X$ et tout

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 3.1.2. *Pour tout N, on a un isomorphisme naturel de variétés algébriques sur $\mathbb{C}$.*

$$\mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \simeq GU(2,1)(\mathbb{Q})\backslash GU(2,1)(\mathbb{A})/K_NK_\infty.$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les actions de $\Gamma(N)$ à droite ou à gauche, et quand $N|N'$, avec les morphismes $\mathcal{M}_{N'}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et $GU(2,1)(\mathbb{Q})\backslash GU(2,1)(\mathbb{A})/K_{N'}K_\infty \to GU(2,1)(\mathbb{Q})\backslash GU(2,1)(\mathbb{A})/K_NK_\infty$.

De plus, la composante neutre de $GU(2,1)(\mathbb{Q})\backslash GU(2,1)(\mathbb{A})/K_NK_\infty$ est $\Gamma(N)\backslash X$, et est donc l'une des composantes de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ - qu'on appelle la composante neutre, et qu'on note $\mathcal{M}_N^0(\mathbb{C})$.

Précisons : $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points complexes du schéma $\mathcal{M}_N \times \mathbb{C}$ si $N \geq 3$, et l'ensemble des points complexes de l'espace algébrique grossier associé à $\mathcal{M}_N \times \mathbb{C}$ si $N = 1$ ou 2. Cette définition munit $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ d'une structure de variété de dimension 2 sur $\mathbb{C}$ (lisse si $N \geq 3$).

La structure de variété algébrique sur $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A})/K_{N'}K_\infty$ est expliquée dans [**G**], et correspond, sur la composante neutre, à la structure analytique de $X/\Gamma(N)$.

La proposition est un cas particulier de [**D1**], 4.11. Donnons un dictionnaire entre nos notations et celles de *loc. cit.*. Le corps quadratique K est chez Deligne noté L (chez qui ce n'est plus forcément un corps quadratique), l'ordre $\mathcal{O}$ est $L_\mathbb{Z}$, on a $V_0 = v_Z$ comme module symplectique avec action de $L_\mathbb{Z}$. Enfin $V'_\mathbb{Z} = V_\mathbb{Z}$.

La proposition est aussi démontrée dans [**G**], proposition 3.2, pages 12 et suivantes, directement dans le cas qui nous intéresse, mais avec une légère erreur,

puisque la proposition 3.2 prétend construire une bijection de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A})/K_N K_\infty$ sur l'ensemble des $\mathcal{M}$-structure de niveau N ne vérifiant pas forcément la condition 3) de notre définition des $\mathcal{M}$-structures. D'où une erreur dans la remarque 3.2.5, calculant le nombre de composantes connexes (qui est toujours h et non h ou $2h$ selon la parité de D).

Précisément, l'erreur est dans la preuve de la surjectivité (page 14) du morphisme construit antérieurement $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A})/K_N K_\infty \to \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Il n'y a aucune raison que $W(\mathbb{Z}) = H^1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ s'identifie avec un réseau de la forme $g_f V(\mathbb{Z}) \cap V(Q)$.

3.2. Les compactifications.

PROPOSITION 3.2.1. *Les variétés $\widetilde{\mathcal{M}_N}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_N^*(\mathbb{C})$ sont respectivement les compactifications toroïdale et minimale de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ décrites respectivement dans* [**G**], *5.4 et 5.2.*

Voir loc. cit. et [**L2**], partie 6.

On note $\widetilde{\mathcal{M}_N}^0(\mathbb{C})$ la composante de $\widetilde{\mathcal{M}_N}(\mathbb{C})$ qui contient $\mathcal{M}_N^0(\mathbb{C})$.

3.3. Résultats de Holzapfel. Holzapfel a étudié en détail (voir la bibliographie de [**G**]) la géométrie sur $\mathbb{C}$ des surfaces $\widetilde{\mathcal{M}_N}(\mathbb{C})$. De ses travaux, nous utiliserons le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3.1. *On fait sur N les hypothèses suivantes:*

- *$N > 4$.*
- *N n'est pas premier.*
- *Si $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$, N n'est pas non plus 6, 8 ou 9.*

Alors chaque composante de $\widetilde{\mathcal{M}_N}(\mathbb{C})$ est une surface minimale de type général.

Démonstration — [**HO**], proposition 4.13. La définition de surface minimale de type général est rappelée plus bas. □

3.4. Formes modulaires.

3.4.1. Shintani (cf. [**SH**]) a étudié en détail la théorie analytique des formes modulaires pour $\mathrm{U}(2,1)$. S'inspirant de ses définitions (qu'on particularise – puisqu'il traite le cas des formes modulaires à valeurs vectorielles), on pose

DÉFINITION. L'espace des formes modulaires analytiques $\mathcal{M}_{an}(n,N)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes f sur X satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$f(\gamma(z,u)) = \frac{(a_3 z + b_3 u + c_3)^{3n}}{(\det\gamma)^n} f(z,u)$$

pour tout $z \in X$ et tout

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \Gamma(N).$$

3.4.2. Si $f \in M_{an}(n, N)$, la 2-forme différentielle $f(z,u)(dz \wedge du)^{\otimes n}$ est invariante par $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})$ et définit donc une 2-forme différentielle sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. En effet,

$$\gamma^*(dz \wedge du)^{\otimes n} = (\text{déterminant jacobien de l'action de } \gamma)^n dz \wedge du,$$

d'où, en calculant quelques différentielles et un déterminant, à partir de (12),

$$\gamma^*(dz \wedge du)^{\otimes n} = \frac{(\det \gamma)^n}{(a_3 z + b_3 u + c_3)^{3n}} (dz \wedge du)^{\otimes n}.$$

Par passage au quotient, $f \in M_{an}(n, M)$ définit donc une section analytique $\tilde{f}$ du faisceau $\omega^{\otimes n}$ sur $\mathcal{M}_N$.

PROPOSITION 3.4.3. *La section analytique $\tilde{f}$ est en fait algébrique, et l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme*

$$M_{an}(n, N) \to \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n, N).$$

Démonstration — Pour montrer que $\tilde{f}$ est algébrique, on montre d'abord que $\tilde{f}$ se prolonge en une section analytique de $(\omega(D_N))^{\otimes n}$ sur $\widetilde{\mathcal{M}_N}(C)$ tout entier. Il s'agit donc de montrer un principe de Köcher analytique, exactement analogue au principe de Köcher algébrique de la proposition 2.2.2. La preuve donnée marche sans changement dans le cadre analytique.

On utilise ensuite GAGA, qui montre que le prolongement de $\tilde{f}$ est algébrique, et donc aussi $\tilde{f}$ sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. $\tilde{f}$ est donc une section de $H^0(\mathcal{M}_N(\mathbb{C}), \omega^{\otimes n})$, donc un élément de $M_{\mathbb{C}}(n, N)$.

Construire l'application inverse est encore plus simple. □

3.4.4. *Le développement de Fourier-Jacobi analytique.* Nous allons maintenant esquisser, sans démonstration, la comparaison entre le développement de Fourier-Jacobi que nous avons défini en 2.5.2 et le développemennt de Fourier-Jacobi classique de la théorie analytique. Pour simplifier les notations, nous nous plaçons dans le cas $K = \mathbb{Q}(i)$, comme Shintani ([**SH**]) dans son introduction.

On note $P(\mathbb{Q})$ le sous-groupe de $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Q})$ des applications pour lesquelles le vecteur e_1 (premier vecteur de la base canonique de V_1) est propre. Comme l'orthogonal de $< e_1 >$ est $< e_1, e_2 >$, ce groupe est constitué des matrices de $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Q})$ qui sont triangulaires supérieures (dans la base canonique). Le sous-groupe $P(Q)$ est un parabolique minimal. On note $U(\mathbb{Q})$ le radical unipotent de $P(\mathbb{Q})$, et on pose

$$U(N) = U(\mathbb{Q}) \cap \Gamma(N).$$

Le groupe $U(N)$ est constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -a\bar{a}/2+ib \\ 0 & 1 & -\bar{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $a \in N\mathbb{Z}[i]$ tel que $a\bar{a} \in 2\mathbb{Z}$, et $b \in N\mathbb{Z}$.

Soit $f \in M_{an}(n, N)$. Par définition, on a, pour tout $\gamma \in U(n)$,

$$f(\gamma(z,u)) = f(z,u),$$

ou encore

$$f(z + au - a\bar{a}/2 + ib, u - \bar{a}) = f(z,u). \tag{13}$$

En particulier, $f(z+ib,u) = f(z,u)$ pour $b \in N\mathbb{Z}$, ce qui permet de considérer le développement de Fourier en z de f :

$$f(z,u) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} a_k(u) e^{-2\pi kz/N}. \tag{14}$$

L'équation (13) impose aux $a_r(u)$ de vérifier l'équation fonctionnelle, pour tout $a \in N\mathbb{Z}[i]$ tel que $a\bar{a}$ est pair.

$$a_k(u - \bar{a}) = a_k(u) e^{2\pi k/N(a\bar{a}/2 - au)}. \tag{15}$$

Les a_k sont donc des fonctions θ et définissent des sections de fibrés sur la courbe elliptique à multiplication par $\mathcal{O}$

$$E = \mathbb{C}/\Lambda,$$

où Λ est le réseau de $\mathbb{C}$ défini par $\Lambda = N\mathbb{Z}[i]$ si N est pair, Λ est le sous-réseau d'indice 2 de $N\mathbb{Z}[i]$ des éléments $x+iy$ tels que x^2+y^2 (ou $x+y$) est pair.

On vérifie facilement que $k_r = 0$ pour $k < 0$, et que a_0 est une constante.

L'écriture (14) constitue *le développement de Fourier-Jacobi analytique de* f.

La courbe elliptique E à multiplication par $\mathcal{O}$ apparaît comme l'une des composantes du bord de la compactification $\widetilde{\mathcal{M}_N}(\mathbb{C})$, (cf. [**G**], page 5), qu'il est parlant de voir comme l'ensemble des $(-\infty, u)$, $u \in \mathbb{C}/\Lambda$.

Il est alors facile, mais un peu calculatoire, de voir que la rétraction r de 2.4.3 est décrite par l'application $(z,u) \mapsto (-\infty, u)$, bien définie sur un voisinage (de la forme $\operatorname{Re} z < -A$, A réel grand) de E. La fonction covariante $(z,u) \to e^{2\pi z/N}$ définit (à une constante complexe près) une section du fibré $\mathcal{L}(E)$, dont on peut voir qu'elle est définie sur R_N. Les fonctions $a_k(u)$ définissent des sections de la puissance k-ième du fibré conormal de E. Si, dans le choix 2, on prend pour e la section définie par $e^{2\pi z/N}$, il est clair que modulo ces identifications, développement de Fourier analytique, et développement de Fourier algébrique (10) coïncident. On obtient ainsi des critères de rationalité ou d'arithméticité des formes modulaires de Picard, en fonction de leur développement de Fourier-Jacobi analytique, que nous nous n'expliciterons pas.

4. Le changement de base pour les formes modulaires de Picard

4.1. Rappels sur les surfaces algébriques.

4.1.1. Rappelons qu'une surface S (que nous supposerons toujours propre et lisse sur un corps k) est dite *de type général* si elle est de dimension de Kodaïra 2, c'est à dire si une puissance du faisceau canonique définit un morphisme vers un espace projectif dont l'image est de dimension 2. Il revient au même de demander que $\dim_k H^0(\mathcal{L}(nK))$ tend vers l'infini en Cn^2 avec n, où C est une constante et K un diviseur représentant le faisceau canonique. Il est clair (par le changement de base de la cohomologie pour les extensions du corps de base) qu'une surface sur un corps k est de type général si et seulement si elle l'est après une extension arbitraire k' du corps de base.

4.1.2. Rappelons qu'une surface S (propre et lisse comme toujours) sur un corps $\bar{k}$ algébriquement clos est dite *minimale* si elle n'admet pas de droite exceptionnelle, i.e. de sous-variété de dimension 1, isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}^1$, et d'auto-intersection -1.

Nous dirons qu'une surface S sur un corps k est minimale si et seulement si la surface $S \times_k \bar{k}$ l'est.

4.1.3. Dans une surface de type général S, on a

$$K^2 > 0.$$

Si de plus S est minimale, et si C est une courbe irréductible de S, on a

$$KC \geq 0.$$

Autrement dit, K est numériquement effectif.

Voir par exemple [**B**], proposition 1.

4.1.4. On peut se demander si ces deux notions sont stables par spécialisation. Précisément, soit T le spectre d'un anneau de valuation discrète, 0 son point fermé et η son point générique. Soit S un schéma sur T, propre et lisse de dimension relative 2 (bref, une surface relative). On note S_0 et S_η les fibres spéciale et générique de S. Ce sont des surfaces sur un corps.

Le faisceau canonique relatif sur S ($\Omega^2_{S/T}$) se restreint en deux faisceaux sur S_0 et $S\eta$, qui sont les faisceaux canoniques respectifs de S_0 et S_η (cela résulte simplement de la compatibilité de la formation du faisceau des formes différentielles relatives au changement de la base). On note K_0 et K_η des diviseurs canoniques de S_0 et S_η.

Faute d'avoir su trouver une référence pour la proposition suivante, nous en donnons une démonstration.

PROPOSITION 4.1.5. *Si S_η est de type général (resp. minimale) alors il en va de même de S_0*

Démonstration — Si S_η est de type général, alors $\dim H^0(S_\eta, nK_\eta)$ croît en n^2, et comme $\dim H^0(S_0, nK_0) \geq H^0(S_\eta, nK_\eta)$ par le théorème de semi-continuité ([**HA**], III.12.8) il en est de même de $\dim H^0(S_0, nK_0)$. Donc S_0 est aussi de type général.

Pour minimal, c'est un peu plus difficile. Il est clair tout d'abord qu'on peut supposer que le corps résiduel k de T est algébriquement clos. Supposons qu'il existe une droite exceptionnelle D dans S_0. Nous allons montrer qu'il en existe aussi une sinon dans S_η, au moins dans $S_{\bar\eta}$, où $\bar\eta$ désigne la clôture algébrique du corps des fractions η de T, et $S_{\bar\eta} = S_\eta \times_\eta \bar\eta$.

Considérons le schéma de Hilbert H_T des sous-schémas des fibres de $S \to T$ qui ont même polynôme de Hilbert P que $D \subset S_0$ (voir [**FGA**], exposé 221, pages 11 *sqq*; c'est ce que Grothendieck note $Q = \mathrm{Quot}^P(\mathcal{O}_S, S, T)$. Les conditions d'existence sont trivialement vérifiées). Comme la formation de P_S commute au changement de base, les fibres P_0 et P_η correspondent aux schémas de Hilbert dans les *variétés* S_0 et S_η.

Remarquons le fait suivant : Une famille C propre et lisse de courbes incluses dans une famille S propre et lisse de surfaces vérifie (si la base est localement nœthérienne et connexe) que l'auto-intersection de chaque courbe dans chaque surface est la même. Cela découle par exemple de l'invariance de la caractéristique d'Euler d'un faisceau cohérent.

On en déduit facilement que le foncteur de la catégorie des T-schémas localement noethériens et connexes vers la catégorie des ensembles qui définit le schéma de Hilbert H_S est la somme disjointe des sous-foncteurs correspondants aux courbes d'une auto-intersection donnée, et de là, que H_T est une union disjointe de schémas H_T^k paramétrant les courbes dont l'auto-intersection est l'entier k.

Considérons donc le schéma H_T^{-1} au dessus de T (i.e. le schéma de Hilbert paramétrant les courbes de même polynôme de Hilbert que D et d'auto-intersection -1).

La droite exceptionnelle D sur S_0 dont on a supposé l'existence définit un morphisme $\operatorname{Spec} k \to H_T^{-1}$ et de là un point de (la fibre spéciale) de H_T^{-1}. Or, si l'on note $\mathcal{N}_{D/S_0}$ le fibré normal à D dans S_0, on a

$$H^1(D, \mathcal{N}_{D/S_0}) = 0$$

car $\mathcal{N}_{D/S_0}$ est de degré $D^2 = -1$ sur la droite projective D. Comme de plus D est lisse donc localement intersection complète, on peut appliquer le corollaire 5.4 de l'exposé 221 de [**FGA**], et l'on voit que H_T est lisse sur T au point correspondant à D. Il en va donc de même de H_T^{-1} et cela implique que le morphisme $H_T^{-1} \to T$ est surjectif.

(Lemme implicite trivial : si X est un schéma sur T, tel que X_0 est non vide, et que $X \to T$ est lisse en un point $x_0 \in X_0$, alors $X \to T$ est surjectif.)

Ceci implique que la fibre générique H_η^{-1} de H_T^{-1} est non vide, donc qu'elle admet, après extension finie du corps de base, des points rationnels (puisqu'elle est localement de type fini, *loc. cit.*).

Ceci signifie que $S_{\bar{\eta}}$ admet une droite exceptionnelle et donc n'est pas minimale, ce qui termine la preuve.

Remarque : noter qu'il est maintenant très facile de voir qu'en fait H_T^{-1} est étale et (au moins si S_0 est supposé de type général) fini sur T. □

4.2. Un calcul de cohomologie cohérente.

4.2.1. Dans toute cette partie, on fixe un entier N qui vérifie les hypothèses de la proposition 3.3.1.

On choisit une composante irréductible $\widetilde{\mathcal{M}_N}^0$ de $\widetilde{\mathcal{M}_N}$ sur R_N. Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de R_N, on pose $S_{\mathfrak{P}} = \widetilde{\mathcal{M}_N}^0 \otimes k(\mathfrak{P})$, où $k(\mathfrak{P})$ est le corps résiduel au point $\mathfrak{P}$ de $\operatorname{Spec} R_N$.

Pour tout $\mathfrak{P}$, $S_{\mathfrak{P}}$ est donc une surface connexe, propre et lisse sur un corps (dont la caractéristique est première à ND).

LEMME 4.2.2. *Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de R_N, $S_{\mathfrak{P}}$ est une surface minimale de type général.*

Démonstration — Cela résulte immédiatement de la proposition 3.3.1 et de la proposition 4.1.5. □

PROPOSITION 4.2.3. *On suppose que N vérifie les hypothèse de la proposition 3.3.1.*

On a alors, pour tout entier $n \geq 2$,

$$H^1(S_{\mathfrak{P}}, \mathcal{L}(nK)) = 0.$$

Démonstration —

Il suffit d'invoquer le théorème de Deligne-Illusie-Raynaud (cf. [**I**], formule (5.8.2) du théorème (5.8) page 145, et remarque (5) page 147.), applicable ici parce que $\mathcal{L}(K)$ est numériquement effectif (d'après le lemme précédent et (4.1.3)) et que $S_{\mathfrak{P}}$ est relevable à $W_2(k)$ (car p est non ramifié dans $\mathcal{O}$) :

$$H^1(S_{\mathfrak{P}}, \mathcal{L}(nK)) = 0, \text{ pour } n \leq -1.$$

On conclut par dualité de Serre :

$$0 = H^1(S_{\mathfrak{P}}, \mathcal{L}(nK)) = (H^{2-1}(S_{\mathfrak{P}}, \mathcal{L}(K - nK)))^*.$$

□

4.2.4. On fixe $\mathfrak{P}$, et pour alléger les notations, on pose $S = S_{\mathfrak{P}}$. Appelons E le bord $D_N \cap S$. C'est la réunion disjointe d'un certain nombre c de composantes connexes qui sont des courbes elliptiques.

Fixons maintenant un entier $n \geq 2$, et soit m un entier tel que

$$1 \leq m \leq n-1.$$

On a une suite exacte de faisceau sur S

$$0 \to \mathcal{L}(nK + (m-1)E) \to \mathcal{L}(nK + mE) \to \mathcal{L}(nK + mE) \otimes j_*\mathcal{O}_E \to 0,$$

où j est l'injection canonique de E dans $S_{\mathfrak{P}}$.

Cette suite donne lieu à une suite exacte longue, dont on tire

$$H^1(S, \mathcal{L}(nK + (m-1)E)) \to H^1(S, \mathcal{L}(nK + mE))$$

$$\to H^1(S, \mathcal{L}(nK + mE) \otimes j_*\mathcal{O}_E).$$

Le troisième terme s'identifie au H^1 sur E de la restriction à E du faisceau $\mathcal{L}(nK + mE)$. Ce faisceau a un degré sur E égal à

$$(nK + mE).E = nKE + mE^2 = (n-m)KE > 0.$$

Par dualité de Serre, (et par le fait que le degré du fibré dualisant sur E est nul) ce H^1 est nul, et on voit ainsi, par récurrence que $H^1(S, \mathcal{L}(nK + mE)) = 0$ pour $m \leq n-1$, et donc que

$$H^1(S, \mathcal{L}(nK + (n-1)E) = 0.$$

Il reste une étape, pour laquelle il faut être un peu plus soigneux. On a la suite exacte

$$H^1(S, \mathcal{L}(nK + (n-1)E)) \to H^1(S, \mathcal{L}(nK + nE))$$

$$\to H^1(S, \mathcal{L}(nK + nE) \otimes \mathcal{O}_E) \to H^2(S, \mathcal{L}(nK + (n-1)E))$$

Nous allons montrer que le terme en H^2 dans la suite exacte précédente est nul. Par dualité de Serre, ce terme est dual du H^0 du faisceau associé au diviseur

$$K - nK - (n-1)E = (1-n)(E + K).$$

Mais l'inverse du faisceau $\mathcal{L}((1-n)(E+K)$ est gros (car $\mathcal{L}(m(E+K))$ a au moins autant de section que $\mathcal{L}(mK)$ d'après le principe de Köcher). Donc $\mathcal{L}((1-n)(E+K))$ ne peut avoir de section, et le terme en H^2 est nul.

Quant au $H^1(S_{\mathfrak{P}}, \mathcal{L}(nK + nE) \otimes \mathcal{O}_E)$, c'est simplement le H^1 du fibré trivial sur E, qui est donc de dimension le nombre c de composantes connexes de E.

Enfin, remarquons que l'espace vectoriel $H^2(S, \mathcal{L}(nK + nE))$ est nul lui aussi. En effet, c'est le dual de $H^0(S, (1-n)(E-K) - E)$, qui s'injecte dans $H^0(S, (1-n)(E-K)) = 0$.

4.3. Conclusion. La proposition précédente permet d'appliquer les théorèmes de changements de base en cohomologie cohérente, et d'obtenir :

PROPOSITION 4.3.1. *Soit R une Spec $\mathcal{O}[1/DN]$-algèbre. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de R. Supposons $N \geq 3$ et, si $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$, $N \geq 5$.*

Alors, si $n \geq 2$, le morphisme naturel

$$H^0(\widetilde{\mathcal{M}}_N \times \mathit{Spec}\, R, \mathcal{L}(nK + nE)) \otimes R/\mathfrak{P} \to H^0(\widetilde{\mathcal{M}}_N \times \mathit{Spec}\,(R/\mathfrak{P}), \mathcal{L}(nK + nE))$$

est un isomorphisme. Autrement dit

$$M_R(n, N) \otimes R/\mathfrak{P} \simeq M_{R/\mathfrak{P}}(n, N).$$

De plus, $M_R(n, N)$ est un R-module localement libre.

Ces assertions restent vraies, si $n \geq 1$, en remplaçant M_R par M_R^0

Démonstration — On peut supposer que R est une une R_N-algèbre, vu que $R_N \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/DN]$ est fidèlement plat.

L'assertion "respée", sur les formes paraboliques, en poids $n \geq 2$, résulte de [**M**]. corollaire 1, page 49, puisqu'on a vu que le H^1 du faisceau des formes paraboliques $\mathcal{L}(nK + (n-1)E)$ était nul sur toute fibre $S_{\mathfrak{P}}$.

En ce qui concerne les formes modulaires de poids $n \geq 1$, sections du faisceau $\mathcal{L}(nK + nE)$, le calcul précédent montre que le $H^1(S_{\mathfrak{P}}, \mathcal{L}(nK + nE)$ ne dépend pas du point $\mathfrak{P}$ choisi. Le corollaire 2 de [**M**], page 51 montre alors que la formation du module des formes modulaires commute à tout changement de base. En particulier, $M_R(n, N) \otimes R/\mathfrak{P} \simeq M_{R/\mathfrak{P}}(n, N) = H^0(S_{\mathfrak{P}}, \mathcal{L}(nK + nE))$. Mais la dimension de ce H^0 ne dépend pas de $\mathfrak{P}$, par invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau puisqu'il en va ainsi du H^1, et du H^2 (qui est toujours nul) de ce faisceau. Le lemme de Nakayama montre donc que $M_R(n, N)$ est localement libre sur R.

Reste à prouver l'assertion pour les formes paraboliques quand $n = 1$: il résulte de la dégénerescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham (cf. [**I**]) que $H^0(\widetilde{\mathcal{M}_N}, \Omega_{\widetilde{\mathcal{M}_N}/\operatorname{Spec} R_n})$ s'identifie à un sous-module du $H^1_{DR}(\widetilde{\mathcal{M}_N}/\operatorname{Spec} R_N)$. Ce R_N-module est sans torsion (s'il avait de la p-torsion, il en serait de même, par un théorème classique de comparaison, du $H^1_{et}(\widetilde{\mathcal{M}_N} \times \operatorname{Spec} \bar{K}'_N, \mathbb{Z}_p)$, et ce dernier groupe s'identifie au groupe de cohomologie singulière $H^1(\widetilde{\mathcal{M}_N} \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p)$, qui est sans torsion, comme tous les H^1 singuliers). Ainsi, $H^0(\widetilde{\mathcal{M}_N}, \Omega_{\widetilde{\mathcal{M}_N}/\operatorname{Spec} R_n})$ est sans torsion, donc localement libre. On conclut grâce à [**I**], proposition 6.6. □

Par descente, on peut lever les hypothèses sur le niveau N – au prix de la perte de quelques places :

THÉORÈME 4.3.2. *La proposition précédente reste vraie, si l'on ne suppose plus rien sur N (que $N \geq 1$), et si l'on fait l'hypothèse que 2, 3 et 7 sont inversibles dans R.*

En particulier, pour $N = 1$, on a l'énoncé suivant :

Soit R une $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/D]$-algèbre. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de R. On suppose que 2,3 et 7 sont inversibles dans R. Soit $n \geq 2$ (resp $n \geq 1$). Alors M_R (resp. M_R^0) est localement libre sur R et

$$M_R(n,1) \otimes R/\mathfrak{P} \simeq M_{R/\mathfrak{P}}(n,1).$$

(resp. $M_R^0(n,1) \otimes R/\mathfrak{P} \simeq M_{R/\mathfrak{P}}^0(n,1)$.

Démonstration — Contentons-nous de prouver le résultat quand $N = 1$, le reste se faisant de la même manière.

Inversons 2, 3 et 7 dans R, autrement dit, posons $R' = R[1/42]$; par abus de notation, nous noterons aussi $\mathfrak{P}$ l'idéal $\mathfrak{P}R'$. On a bien sûr $R/\mathfrak{P} = R'/\mathfrak{P}$, et donc

$$M_{R/\mathfrak{P}}(n,1) = M_{R'/\mathfrak{P}}(n,1).$$

Par platitude de R sur R_1, on a aussi :

$$M_R(n,1) \otimes R/\mathfrak{P} = M_{R'}(n,1) \otimes R'/\mathfrak{P},$$

et l'on voit donc qu'il suffit de prouver la proposition pour R' au lieu de R.

Dans la proposition précédente, faisons $N = 16$ (et travaillons sur R', qui est bien une $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/2D]$-algèbre) :

$$M_{R'}(n,16) \otimes R/\mathfrak{P} \simeq M_{R'/\mathfrak{P}}(n,16).$$

On sait que $M_{R'/\mathfrak{P}}(n,1)$ est l'ensemble des éléments invariants par

$$\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$$

de $M_{R'/\mathfrak{P}}(n,16)$, et de même que $M_{R'}(n,1)$ est l'ensemble des éléments invariants par $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ de $M_{R'}(n,16)$. Par ailleurs, le lemme 4.3.3 montre que l'ordre de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ n'admet que 2, 3 et 7 comme facteurs premiers.

Le théorème résulte donc du fait bien connu suivant : si M est un module sur A, G un groupe fini d'automorphismes de M d'ordre inversible dans A, et B une A-algèbre, le morphisme

$$M^G \otimes_A B \to (M \otimes_A B)^G$$

est un isomorphisme. (En effet, M^G est alors l'image du projecteur $1/|G| \sum_{g \in G} g$). □

LEMME 4.3.3. *Les facteurs premiers intervenant dans l'ordre du groupe $GU(2,1)(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ sont 2, 3 et 7.*

Démonstration — Le morphisme $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \to \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{F}_2)$ a pour noyau un 2-groupe. Il suffit donc de montrer que l'ordre du groupe $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{F}_2)$ n'admet que 2, 3 et 7 comme facteurs premiers. Pour cela, on distingue trois cas :

1) 2 est décomposé dans $\mathcal{O}$. On a alors

$$\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$$

dont l'ordre est

$$(2^3-1)\times(2^3-2)\times(2^3-2^2) = 7\times 3\times 2^3.$$

2) 2 est inerte dans $\mathcal{O}$. On vérifie facilement que $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{F}_2)$ est d'ordre

$$3^4\times 2^3$$

3) 2 est ramifiée dans $\mathcal{O}$. Dans ce cas, $\mathcal{O}/2 = \mathbb{F}_2[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$, et sur $\mathbb{F}_2[\varepsilon]$ tant l'application $x \mapsto -x$ que la conjugaison sont l'identité. Revenant à la définition (I.3.2.1) de GU, on voit donc

$$\mathrm{GU}(\mathbb{F}_2) = \mathrm{O}_3(\mathbb{F}_2[\varepsilon]).$$

Mais l'ordre de ce dernier groupe ne diffère de celui de $\mathrm{O}_3(\mathbb{F}_2)$ que par une puissance de 2, et $\mathrm{O}_3(\mathbb{F}_2) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ a un ordre dont les facteurs premiers sont 2,3 et 7. □

5. Application : construction d'un analogue de l'invariant de Hasse

Cette partie est inspirée de [**K**].

5.1. Caractéristique p.

5.1.1. Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/D]$, *de caractéristique* p, ou, ce qui revient au même, un schéma sur $\mathcal{O}/p$.

Soit (G,i) un schéma en groupe de dimension 3 sur S, tel que $\tau = Lie(G) = e^*\Omega_{G/S}^{\otimes -1}$ est localement libre, et i est une action de $\mathcal{O}$ sur G de type (2,1) (cf. I.2).

Le faisceau $Lie(G)$ est naturellement muni d'une opération "puissance p-ième", notée $x \mapsto x^{(p)}$, qui est additive et p-linéaire, i.e.

$$(\lambda x)^{(p)} = \lambda^p x^{(p)}.$$

Par fonctorialité, cette opération laisse stables les sous-faisceaux τ^+ et τ^- de $Lie(G)$ (définis en 2.1.3), et induit donc une opération additive et p-linéaire sur le faisceau

$$(\tau^-)^{\otimes 2}\otimes \wedge^2(\tau^+)$$

5.1.2. Rappelons que la donnée d'une opération p-linéaire sur un faisceau inversible $\mathcal{F}$ sur S est équivalente à la donnée d'une section de $\mathcal{F}^{\otimes(1-p)}$. En effet, si $x \mapsto x^{(p)}$ désigne l'opération sus-mentionné sur les sections de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U de S, et si x_0 désigne une section inversible (ce qui existe toujours, quitte à restreindre U) de $\mathcal{F}$ sur U, la section $s_0 = x_0^{\otimes -p}\otimes x_0^{(p)}$ de $\mathcal{F}^{\otimes(1-p)}$ ne dépend pas de x_0 : pour tout $\lambda \in H^0(U,\mathcal{O}_U^*)$

$$(\lambda x_0)^{\otimes -p}\otimes(\lambda x_0)^{(p)} = x_0^{\otimes -p}\otimes x_0^{(p)}.$$

On peut donc recoller les section s_0, et obtenir une section

$$h \in \mathcal{F}^{\otimes(p-1)}.$$

5.1.3. Appliquant en particulier 5.1.1 à (G, i), quand (G, ϕ, i) est une $\mathcal{M}$-structure sur S, et utilisant la traduction 5.1.2, on obtient une section canonique h de $\big((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\big)^{\otimes(1-p)}$, et ces sections se recollent pour définir une forme modulaire de poids $p-1$ (et de niveau 1) sur $\mathcal{O}/p$,

$$h \in M_{\mathcal{O}/p}(p-1, 1),$$

qu'on pourrait appeler *invariant de Hasse*, étant entendu que :

LEMME 5.1.4. *La forme modulaire h s'annule exactement aux points de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}/p$ qui paramètrent des $\mathcal{M}$-structures (A, ϕ, i) telles que A n'est pas ordinaire.*

Démonstration — Il est clair par construction que h s'annule en (A, ϕ, i) si, et seulement si, la puissance p-ième sur $Lie(A)$ est bijective. Or il est bien connu que cette condition est équivalente à l'ordinarité de A. □

5.1.5. Si (G, i, ϕ) est maintenant une $\mathcal{M}_\infty$-structure sur S, on a exactement de la même façon qu'en 5.1.3 une section canonique h_0 de

$$\big((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\big)^{\otimes(1-p)}$$

sur S. Si l'on fixe $N \geq 3$, ces sections se recollent en une section

$$h^0 \in H^0(D_N, \big((\tau^-)^{\otimes 2} \otimes \wedge^2(\tau^+)\big)^{\otimes(1-p)}$$

de G, de manière exactement analogue à 5.1.2, 5.1.3.

LEMME 5.1.6. *La section h_0 est nulle si p est inerte. Si p est décomposé, elle ne s'annule pas sur D_N.*

Démonstration — Si (G, i) est la $\mathcal{M}_\infty$-structure universelle sur D_N, de tore maximal T, et de courbe elliptique $G/T = E$, on a la suite exacte de faisceaux localement libres (reprenant les notations de la preuve du lemme 2.1.8)

$$0 \to \tau_T \to \tau_G \to \tau_E \to 0,$$

L'opération "puissance p-ième" est inversible pour un tore, donc sur τ_T et en particulier sur τ_T^+ et τ_T^-.

Elle est inversible (resp. nulle) sur E si E est ordinaire (resp. supersingulière), donc si p est décomposé (resp. inerte).

Le lemme en découle facilement. □

5.1.7. Calculons le développent de Fourier-Jacobi de h, qu'on peut voir comme une forme de poids $p-1$, et de niveau N sur $\operatorname{Spec} R_N/p$. Suivant la définition du développement de Fourier-Jacobi de h, donnée en 2.5.2, on considère le restriction $\tilde{h}$ de h au complété formel de D_N dans $\widehat{\mathcal{M}_N}$.

Par fonctorialité de l'application "puissance p-ième", on a

$$r^* h_0 = \tilde{h}.$$

Par définition du développement de Fourier-Jacobi, ceci signifie que le développement de Fourier-Jacobi de h est constant (2.5.4), i.e. que pour toute composante E_i du bord, les fonctions Theta c_r définies pour chaque composante du bord en 10 sont nulles si $r \geq 1$ (2.5.5).

Si p est inerte, d'après le lemme précédent, le développement de Fourier-Jacobi de h est donc nul, ce qui implique que h est nul, et on retrouve le fait par ailleurs trivial que si p est inerte, il n'existe pas de $\mathcal{M}$-structure (A, ϕ, i) en caractéristique p telle que A soit ordinaire.

Si p est décomposé, au contraire, on a ainsi obtenu l'existence d'une forme modulaire h sur $\operatorname{Spec} R_N/p$ dont le développement de Fourier-Jacobi est une constante non nulle (dépendant du choix (1).

5.2. Caractéristique zéro.

THÉORÈME 5.2.1. *Soit p un nombre premier décomposé dans $\mathcal{O}$. Alors, pour tout niveau $N \geq 3$ ($N \geq 5$ si $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$), il existe une forme modulaire de Picard sur $\mathcal{O}[1/DN]$, de poids $p-1$, dont le développement de Fourier-Jacobi est congru à une constante non nulle modulo p.*

Démonstration — Cela découle immédiatement de 5.1.7, et de la proposition 4.3.1 □

CHAPITRE III

Mauvaise réduction des surfaces modulaires de Picard

1. Introduction

1.1. L'objet de ce chapitre est de décrire la mauvaise réduction en une place p de certains modèles entiers des surfaces modulaires de Picard avec structure de niveau iwahorique ou parahorique en p.

1.2. La majeure partie de ce chapitre est consacré au cas p inerte, structure de niveau iwahorique. Nous construisons un modèle entier, montrons qu'il est plat et semi-stable (en décrivant ses singularités), et nous terminons notre étude par quelques propriétés géométriques globales.

La méthode utilisée pour décrire les singularités est celle inaugurée par De Jong ([**DJ**]), basée sur le théorème de Grothendieck-Messing.

1.3. Dans [**R-Z2**], on propose des candidats modèles pour une large classe de variété de Shimura, contenant la notre, mais on ne les étudie pas, et à ma connaissance, il n'a jamais été prouvé que dans le cas qui nous intéressent, ce modèle de Rapoport-Zink est semi-stable.

Le modèle que nous proposons est l'espace de module d'un type de structures se décrivant en termes géométriques simples, sans référence a la cohomologie. Ceci rend nettement plus aisé l'étude des propriétés *globales* de ce modèle, que nous faisons à la section 5. Il découle en fait facilement de la proposition 4.1.4 que notre modèle est le même que celui de Rapoport-Zink.

1.4. La section 6 est consacrée au cas de structures de niveaux parahoriques en une place p décomposée. Tout est beaucoup plus simple dans ce cas, et l'on obtient facilement un modèle entier plat et semi-stable.

1.5. Nous montrons enfin à la section 7 qu'en un sens très naturel, dans les deux cas considérés, notre modèle est l'unique modèle canonique de la variété de Shimura considérée.

2. Préliminaires

2.1. Compléments sur le type d'un module avec action de $\mathcal{O}$. Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/2]$, et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules, muni d'une action i de $\mathcal{O}$ par $\mathcal{O}_S$-endomorphismes. En particulier, on dispose d'un endomorphisme J de $\mathcal{F}$, défini par

$$J = i(\sqrt{-d})$$

et vérifiant $J^2 = -d$. Inversement, l'action de $\mathcal{O}$ tout entier est déterminée par J.

PROPOSITION 2.1.1. *Soit S un schéma sur Spec $\mathcal{O}[1/2d]$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules localement libre de type fini sur S, muni d'une action de $\mathcal{O}$ comme ci-dessus, de type (p,q).*

- *(i) $\mathcal{F}$ est la somme directe des sous-faisceaux Ker $(J-\sqrt{-d})$ et de Ker $(J+\sqrt{-d})$. Ces deux faisceaux sont localement libres de rang respectivement p et q*
- *(ii) Soit S et $\mathcal{F}$ comme en (i), et $S' \to S$ un morphsime arbitraire. Alors si $\mathcal{F}$ est de type (p,q), il en va de même pour $\mathcal{F}_{S'}$ muni de son action de $\mathcal{O}$ obtenu par changement de base.*
- *(iii) Si $S = \operatorname{Spec} R$ est affine, et M est le R-module des sections de $\mathcal{F}$, tout sous-module $\mathcal{O}$-stable de M qui admet un supplémentaire dans M admet un supplémentaire $\mathcal{O}$-stable.*

Démonstration — Les assertions (i) et (ii) ne sont mises ici que *pour mémoire*: voir I.2.

Prouvons (iii) : si N est un sous-module stable par $\mathcal{O}$, on a

$$N = (\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-d}) \cap N) \oplus (\operatorname{Ker}(J+\sqrt{-d}) \cap N).$$

Mais

$$\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-d})/(\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-d}) \cap N)$$

est facteur direct de M/N (un supplémentaire est $(\operatorname{Ker} J+\sqrt{-d})/((\operatorname{Ker} J+\sqrt{-d}) \cap N)$.) Comme par hypothèse N admet un supplémentaire, forcément projectif, M/N est projectif et donc aussi son facteur direct

$$\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-d})/(\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-d}) \cap N).$$

Ce qui signifie que

$$(\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-d}) \cap N)$$

admet un supplémentaire N_1 dans $\operatorname{Ker}(J-\sqrt{-d})$; de même

$$(\operatorname{Ker}(J+\sqrt{-d}) \cap N)$$

admet un supplémentaire N_2 dans $\operatorname{Ker}(J+\sqrt{-d})$. Le sous-module

$$N_1 \oplus N_2$$

est un supplémentaire $\mathcal{O}$-stable de N. L'assertion sur les types est triviale (il suffit de localiser). □

2.2. La propriété (**) de Raynaud.

2.2.1. Soit p un nombre premier inerte dans $\mathcal{O}$, et $q = p^2$. Si S est un schéma au dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$, et si $q-1$ est inversible dans $\mathcal{O}_S$, alors S est naturellement au-dessus du schéma $\operatorname{Spec} D$ de [**Ra**], 1.1. Dans ce numéro, on fait cette hypothèse.

Si G est un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels sur S, on peut donc définir comme *loc. cit*, page 246 la propriété (**) : Le schéma en $\mathbb{F}_q$ vectoriel G a la propriété (**) de Raynaud si la décomposition

$$I = \oplus I_\chi$$

de l'idéal d'augmentation de sa $\mathcal{O}_S$-bigèbre sous l'action du groupe $\mathbb{F}_q^*$ est telle que les I_χ sont des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang 1.

Noter que si G vérifie (**), il est de rang p^2. Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier.

- (a) Si S est connexe, et si G vérifie la proprieté (**) au-dessus d'un point $s \in S$ alors G vérifie (**).
- (b) Si S est connexe et contient un point de caractéristique zéro, alors G vérifie (**)
- (c) Si S' est fidèlement plat sur S, et si G' est le S'-schéma $G \times_S S'$ alors G vérifie (**) si et seulement si G' vérifie (**).

Le point (b) est la proposition 1.2.2 de *loc. cit.*, le point (a) est démontré dans la preuve de cette proposition, et (c) est évident.

2.2.2. Il est commode d'étendre la définition de la propriété (**) au cas où $q-1$ n'est pas inversible dans $\mathcal{O}_S$, de la manière triviale suivante: on dira qu'un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels sur S, de rang p^2 vérifie (**) si sa restriction à

$$S[1/(q-1)] := S \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/(q-1)]$$

vérifie (**) au sens du numéro précédent.

Les propriétés (a), (b) du numéro précédent reste vraies pour la propriété (**) ainsi étendue, si l'on remplace dans leur énoncé chaque occurence de S par $S[1/(q-1)]$. La propriété (c) reste vraie sans changement.

2.3. La classification de Raynaud.

2.3.1. Dans ce paragraphe, nous travaillons sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p, et nous explicitons la classification de Raynaud des schemas en $\mathbb{F}_q$-vectoriel vérifiant la condition (**). Nous supposons choisi l'un des deux plongements de $\mathbb{F}_q$ dans k.

Soit G un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel. Nous noterons G^* son dual de Cartier et $\bar{G}$ le schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriel ayant même schéma en groupes sous-jacent, mais muni de l'action conjuguée de $\mathbb{F}_q$.

D'après Raynaud, les schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriel vérifiant (**) sont paramétrés par les quadruplets

$$(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \{0,1\}^4,$$

vérifiant

$$a_0 b_0 = a_1 b_1 = 0.$$

(cf. [**Ra**], théorème 1.4.1 page 255 ou l'article de Shatz, page 56 de [**C-S**]). Il y a donc, à isomorphismes près, 9 schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriels sur k.

Le dual de

$$G_{(a_0,b_0,a_1,b_1)}$$

est isomorphe à

$$G_{(b_0,a_0,b_1,a_1)},$$

son conjugué à

$$G_{(a_1,b_1,a_0,b_0)}.$$

Le schéma sous-jacent à $G_{(a_0,b_0,a_1,b_1)}$ est $\operatorname{Spec} k[X,Y]/(X^p - b_0 Y, Y^p - b_1 X)$.

Notons $\alpha(G)$ (ou simplement α) la dimension de l'espace vectoriel des formes différentielles invariantes sur un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels G et $\beta(G)$ la dimension des formes différentielles invariantes sur G^* : $\beta(G) = \alpha(G^*)$.

Il est clair que $\alpha = 2 - b_0 - b_1$, et donc que $\beta = 2 - a_0 - a_1$. Il en résulte que la structure de schéma en groupes de G (i.e. sans la structure de $\mathbb{F}_q$-vectoriel) ne dépend que de (α, β).

- Si $(\alpha,\beta) = (2,2)$, on a $G = G_{(0,0,0,0)} = \alpha_p \times \alpha_p$. Ce groupe est autodual. Il n'y a qu'un seul moyen, à isomorphisme près, d'en faire un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels vérifiant (**) : on le munit d'une action de $\mathbb{F}_q$ sur le premier facteur α_p, et de l'action conjuguée sur le second facteur.

  Rappelons au passage que $\mathbb{F}_q$ agit sur α_p (sur le corps de base k) de la manière suivante : $\alpha_p(R) = \{x \in R, x^p = 0\}$ sous groupe de $(R,+)$ est muni de l'action scalaire de $\mathbb{F}_q$: $\lambda \in \mathbb{F}_q$ envoie x sur λx.

- Si $(\alpha,\beta) = (2,1)$, on a $G = \alpha_{p^2}$, qui peut être muni, comme α_p, de deux action de $\mathbb{F}_q$ non conjuguées. Son dual $\alpha^*_{p^2}$ vérifie $(\alpha,\beta) = (2,1)$ et $\alpha^*_{p^2}(R)$ l'ensemble des $(x,y) \in R^2$ vérifiant $x^p = y^p = 0$, l'addition étant celle des vecteurs de Witt d'ordre 2 : $W_2(R)$, à savoir :

$$(x,y) + (z,t) = (x + z + \sum_{0 \le a \le p-1,\, 0 \le b \le p-1, a+b=p} \frac{y^a}{a!}\frac{t^b}{b!}, y + t). \tag{16}$$

- Si $(\alpha,\beta) = (1,1)$, le groupe autodual G peut être défini ainsi : pour toute $\bar{\mathbb{F}}_p$-algèbre R, $G(R)$ est l'ensemble des couples

$$(x,y) \in R^2 \text{ [illegible]}$$

vérifiant

$$x = y^p, \quad x^p = 0.$$

L'addition est celle des vecteurs de Witt (16).[1]

– Enfin, si $(\alpha, \beta) = (0, 2)$, est le groupe constant $\mathbb{F}_q^+$ muni de l'action évidente de $\mathbb{F}_q$. C'est un groupe étale et unipotent. Il est isomorphe à son conjugué et son dual est $\mu_p \times \mu_p$ (pour lequel $(\alpha, \beta) = (2, 0)$) qui est connexe et multiplicatif.

2.4. Propriété (**) et type du cristal.

2.4.1. Comme dans le paragraphe précédent, p est inerte dans $\mathcal{O}$, S est un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$, spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p. G est S-schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels. On note $D(G)$ la p-torsion du cristal de Dieudonné de G. C'est un k-espace vectoriel, qui hérite par fonctorialité d'une action de $\mathbb{F}_q$, et donc d'une action de $\mathcal{O}$ grâce au choix d'un isomorphisme $\mathcal{O}/p = \mathbb{F}_q$. On a :

LEMME 2.4.2. *Si le schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels G vérifie (**) le cristal $D(G)$ est de type (1,1).*

Démonstration — Cela se vérifie facilement sur la classification donnée ci-dessus. □

2.4.3.

REMARQUE. Il existe des schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriels, de rang p^2 sur $\mathbb{F}_q$ qui ne vérifient pas (**). En voici un exemple :

On a vu que $\mathbb{F}_q$ agit sur α_p, et le type de $D(\alpha_p)$ est $(1, 0)$. Le groupe de rang p^2 $\alpha_p \oplus \alpha_p$ muni de l'action diagonale de $\mathbb{F}_q$, est donc clairement de type (2,0), et ne peut donc vérifier (**).

3. Définition du modèle entier des surfaces modulaires de Picard iwahoriques

Dans toute cette section, et jusqu'à la section 5, p désigne un nombre premier impair inerte dans K.

3.1. Iwahori en p et structures de niveau correspondantes.

1. Si E est une courbe elliptique supersingulière (resp. et munie d'une multiplication complexe par $\mathcal{O}$) sur k, le schémas en groupes (resp. schéma en $\mathcal{O}/p = \mathbb{F}_q$-vectoriel) $E[p]$ s'identifie à ce groupe G, contrairement à ce qui est affirmé de manière erronée dans [**D-R**], page 27, paragraphe 6.

3.1.1. Le groupe $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{F}_p)$ est (cf. I.3.2.1) le groupe des similitudes unitaires de $V_1 \otimes \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_q^3$ pour la forme hermitienne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit B_p le sous-groupe des matrices de $\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{F}_p)$ pour lesquelles le premier vecteur e_1 de la base canonique (e_1, e_2, e_3) est propre. Comme l'orthogonal de la

3.2.1. On a ainsi interprété S_{I_pN} comme l'espace de modules grossier, sur $\mathbb{C}$ des $\mathcal{M}_N$-structures $(A, \phi, i, \sigma, \tau)$ munies d'un sous-groupe H vérifiant les propriétés de 3.1.4.

On cherche à définir et à étudier un "bon" modèle de S_{I_pN} sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/(2dN)]$, donc en *gardant* la caractéristique p. Pour cela, on pose :

DÉFINITION. Soit S un schéma sur $\mathcal{O}[1/(2dN)]$. Une $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$-structure sur S est la donnée d'une $\mathcal{M}_N$-structure $(A, \phi, i, \sigma, \tau)$, et d'un sous-schéma en groupes H de A, qui vérifie les 5 conditions suivantes.

- (1) H est fini et plat.
- (2) H est de rang p^2 et de p-torsion.
- (3) H est stable par $\mathcal{O}$.
- (4) H est isotrope pour l'accouplement de Weil associé à la polarisation ϕ.

Les propriétés (1), (2) et (3), ainsi que le fait que $\mathcal{O}/p = \mathbb{F}_q$ font de H un schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriel au sens de [**Ra**]. On demande de plus que

- (5) En tant que schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel, H vérifie la propriété (**)

3.2.2. Considérons la catégorie $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ des $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$-structures sur une base S variable sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/2dN]$, les morphismes de (S, A, ϕ, i, H) vers (S', A', ϕ', i', H') étant les diagrammes *cartésiens*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & S' \end{array}$$

avec $g^*\phi' = \phi$, $g \circ i = i' \circ g$ et $g(H) \subset H'$.

Le foncteur $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)} \to \mathcal{S}ch$ qui à $(S, A, \phi, i, \sigma, \tau, H)$ associe S fait de $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ un champ (fppf) en groupoïdes sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/2dN]$. On définit un 1-morphisme du champ $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ vers le champ $\mathcal{M}$ par $F(S, A, \phi, i, \sigma, \tau, H) = (S, A, \phi, i, \sigma, \tau)$, c'est-à-dire en oubliant H.

PROPOSITION 3.2.3. *Le 1-morphisme F est représentable. C'est un morphisme propre et surjectif. Au dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/(2dNp)]$, F est de plus fini étale de rang $p^3 + 1$*

Démonstration — La représentabilité à montrer est celle du foncteur $F_{(A,\phi,i,\sigma,\tau)}$ (noté en abrégé F_A) qui à S'/S associe l'ensemble des classes d'équivalences de sous-groupes H de A, faisant de $(A, \phi, i, \sigma, \tau, H)$ une $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$-structure, $(A, \phi, i, \sigma, \tau)$ étant une $\mathcal{M}$-structure fixée.

Introduisons le foncteur F'_A qui à S' associe l'ensemble des classes d'équivalence de sous-groupes H de A vérifiant les propriétés (1) à (4) de la définition d'une

$\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$-structure. On montre facilement, exactement comme dans [**DJ**], proposition 1.2, que ce foncteur est représentable, par un schéma propre sur S.

Le foncteur F_A est un sous-foncteur de F'_A, défini par "H vérifie la condition (**) de [**Ra**]". Soit R un anneau de valuation discrète (sur S), de corps des fractions K. Un sous-groupe H de A_R vérifiant (1),(2),(3) et (4), et qui vérifie (5) après extension des scalaires à K, vérifie évidemment déjà (5) sur R. Autrement dit, le critère valuatif de propreté est vérifié pour le morphisme de foncteurs

$$F_A \hookrightarrow F'_A.$$

Ce morphisme de foncteurs est donc représentable par une immersion fermée, et F_A est donc représentable par un schéma propre sur S, et par suite F est représentable et propre.

Pour prouver la surjectivité, considérons un point géométrique de $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ de caractéristique différente de p, i.e. un corps algébriquement clos K avec char $K \neq p$ et une $\mathcal{M}_N$-structure $(A, \phi, i, \sigma, \tau)$ sur K. Alors $A[p]$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^6$ muni de son unique forme symplectique non dégénéré. Si J est l'action d'une racine carrée de $-D$, le groupe engendré par x et Jx est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ dès que x est non nul. Pour que ce groupe soit isotrope, il faut et il suffit que $\langle x|Jx\rangle = 0$. Mais la forme bilinéaire $\langle x|Jy\rangle$ est symétrique, puisque $\langle x|y\rangle$ est antisymétrique, et que J est antiautoadjoint pour $\langle x|y\rangle$. Et une forme quadratique sur $\mathbb{F}_p^6$ admet toujours un vecteur isotrope non trivial. Ainsi, pour x isotrope, $\langle x, Jx\rangle$ est un sous-groupe stable par $\mathcal{O}$ de rang p^2 et isotrope pour l'accouplement de Weil. Le sextuplet $(A, \phi, i, \sigma, \tau, H)$ est donc un K-point de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ qui s'envoie sur le point donné de $\mathcal{M}$.

L'image de F contient donc tous les points de caractéristique différente de p de $\mathcal{M}$, donc est dense. Comme F est propre, cette image est aussi fermée. F est donc surjectif.

Lorsqu'on est sur une base où p est inversible, tout schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel de rang p^2 vérifie (**), et le foncteur F_A s'identifie au foncteur F'_A ci-dessus, classifiant les sous-groupes isotropes, de rang p^2, stables par $\mathcal{O}$ du groupe étale $A[p]$, localement isomorphe pour la topologie étale à $V_1 \otimes \mathbb{F}_p$. On vérifie immédiatement qu'il est représentable par un schéma fini étale, de rang $p^3 + 1$ (cf. 3.1.1). □

COROLLAIRE 3.2.4. *Le champ $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ est un champ algébrique séparé, de type fini sur Spec $\mathcal{O}[1/(2dN)]$. Il est lisse sur Spec $\mathcal{O}[1/(2dNp)]$.*

3.2.5. D'après 3.1.4, et le fait que sur $\mathbb{C}$ tout schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel de rang p^2 vérifie (**), on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}(\mathbb{C}) \simeq S_{I_{p^N}}.$$

Le champ $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ est donc un modèle entier de S_{I_pN}. Nous montrerons plus bas, entres autres, que $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}(\mathbb{C})$ est plat sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/2dN]$, et admet réduction semi-stable.

3.2.6.

Remarque. La condition (5) n'est pas automatiquement vérifiée : soit E une courbe elliptique sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ à multiplication complexe par $\mathcal{O}$. On sait que dans ce cas, $E[p]$ est un groupe unipotent connexe qui contient un unique sous-groupe propre, isomorphe à α_p. (Le schéma en groupes $E[p]$ est plus précisément celui qui vérifie $(\alpha,\beta)=(1,1)$ dans la classification (2.3.1).) Ce sous-groupe α_p de $E[p]$ est stable par $\mathcal{O}$ et isotrope, par unicité.

En prenant $A=E\times E\times E$, en ayant pris soin de remplacer la multiplication complexe sur le troisième facteur par sa conjuguée on obtient une $\mathcal{M}$-structure. En prenant pour $H=\alpha_p\oplus\alpha_p\in E[p]\times E[p]\times 0$, c'est à dire le produit des sous-groupes α_p des deux premiers facteurs, on obtient un monstre vérifiant les 4 premières propriétés de la définition d'une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure, mais pas la cinquième.

Cet exemple montre que si l'on avait omis la condition (5) dans la définition 3.2.1, le champ obtenu n'aurait pas été plat.

4. Étude infinitésimale du modèle entier $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$

L'objectif de cette partie est de décrire le complété formel de $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ en tout point de caractéristique p. Comme $\mathcal{M}^N_{\Gamma_0(p)}$ est étale sur $\mathcal{M}^1_{\Gamma_0(p)}$ (au dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/(2dN)]$) on simplifiera l'exposé et les notations en travaillant seulement avec $\mathcal{M}^1_{\Gamma_0(p)}$, et en écrivant $\mathcal{M}$ pour $\mathcal{M}_1$ (qui est simplement l'espace de module des $\mathcal{M}$-structures (A,ϕ,i)), $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ pour $\mathcal{M}^1_{\Gamma_0(p)}$, etc.

4.1. Une autre présentation de la catégorie des $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures.

Définition. Une $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structure sur S est la donnée d'un 7-uplet

$$(A,\phi,i,A',\psi,i',f)$$

où

- (A,ϕ,i) est une $\mathcal{M}$-structure,
- (A',ψ) est une variété abélienne polarisée sur S, la polarisation ψ étant de degré p^2,
- i' est une action de $\mathcal{O}$ sur A'
- et f est un morphisme $A\to A'$, de degré p^2, $\mathcal{O}$-équivariant,

le tout rendant commutatif le diagramme suivant :

(18)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p\phi"] & A' \arrow[d, "\psi"] \\ A^t & A'^t \arrow[l, "f^t"] \end{tikzcd}$$

On demande aussi que $\operatorname{Ker} f$ vérifie la condition (**) de Raynaud.

Bien sûr, A^t désigne la variété abélienne duale de A et f^t l'isogénie duale de f. Il est clair que les assertions sur les degrés de f et de ψ sont redondantes : à l'aide de la commutativité du diagramme ci-dessus, on montre facilement que l'une quelconque des deux implique l'autre.

PROPOSITION 4.1.1. *Pour tout S sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/2d]$, on peut définir un foncteur de la catégorie des $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structures sur S vers celle des $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures sur S en posant $H = \operatorname{Ker} f$. C'est une équivalence de catégories.*

Démonstration — Soit $(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ une $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structure. Montrons que $\operatorname{Ker} f$ est isotrope. Il suffit bien sûr de le faire quand S est le spectre d'un corps algébriquement clos.

Dans ce cas, les polarisations ϕ et ψ proviennent de faisceaux inversibles amples L et M (respectivement sur A et A'). La polarisation $p\phi$ provient du faisceau $L^{\otimes p}$, et le diagramme commutatif se traduit par

$$f^*M = L^{\otimes p}.$$

D'après [**M**] proposition 1 et page 293, le noyau de f est alors un sous-groupe de $H(pL) = A_p = \operatorname{Ker}(p : A \to A)$, qui est isotrope pour l'accouplement de Weil. De plus, comme f est $\mathcal{O}$-équivariante, son noyau est stable par $\mathcal{O}$. Ainsi, on a bien défini un foncteur de la catégorie des $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structures vers celles de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure.

Construire un foncteur quasi-inverse n'est pas plus difficile : soit (A, ϕ, i, H) une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure. On se place d'abord dans le cas où ϕ provient d'un faisceau inversible ample L. L'isotropie de H implique, toujours d'après Mumford, que le faisceau $L^{\otimes p}$ descend en un faisceau inversible ample M sur la variété abélienne $A' := A/H$. Si f désigne la surjection canonique $A \to A'$, et ϕ et ψ les polarisations associés à L et M, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p\phi"] & A' \arrow[d, "\psi"] \\ A^t & A'^t \arrow[l, "f^t"] \end{tikzcd}$$

Comme H est stable par $\mathcal{O}$ l'action i de $\mathcal{O}$ sur A passe au quotient et définit une action i' sur A'. Bien sûr, f est $\mathcal{O}$-équivariante pour (i, i'). De plus f est de degré p^2, et donc aussi ψ, et on a défini ainsi une $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structure.

Dans le cas où ϕ ne provient pas d'un faisceau L, on utilise un argument de descente fidèlement plate. En effet, après une extension $S' \to S$ f.p.q.c. , ϕ provient d'un faisceau L et permet de définir un morphisme ψ de A' vers A'^t (on a posé $A' = A/H$). Il est évident par unicité que ψ' vérifie les conditions de recollement sur $S' \times_S S'$ et provient donc d'une polarisation ψ de A' sur S qui vérifie le diagramme précédent.

Ainsi on a défini un foncteur de la catégorie des $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures vers celle des $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structures, et on laisse au lecteur la vérification (triviale) du fait que ce foncteur est quasi-inverse du foncteur précédent. □

4.1.2. Les équivalences de catégories de la proposition précédente induisent un isomorphsime de champ en groupoïdes sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/(2d)]$ entre $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ et $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$.

Ajoutons deux propriétés des $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structures qui nous seront utiles.

PROPOSITION 4.1.3. *Soit $(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ une $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structure. Alors pour $c \in \mathcal{O}$, on a*

$$i'(\bar{c})^t \circ \psi = \psi \circ i'(c).$$

Démonstration — L'hypothèse (2) de la définition d'une $\mathcal{M}$-structure implique:

$$i(\bar{c})^t \circ \phi = \phi \circ i(c),$$

d'où bien sûr

$$i(\bar{c})^t \circ (p\phi) = (p\phi) \circ i(c).$$

Par le diagramme commutatif (18), cela équivaut à :

$$i(\bar{c})^t \circ f^t \circ \psi \circ f = f^t \circ \psi \circ f \circ i(c)$$

ou encore à, puisque f et f^t sont $\mathcal{O}$-équivariant :

$$f^t \circ i'(\bar{c})^t \circ \psi \circ f = f^t \circ \psi \circ i'(c) \circ f.$$

En simplifiant par f et f^t, on obtient l'égalité voulue. □

PROPOSITION 4.1.4. *Soit $(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ une $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structure. Alors (A', i') est de type $(2, 1)$.*

Démonstration — On se ramène aisément au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k. Si k n'est pas de caractéristique p, l'isogénie f est étale et induit un isomorphisme ($\mathcal{O}$-équivariant) de $\operatorname{Lie}(A)$ sur $\operatorname{Lie}(A')$, ce qui prouve la proposition.

On peut donc supposer k de caractéristique p. Dans ce cas, cela résulte aisément du lemme 2.4.2 □

4.2. Cohomologie cristalline des $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structures.

4.2.1. *Rappels de cohomologie cristalline.* La cohomologie dont il s'agit est la cohomologie cristalline en degré 1, plus précisément le foncteur contravariant $\mathbb{D}(A)$ défini par de Jong dans [**DJ**].

Pour A variété abélienne sur S, de dimension g, $\mathbb{D}(A)$ est un faisceau cristallin sur S, qui définit en particulier un faisceau zariskien sur S : $\mathbb{D}_S(A)$, que nous noterons simplement $D(A)$. Le faisceau $D(A)$ est localement libre sur S, de rang $2g$, de formation compatible à tout changement de base, et il s'identifie canoniquement à la cohomologie de De Rham relative de A sur S. Les propriétés de $\mathbb{D}(A)$ (ou le plus souvent, simplement de $D(A)$) que nous utiliserons seront soit tirées de [**DJ**] ou de [**B-B-M**] soit démontrées le moment venu.

4.2.2. *Cohomologie des $\mathcal{M}$-structures.* Commençons par étudier, pour une $\mathcal{M}$-structure (A, ϕ, i), la cohomologie $D(A)$ munie de ses structures additionnelles provenant de ϕ et de i.

Nous supposerons que la base est affine : $S = \operatorname{Spec} R$. Le faisceau $D(A)$ est donc un R-module localement libre de rang 6. D'après [**DJ**], page 673, il est muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée

$$B : D(A)^* \to D(A),$$

définie par la composition

$$B = D(\phi) \circ \theta_A,$$

$D(\phi) : D(A^t) \to D(A)$ étant l'image de ϕ par le foncteur contravariant D, et θ_A étant l'isomorphisme $D(A)^* \to D(A^t)$ de [**DJ**].

De plus, par fonctorialité, l'action i de $\mathcal{O}$ sur A en induit une autre sur $D(A)$, qu'on notera encore i.

Notre objectif est maintenant de décrire le système $(D(A), B, i)$.

Traduisons l'hypothèse (2) de la définition des $\mathcal{M}$-structures, concernant l'involution de Rosati.

Pour cela, on utilise le

LEMME 4.2.3. *Si f est une isogénie de A, $D(rosati(f))$ est l'adjoint de $D(f)$ pour la forme bilinéaire non dégénérée B.*

Démonstration —

$$\begin{aligned} D(\mathrm{rosati}(f)) &= D(\phi^{-1} \circ f^t \circ \phi) \\ &\quad \text{(définition de l'involution de Rosati)} \\ &= D(\phi) \circ D(f^t) \circ D(\phi^{-1}) \\ &\quad (D \text{ est un foncteur contravariant}) \\ &= D(\phi) \circ \theta_A \circ D(f)^* \circ \theta_A^{-1} \circ D(\phi)^{-1} \\ &\quad \text{(fonctorialité de } \theta_A) \\ &= B \circ D(f)^* \circ B^{-1} \end{aligned}$$

□

On en déduit que l'opérateur J est *antiautoadjoint* pour la forme bilinéaire B. En effet, l'adjoint de $D(J)$ est $D(\mathrm{rosati}(J))$ d'après le lemme, qui n'est autre que $D(-J) = -D(J)$ par l'hypothèse que l'involution de Rosati est la conjugaison complexe sur $\mathcal{O}$. C'est la traduction de l'hypothèse (2) que nous cherchions.

De plus, comme J est antiautoadjoint, sa trace est nulle, et on voit donc que $D(A)$ est de type (3,3). (Remarque : on aurait pu démontrer ce résultat sans utiliser d'hypothèse sur l'involution de Rosati).

On a assez d'informations pour trouver le "modèle universel" de la cohomologie $(D(A), B, i)$ d'une $\mathcal{M}$-structure.

On considère le $\mathcal{O}$-module M_1, muni d'une action i de $\mathcal{O}$ et d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée B telle que

- $M_1 = \mathcal{O}^6$. On note sa base canonique $(e_1, \ldots, e_6)$.
- Dans les bases $(e_1^*, \ldots, e_6^*)$ et $(e_1, \ldots, e_6)$, le morphisme $B : M_1^* \to M_1$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & -1 & & & & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix} \tag{19}$$

- Si $c \in \mathcal{O}$, $i(c)$ agit comme la multiplication par le scalaire c sur $\mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3$, par le scalaire $\bar{c}$ sur $\mathcal{O}e_4 + \mathcal{O}e_5 + \mathcal{O}e_6$.

PROPOSITION 4.2.4. *Soit S un schéma sur Spec $\mathcal{O}[1/2d]$, et (A, ϕ, i) une $\mathcal{M}$-structure sur S. Alors, Zariski-localement sur S, $D(A)$ muni de i et de B est isomorphe au pull-back de (M_1, i, B) par le morphisme $S \to$ Spec $\mathcal{O}$.*

Démonstration — On peut supposer $S = \mathrm{Spec}\, R$ avec R local.

D'après la proposition 2.1.1 (point (i)), $D(A)$ se décompose en somme directe de deux sous-modules libres $D_+(A)$ et $D_-(A)$ sur lesquels J agit respectivement par $i\sqrt{D}$ et $-i\sqrt{D}$. Ces deux modules sont de rang 3, puisque l'action de $\mathcal{O}$ est de type $(3,3)$.

Soit x et y deux éléments de $D_+(A)$. On a

$$i\sqrt{D}\langle x,y\rangle = \langle Jx,y\rangle = \langle x,-Jy\rangle = -i\sqrt{d}\langle x,y\rangle$$

en utilisant le fait que J est antiautoadjoint. Donc $\langle x,y\rangle = 0$, et $D_+(A)$ est isotrope (rappelons que D et 2 sont inversibles sur S). De même $D_-(A)$ est isotrope.

Soit (e_1,e_2,e_3) une base de $D_+(A)$. B définit alors un isomorphisme de $D_+(A)^* \simeq D(A)_-$, et on définit la base (e_4,e_5,e_6) de $D_-(A)$ comme l'image par cet isomorphisme de la base $(-e_3^*,-e_2^*,-e_1^*)$.

La proposition est maintenant évidente. □

4.2.5. *Cristaux des schémas en groupe H et K.* Soit maintenant

$$(A,\phi,i,A',\psi,i',f)$$

une $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structure sur une base $S = \operatorname{Spec} R$ affine.

Posons $H = \operatorname{Ker} f$, et $K = \operatorname{Ker}\psi$. Ce sont deux schémas en groupes de rang p^2, de p-torsion, qui jouissent de plus de la propriété d'être stable par $\mathcal{O}$. Ils sont donc munis d'une action de $\mathcal{O}/p$, c'est-à-dire du corps $\mathbb{F}_q$, extension quadratique du corps $\mathbb{F}_p$. Ce sont donc des schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriel, au sens de [**Ra**].

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d] \\
H \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p\phi"] & A' \arrow[d, "\psi"] \\
 & A^t & A'^t \arrow[l, "f^t"]
\end{tikzcd}$$

Comme pour les variétés abéliennes, on dispose du cristal $\mathbb{D}(H)$ (resp. $\mathbb{D}(K)$) et en particulier, du faisceau zariskien (de p-torsion, localement libre de rang 2 sur R/p) $D(H) = \mathbb{D}_S(H)$ (resp. $D(K) = \mathbb{D}_S(K)$). Par fonctorialité $\mathcal{O}$ agit sur le R/p-module $D(H)$ (resp. $D(K)$) et on peut donc parler de leur type (p,q), que nous allons maintenant déterminer. Si p est inversible dans R, $R/p = 0$ et il n'y a rien à dire. Supposons p non inversible dans R.

PROPOSITION 4.2.5.1. *$D(H)$ et $D(K)$ vérifient (**) et sont de type (1,1).*

Démonstration — On se ramène immédiatement au cas où k est un corps algébriquement clos de caractéristique p.

Le groupe H vérifie la propriété (**) de [**Ra**] par définition même d'une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure. $D(H)$ est donc bien de type (1,1) d'après 2.4.2

D'après le diagramme commutatif, $A[p]$ est extension successive de H,K et $H_2 = \operatorname{Ker} D(f^t)$. D'après Serre-Tate, on peut relever A en une variété sur $W(k)$ avec multiplication complexe par $\mathcal{O}$. Le schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel $A[p]$ apparaît donc comme la fibre au dessus du point fermé de $\operatorname{Spec} W(k)$ d'un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriel sur $\operatorname{Spec} W(k)$. Mais au-dessus du point générique de $W(k)$, on est en caractéristique zéro, et (localement pour la topologie étale), ce schéma en groupe est le $\mathbb{F}_q$-vectoriel constant $\mathbb{F}_q^3$ (vu son rang). On en déduit que ce que Raynaud appelle les I_χ sont des faisceaux localement libres de rang 3, pour le groupe $A[p]$. Comme ils sont de rang 1 pour H et pour H_2, ils sont aussi de rang 1 pour K, i.e. K vérifie (**) et donc $D(K)$ est de type (1,1). □

On définit un morphisme

$$B' : D(A')^* \to D(A')$$

par

$$B' = D(\psi) \circ \theta_{A'}.$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire sur $D(A')^*$, antisymétrique par le même calcul que dans [**DJ**], page 673, mais qui est, dans ce cas, dégénérée. Plus précisément, B n'est pas surjectif et son conoyau est $D(K)$ (puisque $\theta_{A'}$ est un isomorphisme, et que $K = \operatorname{Ker} \psi$. C'est la proposition 4.3.1 de [**B-B-M**]) On vérifie facilement (en utilisant la définition des $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structures), qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & D(K) \arrow[d, phantom] \\
 & & D(A') \arrow[u] \\
D(H) & D(A) \arrow[l] & D(A') \arrow[l, "D(f)"'] \\
 & D(A)^* \arrow[u, "pB"] \arrow[r, "D(f)^t"] & D(A')^* \arrow[u, "B'"']
\end{tikzcd}$$

Les quatre modules impliqués dans le carré sont tous libres de rang 6, munis d'une action de $\mathcal{O}$ de type (3,3), les flèches sont toutes $\mathcal{O}$-équivariantes, les 2 flèches horizontales du carré ainsi que la seconde flèche verticale (B') ont un conoyau qui est un R/p-module libre de rang 2, et sur lequel l'action de $\mathcal{O}$ induite est de type (1,1); le première flèche verticale (pB) est la composition de l'isomorphisme B et de la multiplication par p.

La diagramme commutatif précédent peut se traduire de manière plus commode, en notant par des crochets, ($\langle x|y\rangle_B = B(y)(x)$, resp. $\langle x|y\rangle_{B'}$) les formes bilinéaires définis par B (resp. B') sur $D(A)^*$ (resp. $D(A')^*$) :

Pour x et y dans $D(A)^*$ on a

$$\langle D(f)^t x | D(f)^t y \rangle_{B'} = p \langle x | y \rangle_B.$$

La proposition précédente élucidait la $\mathcal{O}$-action sur $D(H)$ et $D(K)$, mais se pose encore, pour $D(H)$ la question de sa relation avec la forme bilinéaire B sur $D(A)$. Intuitivement, on aimerait que l'isotropie de H se traduise par quelque chose comme l'isotropie de $D(H)$, mais $D(H)$ est un quotient de $D(A)$, pas un sous-objet et il nous faut définir la notion de quotient isotrope.

Nous dirons que dans un module libre de type fini M muni d'une forme bilinéaire non dégénérée B, un quotient M/N est *isotrope* si l'orthogonal de N est isotrope. (Il y a deux manières équivalentes de comprendre cette phrase. L'orthogonal de N peut être l'orthogonal canonique dans M^*, auquel on demande d'être isotrope comme sous-module de M^*. Ou bien il s'agit de l'orthogonal dans M pour B, et on veut que ce sous-module de M soit isotrope).

PROPOSITION 4.2.5.2. *Le quotient $D(H)$ est isotrope pour B. De manière équivalente, le noyau de $D(f)^t$ est isotrope dans $D(A)^*$.*

Démonstration — On peut supposer la base affine ($\operatorname{Spec} R$), et de caractéristique p, car tout se voit après tensorisation par R/p.

Nous aurons besoin pour une fois et pour des raisons qui apparaîtront bientôt, de travailler avec le faisceau cristallin entier et pas seulement le module sur R associé.

Soit W l'anneau des vecteurs de Witt de R, et $V = W/p^2$. Ainsi on a $V/p = R$ et $p^2 V = 0$. On munit l'idéal (p) de V de sa structure à puissances divisées naturelle.

On peut donc parler du V-module $\mathbb{D}(A)_V$, ainsi que de $\mathbb{D}(A')_V$, de leur dual, et des flèches correspondantes, le tout formant encore un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A)_V & \mathbb{D}(A')_V \arrow[l, "\mathbb{D}(f)_V"'] \\ \mathbb{D}(A)^*_V \arrow[u, "pB"] & \mathbb{D}(A')^*_V \arrow[u, "B'"'] \arrow[l, "\mathbb{D}(f)^t_V"'] \end{tikzcd} .$$

On a $D(A) = \mathbb{D}(A)_V \otimes_V R$ et des relations similaires pour les autres modules.

Soient x, y dans $\operatorname{Ker} \mathbb{D}(f^t)_V$, et X et Y des relevés de x et y dans $\mathbb{D}_V(A)^*$. On a $\mathbb{D}(f^t)_V(X) \in pD(A')^*_V$ et il en va de même pour Y.

Donc

$$p\langle X | Y \rangle = \langle \mathbb{D}(f^t)_V(X) | \mathbb{D}(f^t)_V(Y) \rangle \in p^2 V,$$

et

$$\langle X | Y \rangle \in pV,$$

d'où l'on tire dans $D(A)^*$

$$\langle x | y \rangle = 0.$$

□

Considérons maintenant le $\mathcal{O}$-module M_1, muni d'une action i de $\mathcal{O}$ et d'une forme bilinéaire antisymétrique dégénérée B' tel que

- $M_2 = \mathcal{O}^6$. On note sa base canonique $(f_1, \dots, f_6)$.
- Dans les bases $(f_1^*, \dots, f_6^*)$ et $(f_1, \dots, f_6)$, le morphisme $B : M_2^* \to M_2$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} & & & & & p \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & -1 & & & & \\ -p & & & & & \end{pmatrix} \tag{20}$$

- si $c \in \mathcal{O}$, $i(c)$ agit comme la multiplication par le scalaire c sur $\mathcal{O}f_1 + \mathcal{O}f_2 + \mathcal{O}f_3$, par le scalaire $\bar{c}$ sur $\mathcal{O}f_4 + \mathcal{O}f_5 + \mathcal{O}f_6$.

Considérons encore une application linéaire df de M_2 vers M_1, qui envoie f_1,f_3,f_5 et f_6 respectivement sur e_1,e_3,e_5,e_6, et f_2 et f_4 respectivement sur pe_2, pe_4, donc de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & p & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & p & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Alors, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} M_1 & M_2 \arrow[l, "df"'] \\ M_1^* \arrow[u, "pB"] \arrow[r, "df^t"] & M_2^* \arrow[u, "B'"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif, et vérifie les analogues évidents de toutes les propriétés énoncées sur le système $(D(A), D(A'), B, B', i, i', f)$.

Par exemple,

$$df \circ B' \circ df^t(e_1^*) = df \circ B'(f_1^*) = df(pf_1) = -pe_6 = pB(e_1^*)$$

et

$$df \circ B' \circ df^t(e_2^*) = df \circ B'(pf_2^*) = df \circ pdf(-f_5) = -pe_5 = pB(e_2^*).$$

Le reste de la vérification est identique.

On peut maintenant énoncer

THÉORÈME 4.2.5.3. *Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[1/(2d)]$, et soit*

$$(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$$

une $\mathcal{M}'_{\Gamma_0(p)}$-structure sur S. Localement pour la topologie de Zariski sur S, le diagramme de $\mathcal{O}_S$-modules (avec action de $\mathcal{O}$)

$$\begin{tikzcd} D(A) & D(A') \arrow[l, "D(f)"'] \\ D(A)^* \arrow[u, "pB"] \arrow[r, "D(f)^t"] & D(A')^* \arrow[u, "B'"'] \end{tikzcd}$$

est isomorphe au pullback du diagramme de $\mathcal{O}$-modules "standard"

$$\begin{tikzcd} M_1 & M_2 \arrow[l, "df"'] \\ M_1^* \arrow[u, "pB"] \arrow[r, "df^t"] & M_2^* \arrow[u, "B'"'] \end{tikzcd}$$

(avec action de $\mathcal{O}$), par le morphisme $S \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}$.

De plus, si $S = \operatorname{Spec} R$ avec R local, et si R' un épaississement de R, on peut choisir l'isomorphisme sur $\operatorname{Spec} R'$ compatible avec un isomorphisme donné sur S.

Démonstration — La démonstration, bien que sans difficultés sérieuses, est assez longue.

Notons d'abord que par des arguments standard, il suffit de considérer le cas où S est le spectre d'un anneau local R.

Si la caractéristique résiduelle de R est différente de p, p est inversible dans R, l'anneau R/pR est l'anneau nul, toutes les flèches sont des isomorphismes et le théorème est évident. Supposons donc R de caractéristique résiduelle p.

Nous "normaliserons" le diagramme progressivement, de droite à gauche : nous commencerons par choisir une base adéquate de $D(A')$, adéquate au sens où dans cette base, B' aura la forme voulue (20), d'abord en supposant que R est de caractéristique p (partie i), puis sans cette hypothèse (partie ii); ensuite nous choisirons une base de $D(A)$ qui mette $D(f)$ sous la forme voulue (21) (partie iii), puis nous montrerons comment la modifier pour normaliser aussi B (comme dans (19)) sans perturber le travail déjà fait (partie iv).

– (i) Commençons par travailler après extension des scalaires à R/p. Autrement dit, supposons que $p = 0$ dans R.

  Alors $B' : D(A')^* \to D(A')$ a pour conoyau $D(K)$ qui est un module libre de rang 2 ($\mathcal{O}$-stable et de type (1,1)). Considérons la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Im} B' \to D(A') \to \operatorname{Coker} B' \to 0.$$

  Comme $\operatorname{Coker} B'$ est libre, il est projectif, donc cette suite est scindée. $\operatorname{Im} B'$ est facteur direct d'un module libre i.e. est projectif, et comme R est local, $\operatorname{Im} B'$ est libre. Il est clair que c'est un sous-module libre de rang 4 de $D(A')$, stable par $\mathcal{O}$, de type (2,2).

Par un raisonnement semblable, on voit que $\operatorname{Ker} B'$ est un sous-module libre de rang 2 et facteur direct de $D(A')^*$, stable par $\mathcal{O}$, de type (1,1). On peut donc trouver, d'après la proposition 2.1.1, un supplémentaire $\mathcal{O}$-stable N de $\operatorname{Ker} f$, qui est évidemment libre et de type (2,2). La forme bilinéaire antisymétrique se restreint à N en une forme non dégénéré, J est antiautoadjoint pour cette forme bilinéaire d'après le proposition 4.1.3 et le même raisonnement que dans la proposition 4.2.4 permet de construire une base (f'_2, f'_3, f'_4, f'_5) de N, la $\mathcal{O}$-action étant la multiplication scalaire, sur f'_2 et f'_3, sa conjuguée sur f'_4 et f'_5, avec $\langle f'_2, f'_5\rangle = -1$, $\langle f'_3, f'_4\rangle = -1$,$\langle f'_5, f'_2\rangle = 1$, $\langle f'_4, f'_3\rangle = 1$, les autres produits étant nuls.

Par la proposition 2.1.1, on peut définir une base (f'_1, f'_6) de $\operatorname{Ker} B'$ avec f'_1 positif (i.e. $Jf_1 = \sqrt{-d}f_1$.) pour la $\mathcal{O}$-action et f'_6 négative (i.e. $Jf_2 = -\sqrt{-d}f_2$). Ainsi on a construit une base $(f'_1, \ldots, f'_6)$ de $D(A')^*$. On note $(f_1, \ldots, f_6)$ sa base duale. En notant $(f^*_1, \ldots, f^*_6)$ la base duale, on identifie f'_i et f^*_i. C'est la notation f^*_i que nous utiliserons dorénavant.

Dans les bases $(f^*_1, \ldots, f^*_6)$ et $(f_1, \ldots, f_6)$, le morphisme B' s'écrit

$$\begin{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

– (ii) Revenons maintenant au cas où R est local de caractéristique résiduelle p, mais sans supposer que R est de caractéristique p. En appliquant ce qui précède à R/p, on a construit une base $f_1, \ldots, f_6$ de $M \otimes R/p$. Par Nakayama, on peut relever cette base en une base (notée aussi $f_1, \ldots, f_6$) de M. En procédant soigneusement, c'est-à-dire en appliquant Nakayama deux fois, une fois sur chacun des sous-module propre pour J de M, on peut s'arranger pour que $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ soit la partie positive et $\langle f_4, f_5, f_6\rangle$ la partie négative de M.

Dans les base $(f^*_1, \ldots, f^*_6)$, la matrice antisymétrique (a_{ij}) représentant B vérifie la congruence modulo p

$$\begin{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\equiv$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant de cette matrice est p^2 par hypothèse, on a donc$a_{16} = -a_{61} = pu$ avec u inversible dans R.

Nous allons voir qu'en modifiant uniquement les vecteurs f_1, f_2 et f_3, on peut mettre la matrice de B' sous la forme désirée. En effet, un calcul trivial montre qu'il existe une matrice inversible C d'ordre 3 telle que

$$\begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix} \times C.$$

On change

$$f_1^*, \ldots, f_3^*$$

en

$$f_{1new}^* = Cf_1^*, \ldots, f_{3new} = Cf_3^*.$$

On définit la nouvelle base $(f_{i\,new})$ de $D(A)$ comme la base duale de

$$(f_{1new}^*, \ldots, f_{3new}^*, f_4^*, \ldots, f_6^*).$$

Le point est que f_4, f_5 et f_6 n'ont pas changé. Ainsi on voit que

$$B' f_{1new}^* = -pf_{6new},$$
$$B' f_{2new}^* = -f_{5new}.$$

$$B' f_{3new}^* = -pf_{4new},$$

Ce qui donne déjà la moitié de la matrice. L'autre s'obtient par antisymétrie.

– (iii) On s'occupe maintenant de $D(f)$, en commençant par le cas où $p = 0$ dans R. En fait, il est plus agréable de travailler avec $D(f)^t$. Par $\mathcal{O}$-équivariance $D(f)^t$ envoie $\langle e_1^*, e_2^*, e_3^* \rangle$ dans $\langle f_1^*, f_2^*, f_3^* \rangle$. Posons

$$M = \langle e_1^*, e_2^*, e_3^* \rangle$$

Comme au paragraphe (ii) on montre que $D(f)^t_{|M}$ a pour noyau un sous-module libre de rang 1, appelons-le Re_2', qui plus est facteur direct. Soit N un supplémentaire de Re_2'. Par le diagramme commutatif, on a

$$D(f) \circ B' \circ D(f)^t(M) = 0.$$

De là on tire facilement que

$$D(f)^t(M) \cap Rf_1 = Rf_1.$$

En effet, si $D(f)^t(M) \cap Rf_1$ était trivial, $B'(D(f)^t(M))$ serait isomorphe à $D(f)^t(M)$ donc de rang 2, et $D(f) \circ B' \circ D(f)^t(M) = 0$ serait de rang au

moins 1 puisque la partie positive du noyau de $D(f)$ est de rang 1. Ainsi, on a déjà montré que le rang de

$$D(f)^t(M) \cap Rf_1$$

est 1. Mais d'autre part, on montre facilement que $D(f)^t(M) \cap Rf_1$ est libre et facteur direct, donc

$$D(f)^t(M) \cap Rf_1 = Rf_1.$$

Il existe donc un unique vecteur e'_1 de N tel que $D(f)^t(e'_1) = f_1$, et comme d'habitude, Re'_1 est facteur direct dans N. On peut donc compléter (e'_1) en une base de N : (e'_1, e'_3) et on obtient ainsi une base (e'_1, e'_2, e'_3) de M et

$$D(f)^t_{|M} : M \to \langle f_1^*, f_2^*, f_3^* \rangle$$

a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on pourrait changer (e_4^*, e_5^*, e_6^*) en (e'_4, e'_5, e'_6) de manière à ce que $D(f)^t_{|\langle e'_4, e'_5, e'_6 \rangle}$ ait pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

On le fait, et en appelant $(e_1, \ldots, e_6)$ la base duale de $(e'_1, \ldots, e'_6)$ on a obtenu une base de $D(A)$ qui rend les matrices de $D(f)$ et $D(f)^t$ de la forme 21.

– (iv) D'après la proposition 4.2.5.2, on a

$$\langle e_2^* | e_4^* \rangle_B = 0.$$

Par un argument semblable à celui de cette proposition, on peut prouver que

$$\langle e_1^* | e_6^* \rangle_B = -1.$$

En effet

$$p\langle e_1^* | e_6^* \rangle_B = \langle f_1^* | f_6^* \rangle_{B'} = -p,$$

et le résultat en découle formellement en divisant par p, ce qu'on peut justifier en procédant comme dans la preuve de la proposition 4.2.5.2. Le même argument prouverait que

$$\langle e_1^* + e_2^* | e_6^* \rangle_B = -1.$$

d'où l'on tire

$$\langle e_2^* | e_6^* \rangle_B = 0$$

et de même

$$\langle e_4^* | e_1^* \rangle_B = 0.$$

De la même façon,

$$p\langle e_2^* | e_5^* \rangle_B = \langle p f_2^* | f_5^* \rangle_{B'} = -p$$

donc

$$\langle e_2^* | e_5^* \rangle_B = -1$$

et de même

$$\langle e_3^* | e_4^* \rangle_B = -1.$$

Maintenant

$$\langle e_3^* | e_6^* \rangle = a$$

dont on ne sait rien. Mais changeons e_6^* en $e_6^* + a e_4^*$. Alors on ne change pas la matrice de $D(f)^t$ puisque e_4^* est dans son noyau, et on ne change pas non plus les produits scalaires calculés jusque là sauf

$$\langle e_3^* | e_6^* \rangle$$

qui devient nul.

De même, en changeant e_1^* en $e_1^* + b e_2^*$, on obtient

$$\langle e_1^* | e_5^* \rangle = 0.$$

Les autres produits scalaires entre éléments de la base sont nuls d'après le lemme 4.2.3, et la matrice de B est mise sous la forme 20

Ceci termine la preuve dans le cas où $p = 0$ dans R

– (v) Le cas général s'en déduit facilement, à l'aide de Nakayama comme en (ii), et le " de plus " qui est facile.

□

4.3. Déformations des $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures.

4.3.1. *La filtration de la cohomologie cristalline.* Soit S un schéma sur R, et $(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure sur S. L'isomorphisme canonique

$$D(A) \simeq R^1 f_*(\Omega^\bullet_{A/S})$$

définit un plongement de $\omega_A = Lie(A/S)$:

$$0 \subset \omega_A \subset D(A). \tag{22}$$

comme sous-module localement libre, facteur direct et de rang moitié (c'est-à-dire 3.) De même, on a un plongement $\omega_{A'} \subset D(A')$ localement libre facteur direct de rang 3.

PROPOSITION 4.3.2. *Les sous-modules ω_A et $\omega_{A'}$ vérifient*

– *(a) $D(f)(\omega_{A'}) \subset \omega_A$.*
– *(b) ω_A et $\omega_{A'}$ sont stables par $\mathcal{O}$ et de type $(2,1)$.*

– *(c) ω_A (resp. $\omega_{A'}$) est isotrope pour B (resp. pour B')*

Démonstration — (a) traduit seulement le fait bien connu que D est un foncteur de la catégorie des variétés abéliennes sur S vers celle des $\mathcal{O}_S$-modules *filtrés* (la filtration étant $(0) \subset \omega_A \subset D(A)$).

Que ω_A et ω'_A soient stables par $\mathcal{O}$ découle encore de la fonctorialité de D. Que ω_A soit de type $(2,1)$ est la définition même du fait que (A,i) est de type $(2,1)$. La même assertion vaut pour $\omega_{A'}$ d'après la proposition 4.1.4.

Montrons (c). Le cas de $\omega_{A'}$ demandant un peu plus de précision, nous laissons au lecteur celui de ω_A. Rappelons que par convention, $\omega_{A'}$ isotrope pour B' signifie que l'orthogonal $\omega_{A'}^{\perp}$ de $\omega_{A'}$ dans $D(A')^*$ est isotrope pour B', c'est-à-dire que

$$B'(\omega_{A'}^{\perp}) \subset \omega_A$$

ou encore, par définition de B'

$$D(\psi) \circ \theta_A(\omega_{A'}^{\perp}) \subset \omega_{A'},$$

soit

$$D(\psi)(\omega_{A'*}) \subset \omega_{A'}$$

en utilisant la proposition 5.1.10 de [**B-B-M**]. L'assertion à prouver découle donc encore une fois de la fonctorialité de D. □

PROPOSITION 4.3.3. *Supposons que S est le spectre d'un corps parfait k de caractéristique p. Alors $\alpha := \dim_k(\omega_A/D(f)(\omega_{A'}))$ est la dimension de l'espace des formes différentielles invariantes de $H = Ker\, f$. De même, $\beta = \dim_k(D(A)/(\omega_A + D(f)(D(A'))$ est la dimension de l'espace des formes différentielles invariantes de H^*.*

Les seules possibilités pour (α,β) sont $(2,0)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(2,1)$ et $(2,2)$.

Démonstration — L'assertion pour α découle de ce que

$$\omega_H = \omega_A/(D(f)(\omega_{A'})) \quad \text{(cf. [}\mathbf{DJ}\text{])}$$

L'assertion pour β s'en déduit par dualité, et le reste de l'énoncé résulte de la classification des schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriels. □

PROPOSITION 4.3.4. *Supposons que S est le spectre d'un corps parfait k de caractéristique p. Alors on a*

$$\dim_k(\omega_{A'})/D(f)(\omega_{A'}^{\perp}) = \dim_k D(A')/(\omega_{A'} + Im\, D(f))$$

Ce nombre, noté γ, ets la dimension de l'espace des formes différentielles invariantes de $K = Ker B$, et on a $\gamma = 0,\ 1,$ ou 2.

Démonstration — La proposition découle immédiatement de ce que K est autodual, comme noyau d'une polarisation ([**M**]). □

4.3.5. *Déformations de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures et déformations de filtrations.* Dans toute cette partie, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique p, et R une $\mathcal{O}[1/(2d)]$-algèbre locale de corps résiduel k et d'idéal maximal nilpotent, i.e. un épaississement de k, et $(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure sur k.

Sur k, on dispose d'un carré commutatif d'espaces vectoriels munis de $\mathcal{O}$-actions

$$\begin{tikzcd} D(A) & D(A') \arrow[l, "D(f)"'] \\ D(A)^* \arrow[u, "pB"] \arrow[r, "D(f)^t"] & D(A')^*, \arrow[u, "B'"'] \end{tikzcd}$$

et on sait que ce carré est isomorphe au carré standard

$$\begin{tikzcd} M_1 \otimes k & M_2 \otimes k \arrow[l, "df"'] \\ M_1^* \otimes k \arrow[u, "pB"] \arrow[r, "df^t"] & M_2^* \otimes k. \arrow[u, "B'"'] \end{tikzcd}$$

On choisit un tel isomorphsme r on a aussi une filtration

$$\omega = r(\omega_A) \text{ (resp. } \omega' = r(\omega_{A'})) \tag{23}$$

ω'_A de M_1 (resp. M_2) vérifiant les propriétés (a),(b) et (c) de la proposition 4.3.2.

Soit Δ_R la catégorie des déformations de $(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ sur R i.e. des $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures sur R qui se restreignent en $(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ sur k, les morphismes étant les R-morphismes de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures se réduisant à l'identité sur k.

Soit δ_R la catégorie des déformations de ω et ω' dans M_1 et M_2 vérifiant les conditions (a), (b) et (c) de la proposition 4.3.2 sur R.

La proposition suivante est due à De Jong ([**DJ**].) Comme le contexte est un peu différent, nous esquissons sa preuve pour vérifier qu'elle marche dans notre cas.

PROPOSITION 4.3.6. *Les catégories Δ_R et δ_R sont discrètes (i.e les seuls morphismes sont les identités). Les foncteurs $R \to \Delta_R$ et $R \to \delta_R$ sont représentables, disons par Δ et δ. Les schémas Δ et δ sont isomorphes.*

Démonstration — Nous nous contenterons d'indiquer les différentes étapes de la preuve.

Tout d'abord, il est clair que la catégorie δ_R est discrète, et la rigidité des variétés abéliennes montre que Δ_R l'est aussi. La représentabilité des foncteurs résulte alors du critère de Schlessinger. Par ailleurs, elle résulte aussi de ce qui suit :

Les $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures forment un champ algébrique $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ (d'après la proposition 3.2.3 et son corollaire). La $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure sur k

$$(A, \phi, i, A', \psi, i', f)$$

définit un point géométrique y de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$, et le foncteur $R \to \Delta_R$ est isomorphe au foncteur

$$R \quad \to \quad \text{ensemble des } R\text{-points de } \mathcal{M}_{\Gamma_0(p)} \text{ induis } \quad \Delta$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} R/I \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d, "\pi_2"] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

on peut trouver une flèche $\operatorname{Spec} R \to W$ rendant le diagramme commutatif.

Le morphisme $\operatorname{Spec} R/I \to W$ définit une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure sur R/I, et un isomorphisme entre sa cohomologie et le modèle standard. Le morphisme $\operatorname{Spec} R \to X$ définit une déformation à tout $\operatorname{Spec} R$ de la filtration du modèle standard obtenue sur $\operatorname{Spec} R/I$.

Le point clé est que sur I on peut définir des puissances divisées triviales, et qu'on est donc en position d'appliquer le théorème de Grothendieck-Messing. La déformation à R de ω dans M_1 (resp ω' dans M_2) définit une déformation à R de A (resp. de A'), le morphisme f s'étendant d'après (a), la $\mathcal{O}$-action d'après (b), et les polarisations d'après (c).

La $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure obtenue ainsi sur R, muni d'un isomorphisme (dont l'existence découle du théorème 4.2.5.3) entre sa cohomologie et le modèle standard prolongeant celui donné sur R/I, définit le morphisme $\operatorname{Spec} R \to W$ cherché.

– 4.

De 1,2 et 3, du fait que δ et Δ ont même dimension de Krull (ce qu'on vérifie en montrant qu'ils ont le même espace tangent, grâce à Grothendieck-Messing comme en 3), et du lemme 4.7 de de Jong on tire que δ et Δ sont isomorphes.

□

4.3.7. Résumons les notations introduites et les résultats obtenus : On note X le champ paramétrant les filtration ω_A et ω'_A de M_1 et M_2 vérifiant les propriétés (a), (b) et (c) de la proposition 4.3.2. Si k est un corps (algébriquement clos) de caractéristique p, on associe à tout $y \in \mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}(k)$ un point x de $X(k)$ tel que les anneaux locaux complétés de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ en y et de X en x sont isomorphes.

Le calcul de l'anneau local complété de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ en un point $y \in \mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}(k)$ est donc ramené à un problème *d'algèbre linéaire.*

4.3.8. *Calcul des déformations universelles.* On garde les notations du paragraphe précédent. k est un corps algébriquement clos de caractéristique p.

Le problème est maintenant de calculer les anneaux locaux complétés de X aux différents points $x \in X(k)$, au moins ceux qui proviennent d'un $y \in \mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}(k)$ par la correspondance (23).

Autrement dit, si $y = (A, \phi, i, A', \psi, i', f)$ est une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure sur $\operatorname{Spec} k$, est on doit calculer la déformation universelle de $x = (\omega, \omega')$ dans M_1, M_2, avec les contraintes données par les propriétés (a), (b) et (c) de la proposition 4.3.2 :

- (a) $df(\omega_{A'}) \subset \omega_A$
- (b) ω_A et $\omega_{A'}$ sont $\mathcal{O}$-stables et de type (2,1)
- (c) ω_A et $\omega_{A'}$ sont isotropes pour B et B' respectivement).

Pour cela, il faut distinguer différents cas, selon les positions respectives de ω' et ω' dans le diagramme commutatif. Comme dans les proposition 4.3.3 et 4.3.4, on pose $\alpha = \dim_k(\omega/df(\omega'))$, $\beta = \dim_k(M_1/(\omega + df(M_2)))$, et $\gamma = \dim_k(\omega'/df((\omega')^\perp) = \dim_k M_2/(\omega' + \operatorname{Im} B')$.

- Cas I : $\gamma = 2$. On a alors $\omega_{A'} \subset \langle f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle$.
  - sous-cas I.1 : $\alpha = 2$, i.e. $\operatorname{Ker} df \cap \omega_{A'}$ est de dimension 2. Alors on a

    $$\omega_{A'} = \langle f_2, f_3, f_4 \rangle.$$

    Dans ce cas on a $df(\omega_{A'}) = \langle e_3 \rangle \subset \omega_A$.
    La déformation universelle de $\omega_{A'}$ comme sous-module localement libre et facteur direct de M_2, stable par $\mathcal{O}$, et tel que $\omega_{A'}^\perp$ est isotrope est

    $$\langle f_2 + abf_1, f_3 + bf_1, f_4 + af_5 + cf_6 \rangle,$$

    sur l'anneau $W(k)[[a, b, c]]/(bc + p)$.
    - sous-sous-cas I.1.a : $\beta = 2$, i.e. $\omega_A \subset \operatorname{Im} df = \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle$. Comme ω_A est de type (2,1), il contient $\langle e_1, e_3 \rangle$ et donc e_5 par isotropie :

      $$\omega_A = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle.$$

      La déformation universelle de ω_A comme sous-module $\mathcal{O}$-stable et isotrope est

      $$\langle e_1 + xe_2, e_3 + ye_2, e_5 - ye_4 - xe_6 \rangle$$

      sur l'anneau $W(k)[[x, y]]$ La condition (a) se traduit alors par les relations,

      $$\begin{cases} c = -ax \\ p = -ay \\ y = -xb \\ abx = p \end{cases}$$

      L'anneau de la déformation universelle cherchée est donc

      $$W(k)[[a, b, x]]/(abx - p).$$

    - sous-sous-cas I.1.b : $\beta = 1$, i.e. $\omega_A + \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle$ est de dimension 5.
      Or ω_A contient e_3. Si ω_A contenait e_1, elle contiendrait e_5 par isotropie, et on aurait $\beta = 0$. Donc ω_A contient un vecteur de la

forme $e_2 + \lambda e_1$, et quitte à faire un changement de base, on peut supposer que

$$\omega_A = \langle e_2, e_3, e_6 \rangle.$$

La déformation universelle de ω_A comme sous-module $\mathcal{O}$-stable et isotrope est

$$\langle e_2 + xe_1, e_3 + ye_1, e_6 - ye_4 - xe_5 \rangle$$

sur l'anneau $W(k)[[x, y]]$
La condition (a) se traduit alors par les relations,

$$\begin{cases} ab = px \\ b = y \\ a = -cx \\ p = -cy \end{cases}$$

L'anneau de la déformation universelle cherchée est donc

$$W(k)[[b, c, x]]/(bc + p).$$

- sous-sous-cas I.1.c: $\beta = 0$, i.e. $\omega_A + \langle e_1, e_3, e_5, e_6 \rangle = M_1$, ce qui implique que ω_A contient un vecteur ayant une composante non nulle en e_4, mais comme ω_A contient e_3, ceci contredit l'isotropie. Ce sous-sous-cas n'existe pas.

- sous-cas I.2 : $\alpha = 1$, i.e. $\operatorname{Ker} df \cap \omega_{A'}$ est de dimension 1. Alors on a, quitte à faire un changement de base admissible,

$$\omega_{A'} = \langle f_2, f_3, f_5 \rangle.$$

On a alors $df(\omega_{A'}) = \langle e_3, e_5 \rangle \subset \omega_A$, et par isotropie,

$$\omega_A = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle.$$

On a donc $\beta = 2$ et il n'y a pas d'autre sous-sous-cas à considérer :
La déformation universelle de $\omega_{A'}$ comme sous-module localement libre et facteur direct de M_2, stable par $\mathcal{O}$, et tel que $\omega_{A'}^{\perp}$ est isotrope est

$$\langle f_2 + bf_1, f_3 + abf_1, f_5 + af_4 + cf_6 \rangle,$$

sur l'anneau $W(k)[[a, b, c]]/(bc+p)$. ω_A a pour déformation universelle

$$\langle e_1 + xe_2, e_3 + ye_2, e_5 - ye_4 - xe_6 \rangle.$$

La condition (a) donne

$$\begin{cases} p = bx \\ y = -abx \\ ap = -y \\ c = -x \end{cases}$$

L'anneau de la déformation universelle cherchée est donc

$$W(k)[[a,b,c]]/(bc+p).$$

– sous-cas I.3 : $\alpha = 0$, i.e. $\operatorname{Ker} df \cap \omega_{A'} = 0$. Ce cas est impossible.

– cas II : $\gamma = 1$, i.e. $\omega_{A'} + \langle f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle$ est de dimension 5.

– sous-cas II.1 : $\alpha = 2$, i.e. $\operatorname{Ker} df = \langle f_2, f_4 \rangle \subset \omega_{A'}$. Ceci implique

$$\omega_{A'} = \langle f_1, f_2, f_4 \rangle,$$

et donc $e_1 \in \omega_A$.

La déformation universelle $\mathcal{O}$-stable et isotrope de $\omega_{A'}$ est dans ce cas

$$\langle f_1 + af_3, f_2 + bf_3, f_4 - bf_5 - apf_6 \rangle$$

sur l'anneau $W(k)[[a,b]]$.

– sous-sous-cas II.1.a : $\beta = 2$. Alors

$$\omega_A = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle$$

et a pour déformation

$$\langle e_1 + xe_2, e_3 + ye_2, e_5 - ye_4 - xe_6 \rangle$$

La condition (a) donne

$$\begin{cases} p = by \\ x = -ay \end{cases}$$

L'anneau de la déformation universelle cherchée est donc

$$W(k)[[a,b,y]]/(by - p).$$

– sous-sous-cas II.1.b : $\beta = 1$. Cas impossible.

– sous-sous-cas II.1.c : $\beta = 0$.

$$\omega_A = \langle e_1, e_2, e_4 \rangle.$$

Dans ce cas, on obtient une déformation universelle sur l'anneau

$$W(k)[[a,b]].$$

– sous-cas II.2 : $\alpha = 1$. On obtient

$$\omega_{A'} = \langle f_2, f_3, f_6 \rangle,$$

d'où il vient

$$\omega_A = \langle e_2, e_3, e_6 \rangle,$$

et donc $\beta = 1$.

La déformation universelle de $\omega_{A'}$ est

$$\langle f_2 - paf_1, f_3 - pbf_1, f_6 + bf_4 + af_5 \rangle;$$

celle de ω_A est

$$\langle e_2 + xe_1, e_3 + ye_1, e_6 - xe_5 - ye_4 \rangle.$$

La condition (a) donne

$$\begin{cases} a = -x \\ y = -pb \end{cases},$$

d'où un anneau de déformation lisse

$$W(k)[[a,b]].$$

– sous-cas II.3 : $\alpha = 0$. On obtient $\beta = 2$, et un anneau de déformation lisse

$$W(k)[[a,b]].$$

5. Géométrie du modèle entier $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$

5.1. Énoncé du résultat principal. Rappelons que F désigne le morphisme d'oubli de H, de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ vers $\mathcal{M}$. Nous avons montré que F était fini, et étale en dehors de la caractéristique p, d'où la lissité de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/2dp]$.

THÉORÈME 5.1.1. – *1) Le champ algébrique $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ est plat et semi-stable (en particulier, régulier) sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/2d]$.*
– *2) Dans la fibre spéciale (semi-stable) $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)} \times \operatorname{Spec}\bar{\mathbb{F}}_q$, aucun point ne passe par plus de 3 composantes irréductibles.*

Démonstration — Le 1) résulte immédiatement du calcul des déformations universelles du paragraphe précédent, qui sont toutes plates et semi-stables sur $W(k)$. Le 2) se vérifie aussi immédiatement sur ces calculs. □

REMARQUE. On peut montrer que toutes les déformations calculées interviennent effectivement, i.e. que pour toutes les valeurs de (α, β, γ) envisagées, il existe une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure admettant ces valeurs de (α, β, γ). A chaque composante irréductible d'une strate de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q$ correspond un (α, β, γ) générique, et l'existence d'une composante de (α, β, γ) générique donné implique, d'après les calculs de déformations, l'existence d'autres composantes de (α, β, γ) différent, suivant le tableau suivant :

(α, β, γ)	dimension de la composante correspondante
$(2,2,2)$	0
$(1,2,2)$ $(2,2,1)$ $(2,1,2)$	1
$(0,2,1)$ $(1,1,1)$ $(2,0,1)$	2

Il suffit donc de montrer l'existence d'une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (2,2,2)$. Pour cela, soit (E_1, i) et (E_2, j) deux courbes à multiplication par $\mathcal{O}$ sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. On considère la variété abélienne $A = E_1 \times E_1 \times E_2$, muni de l'action $i \times i$ de $\mathcal{O}$ sur $E_1 \times E_1$, et $\bar{j}$ sur E_2. On munit aussi A de la polarisation correspondant au morphisme $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$ de $A = E_1 \times E_1 \times E_2$ vers $A^* = E_1 \times E_1 \times E_2$. On vérifie qu'on obtient là une $\mathcal{M}$-structure.

Pour H, on prend la somme directe de l'unique sous-groupe isomorphe à α_p (= le noyau du Frobenius) dans $E_1[p]$ (premier facteur) avec l'unique sous-groupe isomorphe à α_p dans $E_2[p]$. On vérifie immédiatement que H fait de (A, i, ϕ) une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure, et que $\alpha(H) = \beta(H) = 2$. Il n'est pas dur de montrer qu'on a aussi $\gamma = 2$.

5.2. Compléments sur la géométrie de la fibre spéciale.

5.2.1. Soit k un corps (algébriquement clos pour simplifier l'exposé, bien qu'on puisse aisément se passer de cette hypothèse au prix de quelques précautions de langage) de caractéristique p, muni d'un plongement $\mathcal{O}/p = \mathbb{F}_q \to k$.

Le but de cette partie est de donner quelques résultats complémentaires sur la géométrie de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)} \times \operatorname{Spec} \bar{\mathbb{F}}_q$.

LEMME 5.2.2. *Soit (A, ϕ, i) une $\mathcal{M}$-structure sur k. Le groupe de Barsotti-Tate de A est soit isomorphe à $G_0^2 \times G_{1/2} \times G_1^2$, soit isogène à $G_{1/2}^3$. (Notations de* [**DE**], *page 92)*

Démonstration — Évident. □

5.2.3.

DÉFINITION. On dit qu'une $\mathcal{M}$-structure (A, ϕ, i) sur k est *ordinaire* si son groupe de Barsotti-Tate est isomorphe à $G_0^2 \times G_{1/2} \times G_1^2$, *supersingulière*, sinon. On dit qu'une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure sur k est ordinaire (resp. supersingulière) si sa $\mathcal{M}$-structure sous-jacente l'est.

REMARQUE. Dire qu'une $\mathcal{M}$-structure (A, ϕ, i) est ordinaire ne signifie pas que A l'est comme variété abélienne. Par contre, (A, ϕ, i) est supersingulière si et seulement si A l'est.

On note $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}$ (resp. $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\Gamma_0(p)}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_{\Gamma_0(p)}$) le champ sur k paramétrant les $\mathcal{M}$-structures (fibre géométrique à fibre géométrique) ordinaires (resp. supersingulières, resp. les $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures ordinaires, resp. supersingulières).

LEMME 5.2.4. *Le champ $\mathcal{M}^{ss}$ est représentable par un sous-schéma fermé de $\mathcal{M} \times \mathit{Spec}\, k$ et est propre sur $\mathit{Spec}\, k$. Il en va de même de $\mathcal{M}^{ss}_{\Gamma_0(p)}$*

Démonstration — Pour $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, cela résulte de [**O**]. Comme F est propre, et que $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_{\Gamma_0(p)} = \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} \times_{\mathcal{M},F} \mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$, le lemme en découle. □

LEMME 5.2.5. *$\mathcal{M}^{ord}$ est un ouvert dense de $\mathcal{M} \times \mathit{Spec}\, k$. $\mathcal{M}^{ord}_{\Gamma_0(p)}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)} \times \mathit{Spec}\, k$.*

Démonstration — Que $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}$ et $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\Gamma_0(p)}$ soit des ouverts résulte du lemme précédent. Que $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}$ soit dense résulte de ce qu'il rencontre chaque composante irréductible de $\mathcal{M} \otimes k$ (sinon, on aurait pour une composante C de $\mathcal{M} \otimes k$: $C = \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} \cap C$ et C serait propre, ce qui n'est pas, cf. [**L1**]). □

LEMME 5.2.6. *Une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure (A, ϕ, i, H) sur k est ordinaire si, et seulement si, le triplet (α, β, γ) qui lui est associé (cf. propositions 4.3.3 et 4.3.4) est $(2, 0, 1)$ ou $(0, 2, 1)$*

Démonstration — Si (A, ϕ, i) est ordinaire, le schéma en groupes $A[p]$ noyau de la multiplication par p est isomorphe à

$$\mu_p^2 \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2) \times U,$$

où U est un groupe unipotent connexe. L'action de $\mathcal{O}$ sur $A[p]$ laisse stable chacun des facteurs de la décomposition ci-dessus, et donc on ne peut avoir que $H = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, $H = \mu_p^2$ ou $H = U$. Mais comme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ et μ_p^2 sont en dualité de Cartier, la restriction de l'accouplement de Weil de $A[p]$ à U est non dégénérée, si bien que U n'est pas isotrope, et on ne peut avoir $H = U$.

On a donc, $(\alpha, \beta) = (0, 2)$ ou $(\alpha, \beta) = (2, 0)$ si (A, ϕ, i) est ordinaire, et la réciproque est évidente.

De plus, l'étude faite au paragraphe précédent montre que, pour de simples raisons d'algèbre linéaire, ces valeurs de (α, β) impliquent $\gamma = 1$. □

5.2.7. Nous allons donner une description précise du morphisme $F : \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\Gamma_0(p)} \to \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}$. Pour cela, on considère deux sous-champs de $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\Gamma_0(p)}$: $\mathcal{M}^{\mathrm{ord,ét}}_{\Gamma_0(p)}$ (resp. $\mathcal{M}^{\mathrm{ord,mult}}_{\Gamma_0(p)}$) qui paramètre les $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structures ordinaires dont le groupe structurel H est, localement pour la topologie étale (ou ce qui revient au même, fibre géométrique à fibre géométrique) isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ (resp. μ_p^2).

Il résulte facilement de la rigidité des schémas de type multiplicatifs que si H est un schéma en groupes, fini et plat sur une base S de caractéristique p, fibre géométrique à fibre géométrique isomorphe soit à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, soit à μ_p^2, alors il existe une décomposition canonique $S = S^{\mathrm{mult}} \cup S^{\mathrm{ét}}$ en union disjointe d'ouverts, où H est loc. isomorphe à μ_p^2 sur S^{mult} et à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ sur $S^{\mathrm{ét}}$. De là et du lemme précédent il vient que $\mathcal{M}^{\mathrm{ord,mult}}_{\Gamma_0(p)}$ et $\mathcal{M}^{\mathrm{ord,ét}}_{\Gamma_0(p)}$ sont des sous-champs fermés et ouverts de $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\Gamma_0(p)}$, en particulier sont algébriques, et que

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\Gamma_0(p)} = \mathcal{M}^{\mathrm{ord,ét}}_{\Gamma_0(p)} \cup \mathcal{M}^{\mathrm{ord,mult}}_{\Gamma_0(p)}$$

5.2.8. Soit S un schéma sur k, et (A, ϕ, i) une $\mathcal{M}$-structure ordinaire sur S. Le schéma en groupes $A[p]$ possède un unique sous-groupe unipotent connexe U de rang p^2, qui est stable par $\mathcal{O}$, et totalement non isotrope (d'après la preuve du lemme précédent). L'accouplement de Weil induit donc un isomorphisme entre $A[p]/U$ et un sous-groupe $U^\perp$ de $A[p]$, fibre géométrique à fibre géométrique isomorphe à $(\mu_p)^2 \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Notons H la composante neutre de $U^\perp$. C"est un sous-groupe de p-torsion, de rang p^2, localement isomorphe à (μ_p^2), et stable par $\mathcal{O}$. L'isotropie pour l'accouplement de Weil, et la propriété (**) sont automatiquement vérifiées pour un tel groupe. Donc le foncteur $G : (A, \phi, i) \mapsto (A, \phi, i, H)$ est un 1-morphisme de $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}$ vers $\mathcal{M}^{\mathrm{ord,mult}}_{\Gamma_0(p)}$, et on a $G \circ F = Id$.

Réciproquement, étant donné un objet (A, ϕ, i, H') de $\mathcal{M}^{\mathrm{ord,mult}}_{\Gamma_0(p)}$, il est clair que H' est orthogonal à U, puisqu'aucun sous-groupe non trivial de U n'a un dual de type multiplicatif, et ensuite que H' est la composante neutre de $U^\perp$, si bien qu'on a aussi $F \circ G = Id$.

En résumé, on a montré :

PROPOSITION 5.2.9. *Le 1-morphisme F induit un isomorphisme de $\mathcal{M}^{ord,mult}_{\Gamma_0(p)}$ sur $\mathcal{M}^{ord}$ d'inverse G.*

5.2.10. Gardons les notations du paragraphe précédent. À la $\mathcal{M}$-structure ordinaire (A, ϕ, i) sur S, on a donc associé, fonctoriellement et canoniquement, deux sous-groupes U et H de $A[p]$, et l'on a vu que (A, ϕ, i, H) était une $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure.

Considérons le morphisme de Frobenius relatif $frob : A \to A^{(p)}$. Comme A est lisse de dimension relative 3, $frob$ est plat de degré p^3 et le noyau $\mathrm{Ker}\, frob$ est un sous-groupe fini et plat de rang p^3. Comme $frob$ divise p, $\mathrm{Ker}\, frob$ est un sous-groupe de $A[p]$. On a clairement $H \subset \mathrm{Ker}\, frob$, puisque H est localement isomorphe à μ_p^2. Par ailleurs la restriction de $frob$ à U est nilpotente, donc $\mathrm{Ker}\, frob$ contient

un sous-groupe U_1 non trivial de U. Un argument de rang montre alors que U_1 est de rang p, donc localement isomorphe à α_p et que

$$\operatorname{Ker} frob = U_1 \times H.$$

Le groupe $\operatorname{Ker} frob$ est isotrope pour l'accouplement de Weil, puisque le dual de U_1 (qui est unipotent) n'est isomorphe à aucun sous-groupe de H (qui est de type multiplicatif).

On peut donc associer (canoniquement et fonctoriellement) à la $\mathcal{M}$-structure (A, ϕ, i), une autre $\mathcal{M}$-structure $(A^{(p)} = A/\operatorname{Ker} frob, \psi, j)$: l'action i passe au quotient et défini une action j de $\mathcal{O}$ sur $(A^{(p)}$ (qui n'est d'ailleurs autre que l'action déduite de i par fonctorialité de $A \mapsto A^{(p)}$) ; d'après la maximale isotropie de $\operatorname{Ker} f$ et [**M**], la polarisation ϕ descend en une polarisation principale ψ sur B. Que $((A^{(p)}, \psi, j)$ vérifie la propriété (2) de la définition d'une $\mathcal{M}$-structure se démontre exactement comme le lemme 4.2.3. Les propriétés (1) et (3) sont évidentes, tout comme il est évident que $frob$ est un morphisme de $\mathcal{M}$-structures.

On a donc défini ainsi un 1-morphisme P de $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}$ dans lui-même :

$$P(A, \phi, i) = (A^{(p)}, \psi, j).$$

On déduit de ce qui précède :

PROPOSITION 5.2.11. *Comme champ au dessus de $\mathcal{M}^{ord}$, le champ $\mathcal{M}^{ord}_{\Gamma_0(p)}$ est l'union disjointe d'une copie ($\mathcal{M}^{ord,mult}_{\Gamma_0(p)}$) de $\mathcal{M}^{ord}$, et du champ $\mathcal{M}^{ord,ét}_{\Gamma_0(p)}$, qui est fini, plat, de rang p^3 et purement inséparable de $\mathcal{M}^{ord}$. En particulier, $\mathcal{M}^{ord}_{\Gamma_0(p)}$ est fini et plat de rang p^3+1 sur $\mathcal{M}^{ord}$.*

COROLLAIRE 5.2.12. *L'ouvert $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}[1/p] \cup \mathcal{M}^{ord}_{\Gamma_0(p)}$ de $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$, complémentaire du fermé $\mathcal{M}^{ss}_{\Gamma_0(p)}$ dans $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$ est fini et plat de rang p^3+1 sur l'ouvert $\mathcal{M}[1/p] \cup \mathcal{M}^{ord}$ de $\mathcal{M}$.*

Démonstration — Par la proposition précédente, les fibres géométriques de F sont des schémas de longueur p^3+1 sur $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}$. On savait déjà qu'elles étaient de rang p^3+1 au dessus des points géométriques de $\mathcal{M}[1/p]$. Donc F est quasi-fini sur l'ouvert considéré. Comme on sait que F est propre, il est fini, et son rang est certainement p^3+1.

Pour vérifier la platitude, on peut soit utiliser le critère de platitude fibre à fibre, soit utiliser le lemme V.1.13 de [**D-R**], applicable ici vu ce qui précède, et le fait que $\mathcal{M}$ est réduit. □

6. Mauvaise réduction des surfaces modulaires de Picard avec structure de niveau parahorique en une place déployée

6.1. Notations. Dans toute cette section, p désigne un nombre premier impair, décomposé dans K. On pose $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$. On fixe un isomorphsime $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, et un isomorphisme compatible au précédent $\mathcal{O}/p = \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$.

De plus, on choisit une fois pour toute une structure de $\mathcal{O}_p$-module sur $\mathbb{Z}_p$, par exemple celle ou l'action de $(x, y) \in \mathcal{O}_p = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ est la multiplication par x. Via cette structure, $\mathbb{Z}_p$ a aussi une structure canonique de module sur $\mathcal{O}[1/2d]$, ce qui pernet de parler de $\mathcal{M}$-structures sur $\mathbb{Z}_p$.

On a $U(2,1)_{\mathbb{Z}_p} \simeq (\mathrm{GL}_3)_{\mathbb{Z}_p}$. Plus précisément, par définition (I.3.2.1), $U(2,1)(\mathbb{Z}_p)$ est un groupe d'automorphismes $\mathcal{O}_p$-linéaires de $V_0 \otimes \mathbb{Z}_p = \mathcal{O}_p^3 = (\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p)^3$. La restriction d'une telle application g à $(1,0)(V_0 \otimes \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^3$ (ce sous-$\mathbb{Z}_p$-module est stable par $\mathcal{O}_p$-linéarité) définit un automorphisme $\mathbb{Z}_p$-linéaire g' de $\mathbb{Z}_p^3$, et l'application $g \mapsto g'$ est l'isomorphisme cherché. On choisit de même un isomorphisme $\mathrm{GU}(2,1)(Z_p) \simeq G_m(\mathbb{Z}_p) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$.

On note B_1 et B_2 les sous-groupes parahoriques standard de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$: B_1 (resp. B_2) est l'image réciproque du sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ fixant la droite engendré par le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{F}_p^3$ (resp. le plan engendré par les deux premiers vecteurs). Par abus de langage, on note aussi B_1 et B_2 les sous-groupes $G_m(\mathbb{Z}_p) \times B_i$, ainsi que les sous-groupes dans $\mathrm{U}(2,1)(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Z}_p)$ correspondant à ces sous-groupes via les isomorphismes choisis ci-dessus.

6.2. Les $\mathcal{M}$-structures de type parahorique.

6.2.1. *Les points d'ordre p d'une $\mathcal{M}$-structure.* Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ et (A, ϕ, i) une $\mathcal{M}$-structure sur S. Le schémas en groupes $A[p]$ est muni d'une action de $\mathcal{O}$ qui se factorise par $\mathcal{O}/p = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$. Les idempotents $(1,0)$ et $(0,1)$ de cet anneau permettent une décomposition canonique

$$A[p] = (0,1)A[p] \times (1,0)A[p].$$

La propriété 2 de la définition des $\mathcal{M}$-structures (I.3.2.2) indique que les actions de $(0,1)$ et de $(1,0)$ sur $A[p]$ sont *adjointes* pour l'accouplement de Weyl. On a donc

$$< (0,1)x|(0,1)y >=< x|(0,1)(1,0)y >=< x|0 >= 0,$$

où x et y dédigne une section quelconque de $A[p]$. Les sous-groupes $(0,1)A[p]$ et $(1,0)A[p]$ de $A[p]$ sont donc isotropes, donc de rang au plus 3 d'après la non dégénérescence de l'accouplement de Weyl, et finalement tous deux de rang 3.

6.2.2. *Structures de niveaux parahoriques.* Soit N un entier premier à $2dp$. Pour $i = 1$ ou 2, on note $B_{p,i}^N$ le sous-groupe de K_N constitué des éléments dont la composante en p est dans B_i (cf. 3.1.3). On considère la variété de Shimura associée à ce groupe

$$\mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GU}(2,1)(\mathbb{A})/B_{p,i}^N K_\infty \tag{24}$$

On voit comme en 3.1.4 que cette variété quasi-projective complexe paramètre les $\mathcal{M}$-structure sur $\mathbb{C}$ munis d'une structure de niveau N et d'un sous-groupe H de rang p^i ($i = 1$ ou 2) de $(1,0)A[p]$.

On cherche à construire un modèle sur $\mathbb{Z}_p$ de cette variété. Pour cela:

DÉFINITION. Soit S un schéma (sur $\mathbb{Z}_p$). Une $\mathcal{M}$-structure de type B_1(resp. de type B_2) sur S est la donnée d'un quadruplet (A, ϕ, i, H) où (A, ϕ, i) est une $\mathcal{M}$-structure, et H un sous-schéma en groupes de $A[p]$ vérifiant

- (i) H est fini et plat.
- (ii) H est de rang p. (resp. de rang p^2)
- (iii) $(1,0)H = H$, autrement dit $H \subset (1,0)A[p]$

Notons que la condition (iii) implique que H est $\mathcal{O}$-stable et isotrope.

6.2.3. *Espaces de module.*

LEMME 6.2.4. *les $\mathcal{M}$-structures de type B_1(resp. de type B_2) forment un champ algébrique de Deligne-Mumford, séparé et de type fini sur Spec$\mathbb{Z}_p$. On note ce champ $\mathcal{M}_{1,p}$ (resp. $\mathcal{M}_{2,p}$). De même, en ajoutant des structures de niveau N, on obtient des champs $\mathcal{M}_{1,p}^N$ et $\mathcal{M}_{2,p}^N$.*

Démonstration — Cela se montre exactement comme les propriétés analogues dans le cas p inerte, cf. la proposition 3.2.3 et son corollaire. □

LEMME 6.2.5. *Les champs $\mathcal{M}_{1,p}^N$ (resp. $\mathcal{M}_{2,p}^N$) sont des modèles des variétés de Shimura* (24).

Démonstration — Évident. □

6.3. Théorie des déformations d'une $\mathcal{M}$-structure de type B_1.

6.3.1. On cherche à étudier la géométrie locale de ces modèles, en particulier les singularités de la fibre spéciale. Comme $\mathcal{M}_{1,p}^N$ est étale sur $\mathcal{M}_{1,p}$, et $\mathcal{M}_{2,p}^N$ étals sur $\mathcal{M}_{2,p}$, on peut se contenter du cas $N = 1$. De plus, $\mathcal{M}_{1,p}$ et $\mathcal{M}_{2,p}$ sont isomorphes, car l'accouplement de Weil induit une dualité parfaite entre $(1,0)A[p]$ et $(0,1)A[p]$, si bien que se donner un H de rang p dans $(1,0)A[p]$ revient à se donner son orthogonal de rang p^2 dans $(0,1)A[p]$, et réciproquement.

On se contentera donc d'étudier $\mathcal{M}_{1,p}$.

6.3.2. *Une variante.* On introduit la notion suivante:

DÉFINITION. Une D-structure sur S est la donnée d'un sextuplet

$$(A, \phi, i, A', i', f)$$

où

- (i) (A, ϕ, i) est une $\mathcal{M}$-structure.

– (ii) (A', i') est une variété abélienne de dimension 3 sur S avec action de $\mathcal{O}$.
– (iii) f est une isogénie de A sur A', $\mathcal{O}$-équivariante et de degré p.

PROPOSITION 6.3.3. *Les D-structures sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ forment un champ de Deligne-Mumford séparé et de type fini D.*

Démonstration — Laissée au lecteur. □

6.3.4. Il existe un 1-morphisme naturel F de $\mathcal{M}_{1,p}$ vers D. À une $\mathcal{M}$-structure de type $B_1(A, \phi, i, H)$, on associe (A, ϕ, i, A', i', f) où l'on a posé $A' = A/H$, f la surjection canonique, qui est $\mathcal{O}$-équivariante pour (i, i') si l'on définit i' par passage de i au quotient.

Le foncteur F n'est pas un isomorphisme de champs, mais :

PROPOSITION 6.3.5. *Soit (A, ϕ, i, H) une $\mathcal{M}$-structure de type B_1 sur S. Alors il revient au même de déformer (A, ϕ, i, H) comme $\mathcal{M}$-structure de type B_1 ou $F(A, \phi, i, H)$ comme D-structure. Précisément, F induit une équivalence de catégories fibrées entre la catégorie des déformations de (A, ϕ, i, H) et celle de $F(A, \phi, i, H)$.*

Démonstration — Soit S_1 un épaisissement de S. Rappelons qu'une déformation de (A, ϕ, i, H) (resp. de $F(A, \phi, i, H) = (A, \phi, i, A', i', f)$) est une $\mathcal{M}$-structure (A_1, ϕ_1, i_1, H_1) (resp. une D-structure $(A_1, \phi_1, i_1, A'_1, \imath'_1, f_1)$) sur S_1 qui se restreint en (A, ϕ, i, H) (resp. ...) sur S.

Montrons que F réalise une équivalence de catégorie entre ces deux catégories de déformations. Il suffit de construire un quasi-inverse, pour lequel le candidat naturel est

$$(A_1, \phi_1, i_1, A'_1, i'_1, f_1) \mapsto (A_1, \phi_1, i_1, \operatorname{Ker} f_1).$$

La seule chose à vérifier est que $\operatorname{Ker} f_1$ satisfait les conditions (i) à (iii) de la définion d'une $\mathcal{M}$-structure de type B_1. (i) et (ii) sont évidentes, puisque f_1 est une isogénie de degré p. De plus, comme f_1 est $\mathcal{O}$-équivariante, $\operatorname{Ker} f_1$ est $\mathcal{O}$-stable, ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{Ker} f_1 = (0,1)\operatorname{Ker} f_1 \times (1,0)\operatorname{Ker} f_1.$$

Ces deux schémas finis et plats sur S_1 sont respectivement de rang p^0 et p^1 sur S, et donc de même rang sur S_1. Autrement dit,

$$\operatorname{Ker} f_1 = (1,0)\operatorname{Ker} f_1.$$

□

6.3.6. *Cohomologie d'une D-structure.* Soit (A, ϕ, i, A', i', f) une D-structure sur S. Exactement comme en 4.2.1, la cohomologie cristalline donne deux faisceaux localement libres de rang 6 sur S, $D(A')$ et $D(A)$, muni chacun d'une $\mathcal{O}$-action de type $(3,3)$, ainsi qu'un morphisme $\mathcal{O}$-équivariant $D(f)$ dont le conoyau est un S/p-faisceau localement libre de rang 1, sur lequel $(0,1) \in \mathcal{O}/p$ agit trivialement. Enfin, $D(A)$ est muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée q.

Il est facile de construire un modèle unversel de ce système, sur $\mathbb{Z}_p$ On prend $M_1 = M_2 = \mathbb{Z}_p^6$, avec $(e_1, \ldots, e_6)$ base canonique de M_1 et $(f_1, \ldots, f_6)$ base de M_2 canonique. On définit la forme bilinéaire q sur M_1, par les mêmes formules que dans 4.2.5. On définit i par $i(1,0)(e_k) = e_k$, $i(0,1)(e_k) = 0$ si $k = 1,2,3$ et $i(1,0)(e_k) = 0$, $i(1,0)(e_k) = e_k$ pour $k = 4,5,6$. On définit i' par les mêmes formules, en remplaçant e_k par f_k. Enfin l'on définit $df : M_2 \to M_1$ par sa matrice dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} p & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 6.3.7. *Pour S local, le systéme $(D(A), D(A'), D(f), q, i, i')$ provient par changement de base du système (M_1, M_2, df, q, i, i'), à isomorphisme près. Pour S' local epaississement de S, on peut choisir l'isomorphisme sur S' compatible avec l'isomorphisme choisi sur S.*

Démonstration — Le preuve est laissée au lecteur car elle se fait comme celle du théorème 4.2.5.3, en beaucoup plus facile. □

6.3.8. *Déformations.* On cherche à calculer la déformation universelle d'une $\mathcal{M}$-structure de type B_1sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p. Il suffit de déterminer la déformation universelle de la D-structure associée. Une telle D-structure définit (cf. 4.3.2) deux sous-espaces vectriels de dimension 3 ω_1 et ω_2 de M_1 et M_2, vérifiant :

- $df(\omega_2) \subset \omega_1$,
- ω_1 et ω_2 sont stables par $\mathcal{O}$, de type $(2,1)$,
- ω_1 est isotrope pour B,

et la déformation universelle de la D-structure est la même que celle de ω_1 et ω_2 dans M_1 et M_2 vérifiant les conditions ci-dessus (les preuves se font exactement comme celles du cas p inerte, cf. la proposition 4.3.6).

On voit facilement qu'à automorphisme près, il y a deux types de (ω_1, ω_2) :

– $\omega_2 = \langle f_2, f_3, f_6 \rangle$, $\omega_1 = \langle e_2, e_3, e_6 \rangle$. La déformation universelle est alors

$$\omega_2 = \langle f_2 + af_1, f_3 + bf_1, f_6 + af_5 + bf_4 \rangle,$$

$$\omega_1 = \langle e_2 + ae_1, e_3 + be_1, e_6 + ae_5 + be_4 \rangle,$$

sur l'anneau $W(k)[[a, b]]$.

– $\omega_2 = \langle f_1, f_3, f_6 \rangle$, $\omega_1 = \langle e_2, e_3, e_6 \rangle$. La déformation universelle est alors

$$\omega_2 = \langle f_1 + af_2, f_3 + bf_2, f_6 - cf_5 + bcf_4 \rangle,$$

$$\omega_1 = \langle e_2 + ce_1, e_3 - bce_1, e_6 - ce_5 + bce_4 \rangle,$$

sur l'anneau $W(k)[[a, b, c]]/(ac - p)$.

On en déduit :

THÉORÈME 6.3.9. *Le champ algébrique $\mathcal{M}_{1,p}$ (resp. $\mathcal{M}_{2,p}$, $\mathcal{M}^N_{1,p}$, $\mathcal{M}^N_{2,p}$) est plat et semi-stable sur $\mathbb{Z}_p$, et les singularités de sa fibre spéciale sont du type "deux plans se coupant le long d'une droite".*

7. Modèle canonique

Dans cette section, nous voulons montrer, que tant dans le cas inerte que dans le cas déployée, que notre modèle est *le* modèle *canonique* de la variété de Shimura avec structure iwahorique (resp. parahorique). Dans un première sous-section, nous précisons le sens des termes employés, dans la seconde nous montrons l'assertion.

7.1. Définitions et préliminaires.

7.1.1. Rappelons que la théorie des modèles entiers canoniques des variétés de Shimura a débuté avec l'article [**Mi**]. L'histoire de cette théorie a ensuite (et jusqu'à présent) été assez mouvementée, nous renvoyons à [**Moo**], 3.4 pages 295 *sqq* pour un récit détaillé. On s'est en tout cas surtout intéressé jusqu'à présent à la recherche d'un modèle entier *canonique* sur $\mathbb{Z}_p$ (ou une extension) dans le cas où le groupe définissant la variété de Shimura est non ramifiée en p, et le compact maximal en p définissant le niveau est hyperspécial. Plusieurs définitions circulent ou ont circulé de ce que doit être un *modèle entier canonique*, et l'on conjecture que dans le cas envisagé ici, un tel modèle existe toujours (et est nécessairement unique, comme il résulte de chacune de ces définitions). Il semble que cette conjecture ait été démontrée par Vasiu.

7.1.2. Nous voulons ici montrer par un exemple que l'on peut donner une définition naturelle d'un *modèle entier canonique* dans des cas de mauvaises réductions, et montrer son existence (et unicité). Pour cela rappelons quelques définitions et lemmes.

7.1.3.

DÉFINITION (Vasiu, voir [**VA**], 3.2.1, page 27). 1) Une paire (Y, U) de schémas, ou Y est plat sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, et U un ouvert de Y contenant $Y_{\mathbb{Q}}$ et dont le complémentaire dans Y est de codimension 2 est appelé une paire *extensible*.
2) Un schéma Y normal et plat sur $\mathbb{Z}$ est dit *sain* si pour tout ouvert U tel que (Y, U) est extensible, tout schéma abélien sur U s'étend en un schéma abélien sur Y.

LEMME 7.1.4. *Soit R l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, de degré de ramification e. Soit Y un schéma plat et semi-stable sur R. On note r le nombre maximal de composantes irréductibles de la fibre spéciale de Y se rencontrant en un même point. On suppose $e + r < p - 1$. Alors Y est sain.*

Démonstration — Un schéma semi-stable est régulier, donc normal. Cette remarque faite, le lemme se démontre exactement comme le lemme 3.6 de [**Moo**], qui suppose Y formellement lisse, car la lissité formelle dans la preuve n'est utilisé que pour garantir que pour s un point fermé de Y, il existe une extension (finie et plate) R' de R tel que Y admette une section sur R' passant par s, et tel que le degré de ramification absolue de R' soit strictement inférieur à $p - 1$ (page 298, lignes suivant la formule (3.6.2) de [**Moo**] ; l'hypothèse sur le degré de ramification est là pour permettre d'appliquer le corollaire 3.3.6 de [**Ra**]).

Or pour Y comme dans l'énoncé, l'existence d'une telle section sur un tel R' est toujours vérifiée : pour s un point fermé de la fibre spéciale, il existe un voisinge étale U de s dans Y, tel que U s'écrive comme schéma sur $\operatorname{Spec} R$

$$U = \operatorname{Spec} R[X_1, \ldots, X_k]/(X_1 \ldots X_m - \pi)$$

où π est une uniformisante de R, et $m \leq r$, et où s est l'image par $U \to Y$ du point de coordonnées $(0, \ldots, 0)$ de la fibre spéciale de U. On peut alors poser $R' = R[\pi^{1/m}]$ qui est de degré de ramification m sur R, donc de degré de ramification absolu $e + m \leq e + r < p - 1$, et l'on voit que U (et donc Y) admet une section sur R', d'équation $X_1 = \cdots = X_m = \pi^{1/m}$ □

Reprenant les notations de [**Mi**], première partie, on considère une variété de Shimura $\mathrm{Sh}_p(G, X)$ (avec structure de niveau finie en p, définie par un sous-groupe compact ouvert K_p de $G(\mathbb{Q}_p)$, et infinie en les autres nombres premiers). Elle est munie d'une action de $G(\mathbb{A}_f^p)$ (G est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$), et est définie sur un corps de nombres E. Généralisant la définition 2.9 de [**Mi**], corrigée comme il se doit grâce à la notion de schéma sain nous proposons la suivante (qui est peut-être dans [**VA**], parmi cent autres)

DÉFINITION. Soit v une place de E au-dessus de p, R l'anneau des entiers de e_v. Un *modèle canonique* de $\mathrm{Sh}_p(G, X)$ au dessus de R est un schéma S plat et

séparé sur R muni d'une action continue de $G(\mathbb{A}_f^p)$ et d'un isomorphisme $G(\mathbb{A}_f^p)$-équivariant, $S \otimes_R E_v \simeq \mathrm{Sh}_p(G,X) \otimes_E E_v$ tel que

- Pour tout R-schéma Y sain tout R-morphisme de la fibre générique Y_{E_v} de Y vers S s'étend en un morphisme de Y vers S (propriété d'extension)
- Le schéma S est sain.

LEMME 7.1.5. *S'il existe un modèle canonique sur R il n'en existe qu'un seul à isomorphisme canonique près.*

Démonstration — Soit S et S' deux modèles canoniques, comme S' est sain on dispose d'un (unique par séparation) morphisme $S' \to S$ qui étend l'identité sur la fibre générique, et par symétrie d'un R-morphisme $S \to S'$. Il résulte de la séparation de S et de S' que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre □

7.1.6. *Conjecture.* Compte-tenu des deux lemmes précédents, il nous paraît naturel de conjecturer que si la structure de niveau K_p est parahorique (i.e. contenue, au sens large dans un sous-groupe d'Iwahori de $G(\mathbb{Q}_p)$, et si $p > e + d$, où d est la dimension de la variété de Shimura considéré, alors $\mathrm{Sh}_p(G,X)$ a toujours un (unique nécessairement) modèle canonique sur R, et que ce modèle est semi-stable.

Cette conjecture généralise au cas semi-stable (attendu) la conjecture de Milne (qui concerne le cas de bonne réduction (attendue)).

Dans les cas des surfaces modulaires de Picard où nous avons construit des modèles semi-stable, nous montrons que ce sont les modèles canoniques, ce qui montre la conjecture.

7.2. Le modèle canonique pour les surfaces de Picard avec structures de niveau parahoriques.

7.2.1. Nous nous contentons en fait de traiter le cas p inerte, structure de niveau iwahorique considéré dans les sections 3 à 5. Le cas p décomposé se traite de même, en plus facile.

On définit le schéma $\mathcal{M}^{\infty}_{\Gamma_0(p)}$ comme la limite projective des schémas $\mathcal{M}^{N}_{\Gamma_0(p)}$ quand N parcourt l'ensemble ordonnée par la relation de divisibilité des nombres entiers naturels premiers à p. Nous le voyons comme un schéma sur l'anneau R des entiers du complété de K en p. Le schéma $\mathcal{M}^{N}_{\Gamma_0(p)}$ est naturellement muni d'une action continue de $G(\mathbb{A}_f^p)$, avec $G = \mathrm{GU}(2,1)$

PROPOSITION 7.2.2. *On suppose $p > 3$. Alors $\mathcal{M}^{\infty}_{\Gamma_0(p)}$ est le modèle canonique sur R de sa fibre générique.*

Démonstration — Pour voir que $\mathcal{M}^{\infty}_{\Gamma_0(p)}$ est sain, on remarque que les $\mathcal{M}^{\infty}_{\Gamma_0(p)}$ le sont (disons pour $N \geq 3$, pour que ce soit des schémas) d'après le lemme 7.1.4 puisqu'ils sont semi-stables (théorème 5.1.1), avec au plus 3 composantes irréductibles

de la fibre spéciale se coupant en un point, et puisque R est non ramifié sur $\mathbb{Z}_p$. La remarque 15 de [**VA**], page 29 permet de passer à la limite : $\mathcal{M}^{\infty}_{\Gamma_0(p)}$ est sain.

Pour voir que $\mathcal{M}^{\infty}_{\Gamma_0(p)}$ vérifie la propriété d'extension, on procède comme dans [**Mi**] pages 170-172. Il s'agit de voir que pour un schéma T sur R, toute $\mathcal{M}_{\Gamma_0(p)}$-structure (A, ϕ, i, H) munies de structures compatibles de niveau N pour tout N premier à p se prolonge en une telle structure sur R. Pour voir que A et ϕ se prolonge, on procède exactement comme dans [**Mi**], page 172. Pour la multiplication complèxe i se prolonge, il suffit d'utiliser la proposition (2.11) de [**Mi**]. Pour prolonger le sous-groupe H, invariant par $\mathcal{O}$, on peut considérer $A' = A/H$ et l'isogénie f de A sur A'. La variété A' se prolonge par le même raisonnement de la page 172, l'isogénie f aussi par la proposition 2.11, et son prolongement est encore $\mathcal{O}$-équivariant par unicité. Le noyau de ce prolongement est un sous-schéma en groupe plat de rang p^2 stable par $\mathcal{O}$ prolongeant H. Pour voir que ce sous-schéma en groupe vérifie (**), il suffit d'invoquer la propriété b) de 2.2.1. Ceci termine la preuve. $\square$

Deuxième partie

Théorie des groupes

CHAPITRE IV

Module universel en caractéristique $l \neq p$ pour un groupe de rang un

1. Introduction

1.1. Module universel.

1.1.1. Soit G un groupe réductif $\mathfrak{P}$-adique, K un bon sous-groupe compact maximal de G (cf. [**B-T**], 4.4.1), χ un caractère de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G,K)$ à valeurs dans un anneau k. Le *module universel non ramifié* associé à χ (nous dirons simplement *module universel*) $M_{\chi,k}$ (ou M_χ) a été introduit par Borel, dans le cas où $k = \mathbb{C}$:

$$M_{\chi,k} = \mathcal{C}(G/K) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K)} k,$$

où $\mathcal{C}(G/K)$ désigne les fonctions sur G localement constantes à support compact K-invariantes à droites, et où k est vu comme un module sur $\mathcal{H}_k(G,K)$ via χ.

1.1.2. Depuis son introduction, le module universel a largement montré son utilité dans l'étude des représentations des groupes $\mathfrak{P}$-adiques, en particulier dans l'étude des représentations *modulaires* au sens de Brauer, i.e. définie sur un corps de caractéristique positive. Voir le cours de Serre au Collège de France [**S2**], ainsi que sa lettre à Kazhdan [**S5**], pour des applications aux formes modulaires classiques en caractéristique p. Voir [**CL**] pour des applications à l'augmentation du niveau pour des formes automorphes pour des groupes unitaires à trois variables.

1.1.3. Les questions qu'on peut naturellement se poser sur le module universel, et auxquelles il est utile de répondre pour les applications sont les suivantes :

1) Pour k un anneau de valuation discrète, de caractéristique résiduelle différente de p, de corps de fraction $\mathrm{Frac}(k)$, est-ce que $M_{\chi,k}$ est un réseau au sens de Vigneras ([**V1**]) de $M_{\chi,\mathrm{Frac}(k)}$? Autrement dit, est-ce que, pour tout sous-groupe compact ouvert U de G suffisamment petit, $M_{\chi,k}^U$ est plat et de type fini sur k ?

Quand cela est vrai, on peut appliquer le "principe de Brauer" ([**V1**]) au module universel.

Une réponse positive à cette question, pour tout k et tout χ, implique une réponse positive à la question suivante :

1′) Pour tout corps k de caractéristique différente de p, et pour tout sous-groupe compact ouvert U suffisamment petit, est-ce que $\mathcal{C}(U\backslash G/K)$ est plat et de type fini sur $\mathcal{H}_k(G,K)$?

(Pour voir que 1) implique 1′), voir plus bas : 5.4. Réciproquement, si l'on a une réponse positive à 1′), et si l'on sait par ailleurs que $M_{\chi,k}^U$ est de type fini pour U suffisamment petit, on peut en déduire que la réponse à 1) est oui dans le cas où k est d'égale caractéristique)

2) Pour k un corps de caractéristique différente de p, décrire M_χ en tant que représentation de G.

Par exemple, est-ce que M_χ est irréductible pour des valeurs génériques du caractère χ? Quand M_χ n'est pas irréductible, quels sont ses facteurs de composition? Quels sont ses suites de composition?

Quand une réponse positive à 1) est connue, la question 2) est très proche de la question analogue sur les séries principales non ramifiées. En général, donner une réponse complète à 2) semble beaucoup plus difficile qu'à 1).

1.2. Résultats.

1.2.1. *Résultats de Serre.* Dans son cours au collège de France ([**S2**]), Serre répond complètement aux questions 1) et 2) dans le cas où G est PGL_2 (et K n'importe quel compact maximal) d'un corps $\mathfrak{P}$-adique. Ses méthodes utilisent la combinatoire de l'arbre de Bruhat-Tits de PGL_2

1.2.2. *Résultats de Lazarus.* Dans sa thèse ([**LAZ1**]), Lazarus s'intéresse à la question 1 (plus précisément à la question 1′) pour tous les couples (G, K) où G est un groupe $\mathfrak{P}$-adique non ramifié, et K un compact maximal hyperspécial, quand k est un corps de caractéristique *banale.*

(Cette condition signifie que tous les ordres des sous-quotients finis de G sont inversibles dans k, voir [**LAZ1**], 2.3, pages 20-22, pour plus de détails.)

Il montre que la réponse à la question 1') est oui, pour ces couples (G, K) et en caractéristique banale, si et seulement si une certaine condition portant sur le tore maximal de G est vérifiée. (cf. [**LAZ1**], théorème 8.2.1, page 90). Il conjecture (cf. [**LAZ1**], conjecture 1.0.5, page 11) que le même énoncé reste valable en caractéristique non banale [1] (mais toujours différente de p). Les méthodes de Lazarus ne sont pas combinatoires comme celles de Serre. Elles utilisent une généralisation de la transformation de Satake, due à Kato, donnant une description de $\mathcal{C}(B\backslash G/K)$ en caractéristique banale.

Par ailleurs, Lazarus donne une réponse partielle à la question 2) (irréductibilité générique) dans le cas où G est un groupe unitaire non ramifié à trois variables, et K un compact maximal hyperspécial, toujours en caractéristique banale.

1.2.3. *Nos résultats.* Dans ce chapitre nous donnons une réponse complète à la question 1) pour tout les couples (G, K) où G est un groupe **de rang un**, pas nécessairement non ramifié et où K est un sous-groupe compact maximal spécial

1. À vrai dire, l'énoncé de la conjecture 1.0.5 est un peu différent, puisque Lazarus demande seulement que $\mathcal{C}(G/K)$ soit plat sur $\mathcal{H}(G, K)$. Cette condition est équivalente à $\mathcal{C}(U\backslash G/K)$ plat, pour tout compact ouvert U de G suffisamment petit (ou encore à la même condition pour tout ouvert suffisamment petit dans une base arbitraire de voisinage de e dans G – ou encore, à la même condition pour tout sous-groupe compact ouvert qui est un pro-p-groupe) : voir [**LAZ1**], théorème 8.2.1 ; la preuve, donnée dans le premier paragraphe de la démonstration du théroème, est un peu rapide. Il faut dire que U étant un pro-p-groupe, $\mathcal{C}(U\backslash G/K)$ est facteur direct de $\mathcal{C}(G/K)$, donc la platitude de ce dernier implique la platitude du précédent.

(mais pas nécessairement hyperspécial), en toute caractéristique différente de p (pas nécessairement banale).

Nous donnons une réponse presque complète à la question 2) pour ces mêmes (G, K). Plus précisément nous obtenons une description complète des modules universels pour tous les (G, K) comme ci-dessus, en toute caractéristique différente de p, sauf dans les cas où G est un groupe unitaire à trois et à quatre variables, et où K est hyperspécial.

Dans ces deux cas, les caractéristiques non banales (et différentes de p) sont celles divisant $q^3 + 1$, où q est une puissance de p, à savoir le cardinal du corps résiduel du corps de définition de G. Nous obtenons une description complète des modules universels en caractéristique ne divisant pas $(q + 1)$, mais une description seulement partielle (il nous manque l'irréductibilité d'un des facteurs de composition, pour les valeurs dégénérées du caractères) en caractéristique divisant $q + 1$.

En particulier nous obtenons l'irréductibilité générique dans tous les cas, en toute caractéristique $l \neq p$.

En complément, nous décrivons la structure des algèbres de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$ et $\mathcal{H}(G, B)$ (où B est un Iwahori inclus dans K) en toute caractéristique, ainsi que le centre de cette dernière et ses modules simples. Nous décrivons les modules des K et des B-invariants des modules universels considérés ainsi que de leurs différents facteurs de composition. Nous démontrons, à la suite de [**S2**] et [**LAZ1**], l'égalité des classes dans le groupe de Grothendieck d'un module universel et de sa série principale non ramifiée correspondante. Ceci donne donc une description des facteurs de composition de toutes les séries principales non ramifiés pour des groupes de rang un, en toute caractéristique différente de p, aux exceptions susmentionnées près pour les groupes unitaires non ramifiées.

1.3. Méthodes et plan.

1.3.1. Notre méthode, comme celle de Serre, repose sur la combinatoire des arbres de Bruhat-Tits des groupes de rang un.

Pour la question 1), notre méthode est une généralisation directe de celle de Serre.

Pour la question 2), cependant, elle est assez différente et, en un sens, plus élémentaire. Contrairement à Serre, nous n'utilisons ni cohomologie sur les arbres, ni compactification de Borel-Serre, ni modèle de Kirillov.

L'idée générale est de partir d'un élément non nul ϕ du module universel étudié, qu'on peut relever en une fonction f sur l'arbre et de trouver, dans la sous-représentation engendrée par ϕ, un élément non nul ϕ' qu'on peut relever en une fonction f' sur l'arbre de support plus petit que f. De proche en proche, on arrive à trouver des ϕ avec des relevés f' à support tout petit (dans les bon cas réduits à un point), ce qui permet de voir que la représentation engendré par ϕ' est grosse (dans les bon cas, égale à tout le module universel). J'appelle cette méthode *réduction*

du support. (À l'inverse, on peut considérer la méthode de Serre comme tendant à augmenter le support, et à l'envoyer sur le bord à l'infini)

1.3.2. La réduction du support est mise en oeuvre dans les parties 3 et 4.

Pour traiter en même temps les cas des différents groupes de rang un, nous avons recours à une présentation axiomatique : dans les parties 3 et 4, nous travaillons avec un groupe abstrait G agissant sur un arbre X, le couple (G, X) étant soumis à certaines conditions. Nous donnons du module universel une définition de travail en termes de fonctions sur l'arbre, le lien avec la (vraie) définition, donnée ci-dessus n'étant fait que dans la partie 5.

Nous séparons néanmoins l'étude en deux cas, celui où l'action de G sur X est transitive ("cas des arbres homogènes") et celui où cette action a deux orbites ("cas des arbres bihomogènes"). Il aurait probablement été possible de réduire un peu la longueur de l'exposé en ramenant le premier cas au second grâce à l'astuce classique qui consiste à rajouter un sommet au milieu de chaque arête d'un arbre homogène pour le rendre bihomogène. Néanmoins, le gain aurait été faible, comme le montre la forme assez différente des résultats dans les deux cas, et le fait de traiter d'abord le cas homogène, à la combinatoire nettement plus simple, permet de mieux faire comprendre les idées (du moins nous l'espérons).

Les théorèmes sur la structure des modules universel se trouvent pages 124 et 144. Ils sont énoncés en terme des valences de l'arbre (v dans le cas homogène, (v, v') dans le cas bi-homogène). Pour savoir ce que valent ces nombres dans le cas d'un groupe de rang un concret, le lecteur est invité à se reporter aux exemples de 3.2, 4.2.

1.3.3. Pour terminer la réduction du support, on utilise des résultats de la théorie modulaire des représentations des groupes finis. Ces résultats sont rappelés dans la partie 2.

1.3.4. La partie 5 est consacrée à l'application des résultats des parties 3 et 4 aux groupes p-adiques de rang un. Il nous faut vérifier que nos axiomes sont bien vérifiés pour tous ces groupes, ainsi que des compatibilités entre les différentes définitions du module universel.

Au passage, on en profite pour donner une description de l'algèbre de Hecke (c'est une algèbre polynomiale à une variable) dans un cadre un peu plus général que celui qu'on trouve le plus souvent exposé. Cette description repose encore sur la combinatoire de l'arbre de Bruhat-Tits, et il nous a donc semblé naturel de la donner ici.

1.3.5. La partie 6 est consacrée à la comparaison entre séries principales non ramifiées et modules universels. Elle utilise surtout des idées esquissés dans le cours de Serre et développées dans la thèse de Lazarus.

1.3.6. Enfin, la septième et dernière partie donne une description (toujours basée sur la combinatoire de l'arbre) de l'algèbre de Hecke-Iwahori d'un groupe de rang un. C'est l'occasion de vérifier que certains résultats, dont nous aurons

besoin au chapitre suivant, bien connus en caractéristique banale, restent vrais dans d'autres cas.

2. Rappels et définitions sur les actions transitives et 2-transitives

2.1. Actions et représentations.

2.1.1. Soit Γ un groupe fini, agissant sur un ensemble Ω, fini lui aussi. Si k est un corps, on note $k[\Omega]$ le k-espace vectoriel des sommes formelles déléments de Ω à coefficients dans k. Le groupe Γ agit par applications linéaires sur $k[\Omega]$ (en permutant les éléments de la base canonique), et respecte la forme bilinéaire symétrique non dégénérée naturelle sur $k[\Omega]$. Cette forme identifie donc $k[\Omega]$ à son dual, comme représentation de Ω, et permet de voir des éléments de $k[\Omega]$ comme des éléments de son dual, autrement dit, comme des applications (ou des *fonctions*) de Ω dans k.

Si V est un sous-espace de $k[\Omega]$, on notera $V^\perp$ son orthogonal pour la forme bilinéaire naturelle ; si V est une sous-représentation, il en va de même pour $V^\perp$.

2.1.2. On suppose dorénavant que $|\Omega| \geq 2$. La représentation $k[\Omega]$ contient toujours la droite stable des fonctions constantes, notée $\mathcal{C}$. Elle contient aussi un hyperplan stable, $\mathcal{C}^\perp$, qui est le sous-espace des fonctions de sommes nulles. La droite $\mathcal{C}$ est isomorphe à la représentation triviale, ainsi que le quotient $k[\Omega]/\mathcal{C}^\perp$.

Si $|\Omega|$ est non nul dans k, on a

$$k[\Omega] = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}^\perp. \tag{25}$$

Si $|\Omega|$ est nul dans k, on a

$$\mathcal{C}^\perp \subset \mathcal{C}. \tag{26}$$

Dans ce cas, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^\perp$ n'ont pas de supplémentaire stable par Γ.

2.2. Bonnes actions transitives.

2.2.1. On suppose dans cette sous-partie que Γ agit transitivement sur Ω. Cela implique en particulier que $|\Omega|$ divise $|\Gamma|$.

2.2.2. Une fonction sur Ω invariante par Γ est constante. La représentation triviale n'apparaît donc qu'une seule fois dans $k[\Omega]$, comme la droite $\mathcal{C}$. Apparaît-elle dans $k[\Omega]/\mathcal{C}$? Si $|\Omega|$ est non nul dans k, d'après (25), on a $k[\Omega]/\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^\perp \subset k[\Omega]$, et la représentation triviale n'apparaît donc pas dans $k[\Omega]/\mathcal{C}$.

Si $|\Omega|$ est nul dans k, au contraire, la représentation triviale peut apparaître dans $k[\Omega]/\mathcal{C}$, comme le montre l'exemple de $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agissant par translation sur $\Omega = \Gamma$, quand k est de caractéristique p.

2.2.3.

Définition. Soit l un nombre premier (ou zéro). On dit que l'action de Γ sur Ω est une *bonne* action transitive en l si elle est transitive, et si, pour tout corps k

de caractéristique l, $k[\Omega]/\mathcal{C}$ ne contient pas (comme sous-objet) la représentation triviale.

2.2.4. Une action transitive est automatiquement bonne en les nombres premiers l qui ne divisent pas $|\Gamma|$.

Par ailleurs, on peut remplacer par "pour tout corps k" par "pour tout corps premier k".

2.3. Bonnes actions 2-transitives.

2.3.1. Rappelons que l'action de Γ sur Ω est dite 2-transitive si l'action (diagonale) induite de Γ sur $\Omega \times \Omega$ a exactement deux orbites. Dans tout ce numéro 2.3, on suppose que Ω agit sur Γ de manière 2-transitive.

2.3.2. Une action 2-transitive est bien sûr transitive. En fait, comme le fait remarquer Serre (cf.. [**S2**]), une action 2-transitive est toujours une bonne action transitive, sauf si $|\Omega| = 2$ et k est de caractéristique 2.

Cela peut se démontrer ainsi : si $\phi \in k[\Omega]/\mathcal{C}$ appartient à la représentation triviale, et si f est un relevé de ϕ dans $k[\Omega]$, on a $\gamma f - f$ constante pour tout $\gamma \in \Gamma$. Soient x, y et y' trois points de Ω, avec y et y' tous deux distincts de x. Par hypothèse de 2-transitivité, il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) = x$, $\gamma(y) = y'$. On a alors

$$f(y') - f(y) = (\gamma f)(y) - f(y) = (\gamma f)(x) - f(x) = 0,$$

ce qui prouve que f est constante sur $\Omega - \{x\}$. Si $|\Omega| \geq 3$, on voit en changeant de x que f est constante sur Ω, donc que ϕ est nulle, ce qu'il fallait démontrer. Si $|\Omega| = 2$, on voit que la représentation $k[\Omega]/\mathcal{C}$ est un caractère, qui vaut -1 sur tout élément γ de Γ agissant non trivialement. C'est donc la représentation triviale si et seulement si k est de caractéristique 2.

2.3.3. Si k est de caractéristique nulle, ou simplement première à $|\Gamma|$, la représentation $\mathcal{C}^\perp$ est irréductible. Ce résultat est un exercice d'application de la théorie des caractères (cf. [**S1**], exercice 2 page 29)), qui peut d'ailleurs aussi être fait "à la main".

Si la caractéristique de k divise $|\Gamma|$ mais pas $|\Omega|$, on pourrait espérer que ce résultat reste valide. Si la caractéristique de k divise Ω, il est clair que $\mathcal{C}^\perp$ n'est plus irréductible, mais on pourrait espérer que $\mathcal{C}^\perp/\mathcal{C}$ le soit. En un mot, on peut se demander, en toute caractéristique, si $\mathcal{C}^\perp/(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp)$ est irréductible.

En fait il n'en est rien. Considérons par exemple le groupe Γ des transformations affines de la droite affine sur $\mathbb{F}_p$, agissant sur la droite affine $\Omega = \mathbb{F}_p$, et prenons pour k un corps de caractéristique p. Alors il est clair que les seules représentations irréductibles de Γ sont des caractères.

2.3.4.

DÉFINITION. Soit l un nombre premier (ou zéro). On dit que l'action de Γ sur Ω est une *bonne* action 2-transitive en l si elle est 2-transitive, et si, pour tout corps k de caractéristique l, $\mathcal{C}^\perp/(\mathcal{C}^\perp \cap \mathcal{C})$ est irréductible.

2.3.5. La structure de la représentation $\mathcal{C}^\perp/(\mathcal{C}^\perp \cap \mathcal{C})$ dans les mauvaises caractéristiques a fait l'objet d'une étude intensive depuis trente ans, qui n'est pas encore complètement terminé aujourd'hui. Une des références qui contient le plus d'informations est la thèse de Mortimer, [**Mo**]. On peut y trouver la preuve des faits suivants :

- L'action naturelle (3-transitive) de $\Gamma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\Omega = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ est une bonne action 2-transitive (pour tout l) (*loc. cit.*, pages 12-13).
- L'action naturelle de $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\Omega = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ est une bonne action 2-transitive (pour tout $l \neq 2$) (*loc. cit.*, pages 12-13).
- Soit $\Gamma = \mathrm{SU}_3(q)$ le groupe spécial unitaire à trois variables, défini comme le groupe des endomorphismes $\mathbb{F}_{q^2}$-linéaires de $\mathbb{F}_{q^2}^3$ qui préservent la forme hermitienne standard et qui sont de déterminant 1. Alors Γ agit sur l'ensemble Ω des droites isotropes de $\mathbb{F}_q^3$, qui a pour cardinal q^3+1. Cette action est une bonne action 2-transitive, pour tout l ne divisant pas $q+1$ (*loc. cit.*, page 14-15).

2.3.6. Pour ce dernier exemple, dans le cas où $q+1=0$ dans k, la structure de $\mathcal{C}^\perp/(\mathcal{C}^\perp \cap \mathcal{C}) = \mathcal{C}^\perp/\mathcal{C}$ n'est, semble-t-il, toujours pas complètement déterminée ([**Ge1**], dernière partie; [**Ge2**]). On sait que cette représentation est unisérielle (i.e. a une unique suite de Jordan-Hölder), et qu'elle possède au moins 5 facteurs de composition. Plus précisément, elle en possède $2\alpha+1$, avec $\alpha \geq 2$, dont 2α sont isomorphes à une représentation φ irréductible bien déterminée, de dimension $q(q-1)$, et le dernier est une autre représentation irréductible θ, dont on ne connaît pas la dimension. On conjecture que $\alpha = 2$.

3. Cas des arbres homogènes

3.1. Notations et hypothèses. Dans toute cette partie, on fait les hypothèses suivantes.

On considère un arbre homogène, qu'on note X. Par abus de langage, on notera aussi X l'ensemble des sommets de cet arbre. On fait l'hypothèse que

a) chaque sommet de X a exactement $v > 2$ voisins, où $v-1$ est une puissance d'un nombre premier p.

On se donne un groupe G d'automorphismes de l'arbre X. Pour la topologie de la convergence simple, G est un groupe profini. On suppose que

b) l'action de G sur X est transitive.

Si $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, on note $B(x,n)$ (resp. $S(x,n)$) l'ensemble des points de X à distance $\leq n$ (resp. $= n$) de x. On note $G_n(x)$ le sous-groupe de G qui fixe (point par point) $B(x,n)$. C'est un sous-groupe distingué, ouvert et fermé. Quand $n = 0$,

- Si l'on remplace G par un groupe plus gros, comme le groupe $\mathrm{Aut}\,(X)$ des automorphismes de l'arbre X, ou le groupe $\mathrm{Aut}^+(X)$ des automorphismes agissant *sans inversion*, les propriétés a-b-d restent vraies, mais plus l'hypothèse c)
- Notons que le groupe spécial orthogonal sur F, à trois variables, associé à la forme $x_1x_2 + x_3^2$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(F)$. Les résultats précédents s'appliquent donc aussi à ce groupe.

3.2.2. *Un groupe unitaire non ramifié à 4 variables.* Soit E une extension quadratique non ramifiée de F ; notons $x \mapsto \bar{x}$ l'élément non trivial du groupe de Galois de E sur F. Sur l'espace E^4 on considère la forme hermitienne :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_3 - \pi x_4\bar{x}_4,$$

où π est une uniformisante de E. Soit $\mathrm{GU}(4)$ le groupe des similitudes de cette forme, et soit $G = \mathrm{PGU}(4)$ le quotient de $GU(4)$ par son centre.

Alors (cf. [**CH**], page 217), l'arbre de Bruhat-Tits X de ce groupe est un arbre homogène, de valence $v = q^3 + 1$. Les propriétés a-b-c-d sont vraies pour le couple (G, X). Nous venons de voir a), b) est la proposition 17 de [**CH**], c) et d) sont faciles et laissés au lecteur.

En réduisant mod π la forme Q, on vérifie que, pour $x \in X$, l'action de $G(x)/G_1(x)$ sur $S(x, 1)$ est isomorphe à l'action de $\mathrm{GU}_3(\bar{F})$ sur les droites isotropes de $\bar{E}^3$. D'après 2.3.5, cette action est donc une bonne action 2-transitive en l ne divisant pas $q + 1$.

3.3. Fonctions sur l'arbre. Soit k un anneau, C le module libre sur k des applications presque partout nulles de (l'ensemble des sommets de) l'arbre X dans k, et T l'application linéaire de C dans lui-même "somme des valeurs au sommets voisins". On supposera toujours que p est inversible dans k.

L'action de G sur X induit une action k-linéaire de G sur C, et T est un endomorphisme de cette représentation. De plus, si C est muni de la topologie discrète, cette représentation est lisse (le stabilisateur de tout élément de C est ouvert).

On note M_λ, ou $M_\lambda(k)$ quand le contexte le réclame, le k-module $C/(T - \lambda)C$, où λ est un élément de k, sur lequel G agit continûment. Il est évident d'après l'exactitude à droite du produit tensoriel que la formation de M_λ commute à toute extension des scalaires : si k' est une k-algèbre, on dispose d'un isomorphise canonique $M_\lambda(k') \simeq M_\lambda(k) \otimes_k k'$ de k'-modules, compatible avec les actions de G.

Enfin, si $x \in X$, on note $\mathbf{1}_x$ l'élément de C valant 1 en x et 0 ailleurs.

L'objet de cette partie est de démontrer la platitude de M_λ sur k, puis, et surtout, lorsque k est un corps, de déterminer la suite de composition de M_λ, en fonction de la caractéristique du corps k, et de λ.

3.4. Préliminaires sur les arbres.

3.4.1. Dans cette partie, on établit quelques résultats généraux sur l'arbre X. Ces résultats n'utilisent pas l'homogénéité de l'arbre. On supposera seulement que tout sommet de X a au moins trois voisins.

3.4.2. *Quelques définitions.* Si S est un ensemble de sommets de X, on dit qu'il est *convexe* si, dès que deux points appartiennent à S, l'unique géodésique qui les relie a tous ses sommets dans S. Une intersection de convexes étant convexe, tout ensemble de sommets $S \subset X$ a une *fermeture convexe* qu'on note $\bar{S}$. Le *diamètre* $D(S)$ d'un ensemble S est défini de manière évidente à partir de la distance géodésique sur X; on a bien sûr $D(S) = D(\bar{S})$.

Un point de S est dit *extrémal* s'il a un et un seul voisin dans $\bar{S}$.

3.4.3. Commençons par démontrer quelques lemmes triviaux.

LEMME 3.4.4. *Si $S \subset X$ est convexe, et z est un point extrémal de S, alors $S - \{z\}$ est encore convexe.*

Démonstration — Si $S - \{z\}$ n'était pas convexe, sa fermeture convexe serait S, et donc contiendrait z. Le point z appartiendrait donc à un segment ouvert géodésique $[z_0, z_n]$ avec z_0 et z_n dans $S - \{z\}$. Un tel segment est une suite de points, chacun étant voisin avec le suivant. Le point précédant z et le point le suivant sont donc deux voisins de z, appartenant à S par convexité, ce qui contredit l'extrémalité de z. □

Avec les mêmes notations, il est clair qu'un point extrémal de $\bar{S}$ différent de z est encore extrémal dans $\bar{S} - \{z\}$. En appliquant le lemme de manière réitérée, on voit donc que $\bar{S}$ privé de tous ses points extrémaux est encore convexe.

LEMME 3.4.5. *Soit $S \subset X$. L'ensemble des points extrémaux de S et celui de $\bar{S}$ coïncident.*

Démonstration — Il est évident qu'un point extrémal de S est aussi un point extrémal de $\bar{S}$. Réciproquement, si z est un point extrémal de $\bar{S}$, il est dans S car sinon on aurait $S \subset \bar{S} - \{z\}$, et ce dernier ensemble étant convexe d'après le lemme précédent, $\bar{S} \subset \bar{S} - \{z\}$, ce qui est absurde. Il est alors évident que z est extrémal dans S. □

LEMME 3.4.6. *Tout convexe fini (de cardinal ≥ 2) est la fermeture convexe de ses points extrémaux.*

Démonstration — Soit $S \subset X$ un convexe fini, E l'ensemble de ses points extrémaux, $\bar{E}$ la fermeture convexe de E. Par définition, $\bar{E} \subset \bar{S}$. Inversement, soit $z \in S$. Considérons un segment géodésique $[x\,y]$ de S passant par z, et de longueur maximale pour ces propriétés (la finitude de S en assure l'existence, et le fait que le cardinal de S est supérieur à 2 assure que $x \neq y$, si bien que x et y ont au moins un

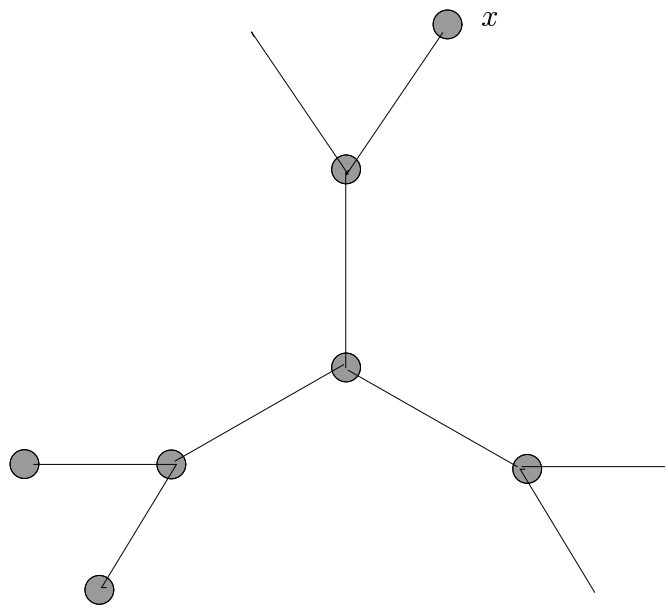
voisin dans S.). Alors x et y sont extrémaux dans S, sinon on pourrait prolonger $[x\,y]$. Donc $z \in \bar{E}$. □

3.4.7. *Points super-extrémaux.*

DÉFINITION. Soit S un ensemble fini de sommet de X, et $x \in S$. On dit que x est super-extrémal (dans S) si

- (i) x est extrémal dans S.
- (ii) L'unique voisin de x dans $\bar{S}$ possède au moins un voisin qui n'est pas dans $\bar{S}$.

EXEMPLE. Dans le dessin ci-dessous, où l'on a pris $v = 3$, et où les points de S sont représentés par des petits disques noirs, il y a quatre points extrémaux, mais x est le seul point super-extrémal.



Si le lemme précédent affirme qu'il existe toujours des points extrémaux pour S fini convexe (non vide), et donc pour S fini (non vide) quelconque par le lemme 3.4.5, il n'existe pas toujours de points super-extrémaux : par exemple, une boule fermée $B(x, n)$ n'en possède pas.

3.4.8. *Support d'une fonction.* Si $f \in C$, son *support* $S(f)$ est par définition l'ensemble (fini) des sommets de X où f ne s'annule pas, et son diamètre $D(f)$ est le diamètre de son support. Si $\phi \in M_\lambda$, on définit son diamètre $D(\phi)$ comme le plus petit des diamètres des éléments f de C qui relèvent ϕ.

PROPOSITION 3.4.9. *Supposons que $f' = (T - \lambda)f$. Alors $\bar{S}(f)$ est l'ensemble $\bar{S}(f')$ privé de ses points extrémaux.*

Démonstration —

Si $S(f)$ est vide ou un singleton, la proposition est évidente. Dans ce qui suit, on suppose donc que le cardinal de $S(f)$ (et donc celui de $\bar{S}(f)$) est ≥ 2.

Soit x un point extrémal de $\bar{S}(f)$. D'après le lemme (3.4.5), c'est aussi un point extrémal de $S(f)$, et donc $f(x) \neq 0$. Soit t l'unique voisin de x qui appartiennent à $\bar{S}(f)$. Les autres voisins de x n'appartiennent pas à $\bar{S}(f)$: il y en a $v-1 \geq 2$, on les note $x_1, \ldots, x_{v-1}$. Il est clair que x appartient à tous les segments géodésiques $[x_i, x_j]$. En chacun de ces points x_i, $f' = (T-\lambda)f$ prend la valeur $f(x) \neq 0$, et donc tous les x_i appartiennent à $\bar{S}(f')$. Donc $x \in \bar{S}(f')$, et tous les points extrémaux de $\bar{S}(f)$ appartiennent à $\bar{S}(f')$. Comme tout convexe (fini de cardinal ≥ 2, cf. lemme 3.4.6) est la fermeture convexe de ses points extrémaux, on obtient déjà $\bar{S}(f) \subset \bar{S}(f')$.

De plus, x n'est pas extrémal dans $\bar{S}(f')$ (tous les x_i lui sont voisins). Comme $\bar{S}(f')$ privé de ses points extrémaux est encore convexe (lemme 3.4.4), le même raisonnement montre que $\bar{S}(f)$ est inclus dans l'ensemble $\bar{S}(f')$ privé de ses points extrémaux. Si l'on désigne par E l'ensemble des points extrémaux de $\bar{S}(f')$, on a montré :

$$\bar{S}(f) \subset \bar{S}(f') - E.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, soit x un point extrémal de $\bar{S}(f') - E$. Alors x a un voisin y qui appartient à E (sinon, x serait extrémal déjà dans $\bar{S}(f')$, autrement dit on aurait $x \in E$). On sait par le paragraphe précédent que y n'appartient pas à $\bar{S}(f)$, donc que $f(y) = 0$. Les voisins de y autres que x n'appartiennent pas à $\bar{S}(f')$, *a fortiori* ils n'appartiennent pas à $S(f)$, et donc ce sont des zéros de f. On voit donc que

$$f'(y) = ((T-\lambda)f)(y) = f(x).$$

Comme $f'(y) \neq 0$ (lemme 3.4.5), on a $f(x) \neq 0$, et donc $x \in S(f)$. Donc tous les points extrémaux du convexe $\bar{S}(f') - E$ appartiennent à $\bar{S}(f)$, ce qui prouve

$$\bar{S}(f') - E \subset \bar{S}(f)$$

□

COROLLAIRE 3.4.10. *Soit $f' \in C$. Si $S(f')$ possède un point super-extrémal, alors $f' \notin (T-\lambda)C$.*

Démonstration — Supposons par l'absurde que $f' = (T-\lambda)f$.

Soit x un point extrémal de $S(f')$, donc un point extrémal de $\bar{S}(f')$, et soit t son unique voisin dans $\bar{S}(f')$. D'après la proposition précédente $x \notin \bar{S}(f)$, donc $f(x) = 0$, et les voisins de x autres que t, qui ne sont pas dans $\bar{S}(f')$ ne sont pas non plus dans $S(f)$. On obtient donc $f(t) = f'(x) \neq 0$, d'où $t \in S(f)$.

Soit y un voisin de t dans l'arbre. De deux choses l'une : soit $y \in \bar{S}(f)$, auquel cas $y \in \bar{S}(f')$ d'après la proposition précédente; soit $y \notin \bar{S}(f)$, auquel cas $f'(y) =$

$f(t) \neq 0$, et $y \in \bar{S}(f')$. Donc tous les voisins de t appartiennent à $\bar{S}(f')$, si bien que x ne vérifie pas (ii).

Autrement dit, si f' est dans l'image de $(T-\lambda)$, il n'a pas de point extrémaux vérifiant le point (ii) de la définition 3.4.7. Le corollaire est la contraposée. □

Ce corollaire est important en ce qu'il donne un critère "local" (en ce que la vérification de la propriété (ii) pour un point extrémal x ne fait intervenir que le petit voisinage $B(x,2)$ de x) sur une fonction de C pour que son image dans le quotient $C/(T-\lambda)C$ soit non nulle. Il admet une forme de réciproque :

PROPOSITION 3.4.11. *Soit $\phi \in C/(T-\lambda)C$. Si $D(\phi) \geq 2$, il existe un relevé f de ϕ dans C tel que f possède un point super-extrémal, et tel que $D(f) = D(\phi)$.*

Démonstration — Parmi tous les relevés f de ϕ dont le diamètre est $D(\phi)$, choisissons-en un tel que $\bar{S}(f)$ soit minimal pour l'inclusion (c'est possible car tout ensemble de parties finies d'un ensemble non vide est bien ordonné pour l'inclusion).

Soit x un point extrémal de $\bar{S}(f)$ (il en existe un parce que $D(\bar{S}(f)) \geq 2$).) Si x ne vérifie pas le point (ii) de la définition de super-extrémal, c'est que tous les voisins de l'unique voisin t de x dans $\bar{S}(f)$ sont dans $\bar{S}(f)$. Mais alors, si $\mathbb{1}_t \in C$ désigne la fonction valant 1 en t et 0 ailleurs, la fonction $f_1 := f-(T-\lambda)(f(x)\mathbb{1}_t)$ est encore un relevé de ϕ ; de plus $f_1(x) = 0$, et pour tout $z \in X$ différent de t ou de ses voisins, on a clairement $f_1(z) = f(z)$. Donc $\bar{S}(f_1)$ est un sous-ensemble strict de $\bar{S}(f)$, ce qui est absurde.

Donc x est bien super-extrémal. □

3.5. Platitude. Choisissons un $x \in X$. Notons $C(x,n)$ le sous-k-module de C constitué des fonctions à support dans $B(x,n)$, et $\bar{C}(x,n)$ l'image de $C(x,n)$ dans $M_\lambda = C/(T-\lambda)C$.

LEMME 3.5.1. *Le k-module M_λ est l'union croissante de ses sous-modules $\bar{C}(x,n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration — C'est évident, parce que tout élément $\phi \in M_\lambda$ a un relevé f, et que $S(f) \subset B(x,n)$ pour un n assez grand. □

PROPOSITION 3.5.2. 1) *Pour tout $n \geq 1$, on a la suite exacte :*

$$0 \to (T-\lambda)C(x,n-1) \to C(x,n) \to \bar{C}(x,n) \to 0.$$

2) *Le k-module $\bar{C}(x,n)$ est libre de rang fini, pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration —

L'application $C(x,n) \to \bar{C}(x,n)$ est par définition surjective. Son noyau est $(T-\lambda)C \cap C(x,n)$, qui est égal à $(T-\lambda)C(x,n-1)$, d'après la proposition 3.4.9. D'où 1) .

Prouvons 2), par récurrence sur n. Pour $n=0$, on a $\bar{C}(x,0)=k$ (d'apres la proposition 3.4.9). Supposons $n \geq 1$, et $\bar{C}(x,n-1)$ libre. Il résulte de 1) que

$$\bar{C}(x,n)/\bar{C}(x,n-1) = C(x,n)/[C(x,n-1)+(T-\lambda)C(x,n-1)],$$

et l'on voit que ce dernier module est isomorphe au module des fonctions sur $S(x,n)$, quotienté par le sous-module des fonctions qui sont constantes sur chacune des parties de $S(x,n)$ qui ont une projection donnée sur $S(x,n-1)$, et donc est libre de type fini. Il en va donc de même de $\bar{C}(x,n)$, comme extension dun module libre de rang fini par un autre. D'où 2). □

COROLLAIRE 3.5.3. *Le k-module M_λ est plat.*

Démonstration — Cela résulte immédiatement de la proposition, vu le lemme précédent, et le fait bien connu qu'une limite filtrante de modules plats est un module plat. □

La faiblesse de ce corollaire réside dans le fait que M_λ n'est pas de type fini, ce qui limite son champ d'application. Avec quelques hypothèses, on a mieux et plus utile:

PROPOSITION 3.5.4. *On suppose que p est inversible dans k, et $n \geq 1$. Alors le k-module $M_\lambda^{G_n(x)}$ est isomorphe à $\bar{C}(x,n)$. En particulier, il est libre de type fini.*

Démonstration — Par définition de M_λ, on a la suite exacte de k-modules avec action de G:

$$0 \to (T-\lambda)C \to C \to M_\lambda \to 0.$$

Comme p est inversible dans k, et comme $G_n(x)$ est un pro-p-groupe de G (hypothèse c)), la suite

$$0 \to ((T-\lambda)C)^{G_n(x)} \to C^{G_n(x)} \to M_\lambda^{G_n(x)} \to 0$$

est encore exacte. En particulier, tout $g \in M_\lambda^{G_n(x)}$ a un représentant f dans C fixe par $G_n(x)$, et donc par ses sous-groupes $G_m(x)$, pour $m \geq n$. Supposons que $S(f)$ soit inclus dans la boule $B(x,m+1)$ pour un certain $m \geq n$. Alors, d'après l'hypothèse d), cela implique que f est constante sur les parties de $S(x,m+1)$ des points ayant une même projection t sur $S(x,m)$. Soit $\psi(t)$ cette valeur. Alors

$$f' = f - (T-\lambda)(\sum_{t \in S(x,m)} \psi(t)\mathbb{1}_t)$$

est encore un représentant de g dans C, $G_n(x)$-invariant, et est à support dans $B(x,m)$. En réitérant ce procédé on arrive à trouver un représentant de g qui est à support dans $B(x,n)$. On a donc montré : $M_\lambda^{G_n(x)} \subset \bar{C}(x,n)$. L'autre inclusion résulte de ce qu'un élément de $C(x,n)$ est $G_n(x)$-invariant. □

3.6. Technique de réduction du support. Dans toute cette sous-partie, on suppose que k est un corps, de caractéristique différente de p.

PROPOSITION 3.6.1. *Soit N un sous-G-module non nul de M_λ. Alors il existe $\phi \in N$ non nul de diamètre inférieur ou égal à 2.*

Démonstration — Soit $\phi \in N$, tel que $D(\phi) \geq 3$. D'après la proposition 3.4.11, il existe un relevé f de ϕ vérifiant $D(f) = D(\phi)$, et admettant un point super-extrémal x.

Soit n la distance maximale d'un point de $S(f)$ à x. Supposons $n \geq 3$.

Le groupe $G_n(x)$ fixe f, et le quotient $G_{n-1}(x)/G_n(x)$ est un p-groupe (hypothèse c)). Comme k n'est pas de caractéristique p, on peut définir f_1 comme la moyenne sous l'action de $G_{n-1}(x)/G_n(x)$ de f. Par définition, $f_1 = f$ en tout point à une distance inférieure ou égale à $n-1$ de x, et f_1 prend la même valeur en deux points à distance n de x pour peu qu'ils aient même projection t sur $B(x,n-1)$ (propriété d) ; on note $\psi(t)$ cette valeur) et f_1 est clairement nulle sur les points à distance $> n$ de x.

Comme $n-1 \geq 2$, il est clair que x est encore super-extrémal pour f_1. D'après le corollaire 3.4.10, l'image ϕ_1 de f_1 dans $C/(T-\lambda)C$ est non nulle. Par ailleurs il est clair que $\phi_1 \in N$.

Enfin, la fonction

$$f_2 : = f_1 - \sum_{t \in X,\ d(t,x)=D(f)-1} (T-\lambda)(\phi(t)\mathbb{1}_t)$$

s'annule sur tous les points à distance n de X. Ainsi, la distance maximale d'un point de $S(f_2)$ à x est au plus $n-1$. Il est clair que x est encore extrémal pour f_2. De plus, si $n-1 \geq 3$, f_2 et f coïncident sur $B(x,2)$, si bien que x est encore super-extrémal pour f_2.

On peut donc, en réitérant ce procédé, obtenir une fonction $f' \in C$, dont l'image dans M_λ est non nulle et appartient à N, tel que x est extrémal pour f', et tel que tout point de $S(f')$ est à distance ≤ 2 de x. Soit t l'unique voisin de x dans $\bar{S}(\phi)$. Tout point y de $\bar{S}(f')$, distinct de x et de t est à distance 2 de x, et le milieu de $[x,y]$ est un voisin de x dans $\bar{S}(f')$ donc est t par unicité. Donc tout point de $\bar{S}(f')$ (sauf t) est voisin de t, donc $D(f') \leq 2$. □

On peut aller un peu plus loin :

PROPOSITION 3.6.2. *Soit N un sous-G-module non nul de M. On suppose que k n'est pas de caractéristique p. Alors il existe $\phi \in N$ non nul de diamètre inférieur ou égal à 1, sauf peut-être si $\lambda = v = 0$ dans k.*

Démonstration — D'après la proposition précédente, on peut supposer qu'il existe ϕ dans N non nul de diamètre 2. Soit f un représentant de diamètre 2. Il est clair que $\bar{S}(f)$ possède un unique point non extrémal, son *centre* c, et que tous les autres points de $\bar{S}$ sont extrémaux et voisins de c.

Choisissons un voisin x de c (pas forcément dans $\bar{S}$), et moyennons f comme dans la preuve de la proposition précédente par le p-groupe $G_1(x)/G_2(x)$. On obtient ainsi une fonction f'_x telle que $f'_x(x) = f(x)$, $f'_x(c) = f(c)$, f'_x prend la même valeur $\psi(x)$ (la moyenne des valeurs de f sur les voisins de c distincts de x) sur tous les voisins de c distinct de x, et f'_x est nulle ailleurs. En posant

$$f''_x = f'_x - (T - \lambda)\psi(x)\mathbb{1}_c,$$

on obtient une fonction nulle partout sauf peut-être en c et en x. Plus précisément,

$$f''_x(c) = f(c) + \lambda\psi(x),$$

et

$$f''_x(x) = f(x) - \psi(x).$$

Si l'un des f''_x est non nul (dans C ou dans $C/(T-\lambda)C$, cela revient au même pour f''_x qui est de diamètre ≤ 1, cf. proposition 3.4.9), la proposition est démontrée.

Sinon, c'est qu'on a pour tout voisin x de c les équations suivantes

$$f(c) + \lambda\psi(x) = 0,$$

$$f(x) = \psi(x).$$

Il est clair que la première famille d'équations implique que $\psi(x)$ ne dépend pas de x si $\lambda \neq 0$. Le second système d'équations implique alors que $f(x)$ ne dépend pas de x.

Par ailleurs, le second système d'équations (rappelons que $\psi(x)$ est la moyenne des valeurs de f aux sommets voisins de c distincts de x) se résout facilement en $f(x) =$ constante dès que $v \neq 0$ dans k.

On a donc montré que f était constante sur l'ensemble des sommets voisins de c sauf peut-être si $v = 0 = \lambda$ dans k. Hors ce cas d'exception, il en résulte donc que f est équivalente à une fonction de support $\{c\}$ modulo $T - \lambda(c)$, forcément non nulle. □

On complète cette proposition par :

PROPOSITION 3.6.3. *Soit N un sous-G-module non nul de M. On suppose que pour $x \in X$, l'action de $G(X)$ sur $S(x,1)$ est une bonne action 2-transitive en la caractéristique de k , et que $\lambda = v = 0$ dans k. Alors il existe un élément non nul $\phi \in N$, qui admet un relevé f_1 dont le support est inclus dans un segment géodésique de longueur 2 (i.e. trois points a, b et c, avec a et b voisins distincts de c).*

Démonstration — Le premier paragraphe de la preuve de la proposition précédente s'applique sans changement. On en garde les notations. La fonction f est donc à support dans $B(c,1)$, et d'image non nulle dans M_λ, appartenant à N. Si f est constante sur $S(c,1)$ elle serait équivalente à une fonction non nulle à support $\{c\}$, et la proposition est prouvée. On peut donc supposer que f n'est pas constante sur $S(c,1)$.

Notons Ω la sphère $S(c,1)$, $k[\Omega]$ l'espace des fonctions sur Ω à valeurs dans k ; soit V le sous-espace de $k[\Omega]$ de toutes les fonctions sur Ω obtenues comme restriction à Ω d'une fonction sur X, à support dans $B(c,1)$, et dont l'image dans M_λ appartient à N.

Alors V contient l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions constantes sur Ω, puisque ce sont les restrictions des multiples de $(T-\lambda)\mathbb{1}_c$. Par ailleurs V contient l'image de f, qui n'est pas dans $\mathcal{C}$. Donc V contient strictement $\mathcal{C}$. Enfin, V est un sous-$G(c)$-module de $k[\Omega]$.

D'après l'hypothèse de bonne 2-transitivité, on en déduit que V est soit tout $k[\Omega]$, soit du moins l'espace des fonctions de sommes nulles. En particulier V contient une fonction à support inclus dans un couple de points $\{a,b\}$. □

REMARQUE. On peut même démontrer un résultat un peu plus précis, qui nous sera utile dans la partie suivante : on peut supposer que la fonction f_1 vérifie $f_1(c) = f_1(b) + f_1(a)$. En effet, comme représentation de $G(c)$, $k[B(c,1)]/k(T-\lambda)\mathbb{1}_C$ est isomorphe à $(k[\Omega]/\mathcal{C}) \oplus k$, par l'application $f \mapsto (f_{|\Omega}, f(c))$. Dans ce $G(c)$-module, le sous-module engendré par f est l'un des 4 suivants : $(k[\Omega]/\mathcal{C}) \oplus k$, $(\mathcal{C}^\perp/\mathcal{C}) \oplus k$, $(k[\omega]/\mathcal{C}) \oplus 0$, $(\mathcal{C}^\perp/\mathcal{C}) \oplus 0$. Dans tous ces modules, on peut trouver un f_1 à support dans $\{a,b,c\}$ vérifiant $f(c) = f(a) + f(b)$: il suffit de le vérifier pour le dernier qui est le plus petit d'entre eux. Or c'est le module des fonctions sur $B(c,1)$, à somme nulle sur $S(c,1)$ et nulle en c. Il est clair que ce module contient un f_1 de la forme voulue.

PROPOSITION 3.6.4. *Soit N un sous-module non nul de M_λ, qui contient un élément non nul dont le diamètre est inférieur ou égal à 1. Alors il existe un élément de N, non nul dont le diamètre est 0, sauf peut-être si $\lambda = \pm v$*

Démonstration — Soit $g \in N$ de diamètre 1, et soit f un relevé de ϕ de diamètre 1. Notons $\{a,b\}$ le support de f.

Si x est un voisin de a, il existe certainement d'après d) un $g_x \in G(a)$ tel que $g_x(a) = a$ et $g_x(b) = x$. Alors $g_x(f)$ vaut $f(a)$ en a, $f(b)$ en x, et 0 partout ailleurs. Sommant les $g_x(f)$ sur l'ensemble des voisins x de a, on obtient une fonction f_1 valant $vf(a)$ en a et $f(b)$ sur tout les voisins de a. Cette fonction est équivalente modulo $(T-\lambda)C$ à la fonction f_2 de support $\{a\}$ valant

$$f_2(a) = vf(a) + \lambda f(b).$$

Comme on peut inverser les rôles de a et b, on peut aussi obtenir une fonction f_3 de support $\{b\}$, valant

$$f_3(b) = vf(b) + \lambda f(a).$$

Si l'une des fonction f_2 ou f_3 est non nulle, la proposition est démontrée. Sinon, c'est qu'on a $v^2 f(a) = \lambda^2 f(a)$, et comme $f(a) \neq 0$,

$$v = \pm\lambda.$$

□

3.7. Structure du module universel. Dans cette sous-partie, on suppose toujours que k est un corps de caractéristique différente de p.

LEMME 3.7.1. *Soit V une sous-G-représentation de C contenant une fonction f dont le support convexe est un segment de longueur au plus $d \leq 2$. Alors la codimension de V dans C est plus petite que d.*

Démonstration — Si $d = 0$, V contient une fonction dont le support est un point, donc contient (d'après l'hypothèse b)) n'importe quelle fonction dont le support est un point. Comme tout élément de C est somme de telles fonctions, $V = C$.

Si $d = 1$, V contient une fonction f prenant des valeurs non nulles u et v en deux points voisins. D'après les hypothèses b) et d), pour tout couple (x, y) de points voisins, V contient un élément f' tel que $f'(x) = u$, $f'(y) = v$, et f' nulle ailleurs. Soit $x \in X$, considérons le sous-espace $V' = V + k\mathbb{1}_x$ de C. Alors si y est un voisin de x, ce sous-espace contient $\mathbb{1}_y = (f - u\mathbb{1}_x)/v$. De proche en proche, V' contient toutes les fonctions de support un point, donc $V' = C$, et V est de codimension au plus 1.

Si $d = 2$, enfin, on raisonne de même, en remarquant que les hypothèses b) et d) montrent que G est transitif sur les triplets (x, y, z) de points voisins, avec $x \neq z$, et en considérant $V + k\mathbb{1}_x + k\mathbb{1}_y \subset C$, où x et y sont deux points voisins. □

THÉORÈME 3.7.2. 1) *Si $\lambda \neq \pm v$, la représentation M_λ est irréductible.*

2) *Si* $\lambda = -v \neq 0 \in k$, M_λ *a un unique sous-module propre* St_-, *qui est irréductible et de codimension 1, et le quotient est le caractère* χ *défini par la formule* $\chi(g) = (-1)^{d(x,g(x))}$ *pour n'importe quel* $x \in X$. *La suite exacte*

$$0 \to St_- \to M_\lambda \to M_\lambda/St_- \to 0$$

n'est pas scindée.

3) *Si* $\lambda = v \neq 0 \in k$, M_λ *a un unique sous-module propre* St, *qui est irréductible et de codimension 1, et* M_λ/St *est la représentation triviale. La suite exacte*

$$0 \to St \to M_\lambda \to M_\lambda/St \to 0$$

n'est pas scindée.

4) *Si* $\lambda = v = 0 \in k$, *alors* M_λ *a un sous-module* St_0, *qui est de codimension* 2. *Si char* $k \neq 2$, *le quotient* M_λ/St_0 *est la somme directe du caractère trivial et de* χ. *On note* St_- *et* St *les images inverses des espaces de ces caractères dans* M_λ. *Les suites exactes*

$$0 \to St_0 \to St \to \chi \to 0$$

$$0 \to St_0 \to St_- \to 1 \to 0$$

ne sont pas scindées.

Si char $k = 2$, *le quotient* M_λ/St_0 *est une extension non scindée du caractère trivial par lui-même. Si* St *désigne l'image inverse du caractère triviale, la suite exacte*

$$0 \to St_0 \to St \to 1 \to 0$$

n'est pas scindée.

Enfin, si pour $x \in X$ l'action de $G(x)$ sur $S(x,1)$ est une bonne action 2-transitive en la caractéristique de k, *alors* St_0 *est irréductible, et la suite exacte*

$$1 \to St_0 \to M_\lambda \to M_\lambda/St_0 \to 0$$

n'est pas scindée, pas plus que celles qu'on peut obtenir à partir de celle-ci en y remplaçant M_λ/St_0 *par un sous-module de dimension 1 et* M_λ *par l'image inverse de ce sous-module.*

Remarque. Ainsi, dans le cas où G est le groupe linéaire d'un corps gauche L (cf. 3.2.1), on a, dans le cas 4) ($\lambda = q^d + 1 = 0$) l'irréductibilité de St_0 sans restrictions sur la caractéristique. Si L est commutatif, on retrouve donc les résultats de Serre ([**S2**] et [**S5**]).

Dans le cas où G est le groupe unitaire de l'exemple 3.2.2, le point 4) du théorème (qui suppose $q^3 + 1 = 0$ dans k) affirme l'irréductibilité de St_0 dès que $q + 1 \neq 0$ dans k.

Démonstration — Il résulte facilement des propositions de la sous-partie précédente et du lemme 3.7.1 que, si l'on n'a pas $\lambda = v = 0$ dans k, tout sous-module N de M_λ est de codimension finie, au plus 1, si $\lambda = \pm v \neq 0$, 0 sinon. Ceci prouve déjà 1), ainsi que toutes assertions sur le non scindage de suite exacte des points 2) et 3).

On peut définir deux formes linéaires L_ε sur C en choisissant une origine O dans X et en posant

$$L_+(f) = \sum_{x \in X} f(x)$$

et

$$L_-(f) = \sum_{x \in X} (-1)^{d(O,x)} f(x).$$

Il est clair que G agit trivialement sur L_+ et par un caractère χ d'ordre 2 sur L_- Si $\lambda = \varepsilon v$, avec $\varepsilon = \pm 1$ la forme L_ε passe au quotient (d'après l'hypothèse a)) et définit une forme linéaire L_ε sur M, G-invariante. En posant $St_\varepsilon = \operatorname{Ker} L_\varepsilon$, St_ε est de codimension 1 donc irréductible d'après le paragraphe précédent, et l'on en déduit facilement 2) et 3).

Prouvons 4). On définit St_0 comme l'espace des fonctions dont la somme des valeurs au sommet à distance paire d'une part, impaire d'autre part d'un sommet fixe O est nulle. Le sous-module St_0 est de codimension 2.

Si char $k \neq 2$, on dispose des deux formes linéaires G-invariantes L_+ et L_- sur lesquels G agit par χ sur la première et 1 sur la seconde. On a $\chi \neq 1$ (par l'hypothèse b) et le fait que $(-1) \neq 1$ dans k), il est clair que $St_0 = \operatorname{Ker} L_+ \cap \operatorname{Ker} L_-$, et l'on obtient bien que $M_\lambda / St_0 = 1 \oplus \chi$.

Si char $k = 2$, on a cette fois $L_+ = L_-$, et $\chi = 1$. L'action de G sur M_λ / St_0 a un sous-module de rang 1, $\operatorname{Ker} L_+ / St_0 = \operatorname{Ker} L_- / St_0$. Comme L_+ est invariant par G, le quotient $(M_\lambda / St_0)/(\operatorname{Ker} L_+ / St_0) = M_\lambda / \operatorname{Ker} L_+$ est isomorphe au caractère trivial. Sur le sous-module $\operatorname{Ker} L_+$ de M_λ, considérons la forme linéaire $L =$ "somme des valeurs sur les sommets à distance paire de O". Elle est invariante par le groupe G, et s'annule sur N. On voit donc que $\operatorname{Ker} L_+ / N$ est lui aussi isomorphe au caractère trivial. Pour voir que M_λ / N est non décomposable, il suffit alors de remarquer (à l'aide de l'hypothèse b)) qu'il n'existe qu'une forme linéaire invariante par G sur M_λ : $L_+ = L_-$, à un scalaire près.

Enfin, si l'hypothèse en romain est vérifiée, il résulte de la proposition 3.6.3 et du lemme 3.7.1 que tout sous-module non nul de M_λ est de codimension au plus 2. On en déduit immédiatement l'irréductibilité de St_0 et les assertions sur le non scindage de certaines suites exactes.

□

3.7.3. *Compléments: K et B-invariants.* On choisit une origine $O \in X$ et on note $K = G(O)$ le stabilisateur de O. On choisit aussi un point voisin O' de O et on note B la stabilisateur du couple (O, O'). On a donc $B \subset K$. Ces notations simplifieront l'énoncé du lemme et de la proposition suivants. (Dans les applications, K sera un sous-groupe compact maximal (hyperspécial) et B un sous-groupe d'Iwahori de G, d'où ces notations.)

LEMME 3.7.4. *Tout élément de M_λ fixe par K (resp. par B) a un représentant à support inclus dans $\{O\}$ (resp. $\{O, O'\}$)*

Démonstration — On a $G_1(O) \subset B \subset K$, donc tout élément fixe par K ou B a un représentant à support dans $B(O, 1)$ d'après la proposition 3.5.4.

Les K-invariants dans M_λ sont donc les K-invariants de $\bar{C}(x, 1)$, et l'on voit à l'aide du point 1) de la proposition 4.5.2 que cet espace, comme K-module, est isomorphe à $k[\Omega]$ si $\lambda \neq 0$, $k[\omega]/\mathcal{C} \oplus 1$, si $\lambda = 0$ (où l'on a posé $\Omega = S(x, 1)$). Dans le premier cas, il est clair qu'il n'y a qu'une droite de K-invariants, et dans le deuxième, cela résulte de ce que l'action de K sur Ω est 2-transitive, donc une bonne action 1-transitive, cf. (2.3.2). Les K-invariants sont donc les multiples de $\mathbb{1}_O$.

Soit maintenant ϕ un B-invariant, f un représentant de ϕ à support dans $B(O, 1)$. Si $g \in B$, l'invariance de l'image de f dans M_λ signifie que

$$g(f) - f = (T - \lambda)f'.$$

La fonction f' est de la forme $\alpha \mathbb{1}_O$ d'après la proposition 3.4.9. La fonction $g(f) - f$ est nulle en O', ce qui implique $\alpha = 0$, donc

$$g(f) = f.$$

Il est alors clair que f prend la même valeur β sur tous les voisins de O distincts de O', et $f - \beta(T - \lambda)\mathbb{1}_O$ est à support dans $\{O, O'\}$. □

PROPOSITION 3.7.5. – *Dans tous les cas, on a* $\dim M_\lambda^K = 1$ *et* $\dim M_\lambda^B = 2$.
- *Dans les cas 2) et 3) du théorème précédent, on a* $\dim St^K = 0$ *et* $\dim(M_\lambda/St)^K = 1$, *et par ailleurs* $\dim St^B = \dim(M_\lambda/St)^B = 1$.
- *Dans le cas 4) du théorème précédent, on a* $\dim St_0^K = \dim St_0^B = 0$, $\dim(M_\lambda/St_0)^K = \dim(M_\lambda/St_0)^B = 2$.

Démonstration — La première assertion résulte immédiatement du lemme. Il résulte aussi de ce lemme qu'aucun sous-G-module strict de M_λ ne peut contenir un vecteur K-invariant non nul (car un tel vecteur serait proportionnel à $\mathbb{1}_O$ et donc engendrerait M_λ), d'où les assertions $\dim St^K = O$. Les formes linéaires L_+ et L_-,

sont K-invariantes, et *a fortiori* B-invariantes d'où les assertions sur les $(M_\lambda/St)^K$, et les $(M_\lambda/St)^B$, dans les cas 2) et 3), et 4) char $k \neq 2$.

Vu la description de N donnée dans la démonstration du théorème précédent, et vu le lemme précédent, les assertions sur St^B sont évidentes : $\mathbb{1}_O + \varepsilon \mathbb{1}_{O'}$ engendre St^B dans les cas 2) et 3), qui est nul dans le cas 4).

Il reste seulement à vérifier les assertions concernant (M_λ/St_0) et ses facteurs dans le cas 4), caractéristique 2. En fait, dans le cas 4) ($\lambda = v = 0$), il est facile d'exhiber deux éléments K-invariants et indépendants de M_λ/N : $\mathbb{1}_O$ et $\mathbb{1}'_O$, quelle que soit la caractéristique de k. □

4. Cas des arbres bihomogènes

4.1. Notations et hypothèses. Dans toute cette partie on fait les hypothèses suivantes. On considère un arbre que l'on note $\mathcal{X}$. On suppose donnée une partition en deux morceaux de l'ensemble de ses sommets :

$$\mathcal{X} = X \coprod X',$$

telle que tout voisin d'un point de X soit dans X' et vice-versa.

a) Il existe deux entiers v et v', strictement supérieurs à 2, tel que $v-1$ et $v'-1$ sont puissances d'un même nombre premier p, et tel que chaque sommet de X (resp. de X') ait exactement v (resp. v') voisins dans $\mathcal{X}$.

On se donne un groupe G d'automorphismes de l'arbre $\mathcal{X}$, qui laisse globalement stables les parties X et X' de $\mathcal{X}$ (c'est automatique si $v \neq v'$). Pour la topologie de la convergence simple, G est un groupe profini.

b) les actions de G sur X et sur X' sont transitives.

Pour $x \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, on définit $B(n,x)$, $G_n(x)$, $G(x)$ comme dans le cas d'un arbre homogène. On suppose encore :

c) le groupe profini $G_n(x)$ est un pro-p-groupe, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathcal{X}$.
d) pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $n \geq 0$, si deux points y et z de $S(x, n+1)$ ont même projection sur $S(x,n)$, alors il existe un élément g de $G_n(x)$ tel que $g(y) = z$;

Notons comme en 3.1 que d) implique la 2-transitivité de l'action de $G(x,1)$ sur $S(x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Ces hypothèses a) à d) auront cours dans toutes cette partie. On les renforcera parfois en demandant que pour $x \in X$ (resp. pour $x' \in X'$), l'action de $G(x)$ sur $S(x,1)$ soit une bonne action 2-transitive en les caractéristiques considérées.

4.2. Exemples. On reprend les notations de 3.2

4.2.1. *Groupes linéaires.* On reprend ici le notations de 3.2.1. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{PGL}^+(D)$ contenant $\mathrm{PSL}(D)$ (cf. [**S4**]). Alors G agit sur l'arbre de 3.2.1, mais cette fois avec deux orbites. On note maintenant $\mathcal{X}$ cet arbre, et X et X' ces deux orbites. Alors on voit dans *loc. cit.* que les propriétés a) à d) sont vérifiées, avec $v = v' = q^d + 1$.

Pour la bonne 2-transitivité, on voit que l'action de $G(x)/G_1(x)$ sur l'ensemble $s(x,1)$ des 1-voisins de x est isomorphes à celle de $\mathrm{PSL}_2(\bar{L})$ sur $\mathbb{P}^1(\bar{L})$, ceci que x appartienne à X ou X'. Ce sont donc de bonnes actions 2-transitives en tout $l \neq 2$, d'après (2.3.5).

4.2.2. *Groupes unitaires (ramifié ou non) à trois variables.* Soit E une extension quadratique de F. Notons $\mathrm{SU}_3(F)$ (resp $\mathrm{U}_3(F)$, $\mathrm{GU}_3(F)$) le groupe spécial unitaire à trois variables associé à l'extension E/F (resp. unitaire, resp. des similitudes unitaires). Notons $\mathrm{PSU}_3(F)$ (resp. $\mathrm{PU}_3(F)$, resp. $\mathrm{PGU}_3(F)$) les quotients de ces groupes par leur centres respectifs, qui sont à chaque fois constitués des homothéties. En fait, on a $\mathrm{PU}_3(F) = \mathrm{PGU}_3(F)$ (exercice, ou bien voir [**Ro2**], page 74, numéro 2.5).

Ces groupes agissent tous sur un arbre $\mathcal{X}$:

- Si E/F est non ramifiée, l'arbre est bihomogène de valences $(q^3+1, q+1)$. Si l'on note X l'ensemble des sommets de valence $v = q^3+1$, et x' celui des sommets de valence $v' = q+1$, on voit facilement ([**CH**]) que $(\mathrm{PU}_3(F), \mathcal{X})$ (resp. $(\mathrm{PSU}_3(F).\mathcal{X})$ vérifie les hypothèses a) à d).

  Pour $x \in X$, et pour $G = \mathrm{PU}$ (resp $G = \mathrm{PSU}($ l'action de $G(x)/G_1(x)$ sur $S(x,1)$ est celle du groupe unitaire $\mathrm{PU}_3(\bar{F})$ (resp. $\mathrm{PSU}_3(\bar{F})$) sur le corps fini $\bar{F}$, sur l'espace des droites isotropes associées.. C'est donc une bonne action 2-transitive en tous les l, sauf ceux divisant $q+1$, d'après 2.3.5

  Pour $x' \in X'$, l'action $G(x')/G_1(x)$ sur $S(x',1)$ est isomorphe à celle de $\mathrm{PGL}_2(\bar{F})$ (resp. $\mathrm{PSL}_2(\bar{F})$) sur $\mathbb{P}^1(\bar{F})$ (voir [**CH**], remarque page 216). C'est donc une bonne action 2-transitive en tout l (resp. en tout $l \neq 2$.)
- Si E/F est ramifié, l'arbre $\mathcal{X}$ est homogène de valence $v = q+1$, mais $\mathrm{PU}_3(F)$ tout comme $\mathrm{PSU}_3(F)$ agissent sur $\mathcal{X}$ avec deux orbites (voir [**CH**], 3.5). Si on les note X et X', les propriétés a) à d) sont aisément vérifiées, et les actions de $G(x)/G_1(x)$ sur $S(x,1)$, pour tout $x \in X$ propriétés e) et e') sont vraies sans restriction pour PU et en $l \neq 2$ pour PSU (cf. [**CH**], remarque page 216 et 2.3.5).

4.2.3. *Groupes unitaires ramifiés à 4 variables.* Soit E une extension quadratique ramifiée de F. Soit H une algèbre des quaternions sur 4 contennat E. La norme sur H d'etermine une forme E-hermitienne sur $H = E^2$ qui est anisotrope. On considère l'espace de dimension 4 $V = H \oplus E^2$ muni de la forme hermitienen somme de la forme sus-mentionnée sur le premier facteur, et de la forme $x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1$ sur le second (cf. [**CH**] 3.2).

On associe à cette forme les groupes algébriques sur F unitaire, spéciale unitaire, des similitudes unitaires, projectifs unitaires, etc...

Si G est l;un de ces groupes, il agit naturelleemnt sur un arbre de Bruhat-Tits bihomogène $\mathcal{X}$ de valences $(q^2+1, q+1)$ ([**CH**], point 2 des théorèmes 14 et 15). Les conditions a), b) c), d) sont facilement vérifiées, et l'on note que pour $x \in X$, $S(x,1)$ est en bijection avec $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ (resp. $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^2})$) si x est de valence $q+1$ (resp. q^2+1) de telle manière que l'action de $G(x)$ sur $S(x,1)$ contiennent l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ (resp. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ - voir [**CH**], page 215 dans le acs q imapir. Le cas q pair est laissé au lecteur). D'après 2.3.5, l'action de $G(x)$ sur $S(x,1)$ est une bonne action 2-transitive.

4.2.4. *Groupes orthogonaux à 5 variables.* On considère sur $F^5 = F^2 \oplus F^3$ une forme quadratique non dégénérée, somme de la forme $(x,y) \mapsto xy$ sur F^2, et d'une forme anisotrope (il en existe toujours) sur F^3. On considère les groupes SO_5, O_5, GO_5 associé et leurs quotients PSO_5, PO_5, PGO_5. Ces trois derniers groupes agissent fidèlement sur l'arbre $\mathcal{X}$ de $\mathrm{PGO}(5)$, qui est bihomogène de valence $v = q^2+1$, $v' = q+1$. Les propriétés a) à d) sont aisément vérifiées.

Pour $x \in X$, l'action de $G(x)$ sur $S(x,1)$ est bonne en $l \neq 2$, et pour $x' \in X'$, l'action de $G(x')$ sur $S(x',1)$ est bonne en tout l. (Pour cela voir le paragraphe au dessus du lemme 12, page 213 de [**CH**], et 2.3.5).

4.3. Fonctions sur l'arbre. Dans toute cette partie, k est un anneau quelconque.

4.3.1. *Définitions.* On note C (resp C') le module libre sur k des applications presque partout nulles de X (resp. X') dans k.

On dit que deux points sont 2-*voisins* quand ils sont à distance 2 l'un de l'autre. D'après a) , un point de X (resp. de X') a exactement $v(v'-1)$ (resp. $v'(v-1)$) 2-voisins et ils sont tous dans X (resp. X').

On note $T : C \to C$ (resp. $T' : C' \to C'$) l'application "somme des 2-voisins". On note $T_0 : C \to C'$ (resp. $T_1 : C' \to C$) "somme des sommets voisins".

Pour $\lambda \in k$ (resp. $\mu \in)k$, on pose

$$M_\lambda = C/(T-\lambda)C, \ M'_\mu = C'/(T-\mu)C'.$$

Lorse que le contexte l'exige on note ces modules $M_\lambda(k)$ et $M_\mu(k)$. Il est clair que leur formation commute à toute extension des scalaires.

4.3.2. Les relations suivantes découlent facilement de l'hypothèse a).

$$\begin{aligned} T &= T_1T_0 - v\mathrm{Id}_C \\ T' &= T_0T_1 - v'\mathrm{Id}_{C'} \end{aligned}$$

4.3.3. Soit $f \in C$.

$$\begin{aligned} T_0(T-\lambda)f &= T_0(T_1T_0-(\lambda+v)\mathrm{Id})f \\ &= (T_0T_1)T_0f-(\lambda+v)T_0f \\ &= (T'+v'\mathrm{Id}_{C'})T_0f-(\lambda+v)T_0f \\ &= T'(T_0f)-(\lambda+v-v')(T_0f). \end{aligned}$$

Donc si $\lambda+v-v'=\mu$, i.e

$$\lambda+v=\mu+v', \tag{27}$$

$T_0(T-\lambda)C\subset(T'-\mu)C'$, et T_0 passe donc au quotient et induit une application

$$\bar{T}_0 : M_\lambda \to M'_\mu.$$

Par symétrie, sous la même condition 27 (qui est symétrique), T_1 passe au quotient et induit une application

$$\bar{T}_1 : M'_\mu \to M_\lambda.$$

4.3.4. Toujours sous la même condition 27, on tire des formules 4.3.2

$$\begin{aligned} \bar{T}_0\bar{T}_1 &= (\mu+v')\mathrm{Id}_{C'} \\ \bar{T}_1\bar{T}_0 &= (\lambda+v)\mathrm{Id}_C. \end{aligned}$$

Dans le cas $\lambda=-v$ (i.e. $\mu=-v'$, vu (27)), on a donc

$$\bar{T}_0\bar{T}_1=\bar{T}_1\bar{T}_0=0,$$

d'où $\mathrm{Im}\,\bar{T}_1\subset\mathrm{Ker}\,\bar{T}_0$ et $\mathrm{Im}\,\bar{T}_1\subset\mathrm{Ker}\,\bar{T}_0$. En fait on a un peu plus :

Lemme 4.3.5. *Sous les conditions (27) et $\lambda=-v$,*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,\bar{T}_1 &= \mathrm{Ker}\,\bar{T}_0 \\ \mathrm{Im}\,\bar{T}_0 &= \mathrm{Ker}\,\bar{T}_1 \end{aligned}$$

Démonstration — Soit $f\in C$; Supposons qu'il existe $g'\in C'$ tel que $T_0f=(T'-\mu)g'$. D'après (4.3.2), on a donc $T_0f=(T_0T_1)g'-(\mu+v')g'$, et d'après les hypothèses du lemme, $T_0f=T_0T_1g$, d'où, par injectivité de T_0 (4.4.5), $f=T_1g$. On en déduit $\mathrm{Ker}\,\bar{T}_0=\mathrm{Im}\,\bar{T}_1$. L'autre assertion en découle par symétrie. □

4.3.6. *Symétrie du problème.* Explicitons l'argument de symétrie que nous venons d'employer et dont nous nous resservirons. Les hypothèses a)-d) sont symétriques en X et X'. On a donc une symétrie générale du problème, et tout énoncé prouvé donne lieu à un énoncé symétrique, obtenu en procédant aux changements suivants :

$$\left.\begin{array}{l}\text{hypothèse que } G(x) \text{ sur } S(x,1)\\ \text{est une bonne action en } l\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{hypothèse que } G(x') \text{ sur } S(x',1)\\ \text{est une bonne action en } l\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} X & \leftrightarrow & X' \\ C & \leftrightarrow & C', \\ T & \leftrightarrow & T', \\ T_0 & \leftrightarrow & T_1, \\ \lambda & \leftrightarrow & \mu, \text{ si } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont reliés par (27)}, \\ M_\lambda & \leftrightarrow & M'_\mu, \\ \bar{T}_0 & \leftrightarrow & \bar{T}_1, \text{ quand ils sont définis.} \end{array}$$

Dans la suite du texte, pour ne pas alourdir les énoncés, parmi deux assertions symétriques, nous n'en donnerons qu'une seule (celle ou M_λ apparaît plutôt que M'_μ), laissant au lecteur qui le désire le soin d'en expliciter l'autre.

4.4. Lemmes sur les arbres.

4.4.1. Les résultats de 3.4, comme nous l'avions noté (3.4.1), n'utilisent pas l'homogénéité de l'arbre, seulement le fait que chaque point a au moins 3 voisins, qui est vérifié pour $\mathcal{X}$ d'après l'hypothèse a). Nous utiliserons donc librement les lemmes 3.4.4, 3.4.5, 3.4.6.

4.4.2. *Parties X-convexes.* Soit S est une partie de X, et $\bar{S}$ sa fermeture convexe dans $\mathcal{X}$; les points extrémaux de $\bar{S}$ sont alors dans X, d'après le lemme 3.4.5. Inversement, une partie convexe de $\mathcal{X}$ qui a tout ses points extrémaux dans S est la fermeture convexe d'une partie de X (à savoir l'ensemble de ses points extrémaux). Une telle partie de $\mathcal{X}$ sera dite *X-convexe.* On a aussi la notion analogue de partie *X'-convexe.*

Notons que si l'on enlève à une partie X-convexe de $\mathcal{X}$ tous ses points extrémaux, on obtient une partie X'-convexe.

4.4.3. *Support et support convexe.* Un élément de C (resp. de C') est une fonction sur X (resp. X'), mais on peut aussi le voir comme une fonction sur $\mathcal{X}$ tout entier, nulle sur X' (resp. sur X). Ceci permet de parler du support $S(f)$ d'une fonction $f \in C$ (resp. $f' \in C'$) comme d'un sous-ensemble de $\mathcal{X}$, inclus dans X (resp. etc.) On peut aussi parler du support convexe $\bar{S}(f)$ de f, défini comme la fermeture convexe (dans l'arbre $\mathcal{X}$) de $S(f)$. C'est un ensemble X-convexe.

De la même façon, le support convexe d'un élément $f' \in C'$ est une partie de $\mathcal{X}$ qui est X'-convexe.

Si $f \in C$, et qu'on considère f et $T_0 f$ comme des fonctions sur $\mathcal{X}$ tout entier, $T_0 f$ n'est autre que la fonction qu'on notait Tf dans la partie 3.4. Le lemme 3.4.9 se réécrit donc :

LEMME 4.4.4. *Pour tout $\kappa \in k$, Le support convexe de $f \in C$ s'obtient en enlevant ses points extrémaux à celui de $(T_0 - \kappa)f$ (même énoncé avec $f' \in C'$ et T_1)*

On en déduit immédiatement :

LEMME 4.4.5. *Pour tout $\kappa \in k$, l'application $T_0 - \kappa$ est injective.*

4.4.6. *Points super-extrémaux ?* La notion de point super-extrémal (cf. 3.4) garde un sens, mais en posséder un garantit de ne pas être dans l'image de $T_0 - \kappa$, et non de $T - \lambda$.

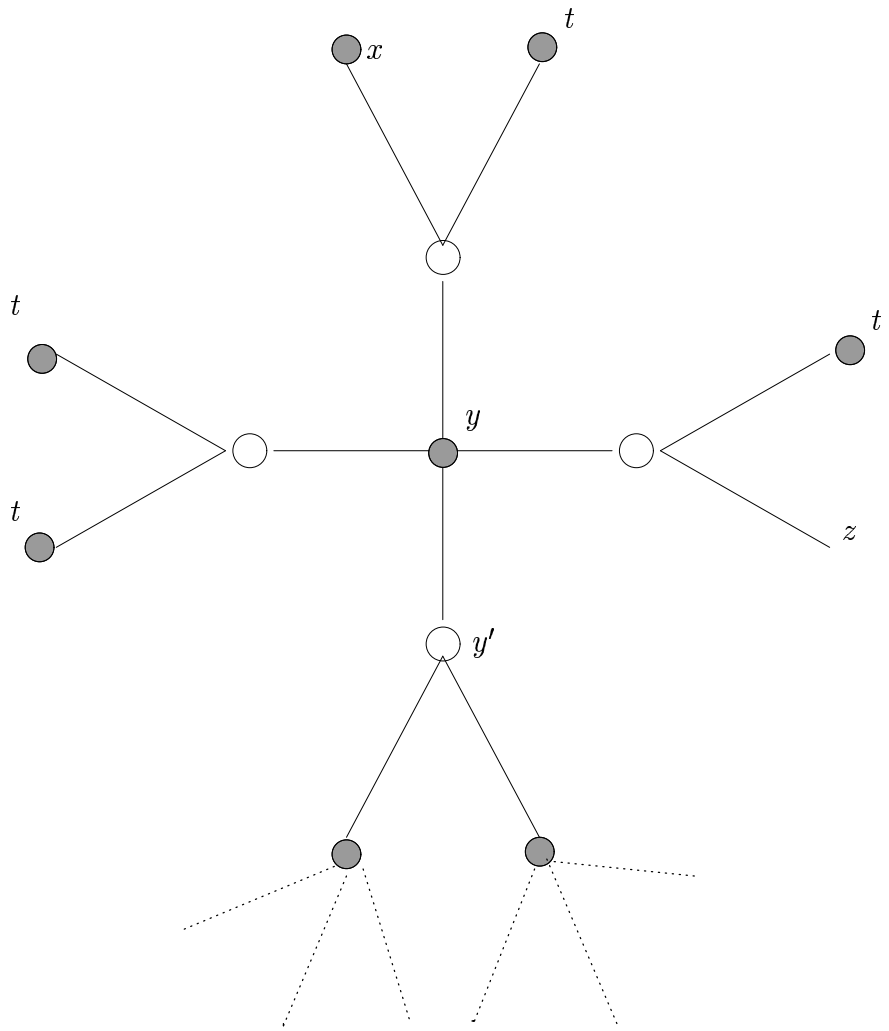
Par ailleurs, le lecteur aura bien entendu remarqué que le graphe d'ensemble de sommets X, et d'ensemble d'arêtes les couples de points de X qui sont 2-voisins dans $\mathcal{X}$ n'est pas un arbre, ce qui rend impossible une adaptation directe de la notion de super-extrémal, et nécessaire quelques précautions :

4.4.7. *Points 2-super-extrémaux.*

DÉFINITION. Soit S un X-convexe de $\mathcal{X}$. Un point $x \in X$ est dit 2-*super-extrémal* pour f, si

(i) x est extrémal dans S.
(ii) x a un unique 2-voisin y dans S qui n'est pas extrémal dans S.
(iii) Il existe un 1-voisin y' de y dans S, tel que $y' \notin [x, y]$, et :
  (iiia) Il existe un 2-voisin z de y, tel que $y' \notin [y, z]$, et $z \notin S$.
  (iiib) Tout 2-voisin t de y, tel que $y' \notin [y, t]$, qui appartient à S est extrémal dans S.

Dans la figure suivante, les points de X' sont représentés par des cercles, les points de X qui appartiennent à S par des cercles plus petits et grisés.



Notons que si S admet un point 2 super-extrémal, on a $D(S) \geq 4$; en effet, les hypothèses impliquent que $d(x, y') \geq 3$, et comme S est X-convexe, son diamètre est pair.

LEMME 4.4.8. *Soit f_0 un élément de C, et soit S le support convexe de $(T-\lambda)f_0$. Notons S' l'ensemble S privé de ses points extrémaux, et S'' l'ensemble S' privé de ses points extrémaux. Alors S'' est le support convexe de f_0.*

Démonstration — Notons Σ le support convexe de $T_1T_0f_0$, Σ' l'ensemble Σ privé de ses points extrémaux, et Σ'' l'ensemble Σ' privé de ses points extrémaux. Il résulte immédiatement du lemme 4.4.4, appliqué 2 fois, que Σ'' est le support convexe de f_0

Comme, en général, $T - \lambda = T_1T_0 - \lambda - v$ (cf. 4.3.2), on a

$$\begin{aligned} (T-\lambda)f_0 &= T_1T_0f_0 + (-\lambda - v)f_0, \text{ d'où,} \\ S &\subset \Sigma \cup \Sigma'' = \Sigma \end{aligned}$$

Soit x un point extrémal de Σ. D'après le lemme 3.4.5, il appartient au support de $T_1T_0f_0$. Par définition, x n'est pas dans Σ'' donc $f_0(x) = 0$. Il en résulte que

$$(T-\lambda)f_0(x) = T_1T_0f_0(x) \neq 0,$$

d'où $x \in S$. Comme S est convexe, on en déduit $\Sigma \subset S$, d'où $\Sigma = S$, ce qui implique $\Sigma'' = S''$ et le lemme. □

COROLLAIRE 4.4.9. *Soit $f \in C$. Si $\bar{S}(f)$ possède un point 2-super-extrémal, alors $f \notin (T-\lambda)C$.*

Démonstration — Soit $f = (T-\lambda)f_0$. Supposons par l'absurde que x soit un point 2-superextrémal de $\bar{S}(f)$. Soit y défini par la propriété (ii) de la définition de 2-super-extrémal.

Nous alors voir que y est un point extrémal de $\bar{S}(f_0)$. En effet, si x' est le milieu de $[y, x]$, il appartient à l'ensemble noté S' dans le lemme précédent. Il en va de même de l'élément y' dont la propriété (iii) assure l'existence, puisque y' ne peut être extrémal dans $\bar{S}(f)$ qui est X-convexe.

On a de plus $y' \neq x'$, donc $y \in [x', y']$, ce qui montre que y appartient à S' et n'y est pas extrémal. On a donc $y \in \bar{S}(f_0)$ d'après le lemme précédent.

De plus, nous allons voir que tous les voisins de y, sauf peut-être y', sont extrémaux dans S' s'ils lui appartiennent : en effet, un voisin w de y, qui n'est pas y', a tous ses voisins, à part y, qui sont extrémaux dans $\bar{S}(f)$ s'ils lui appartiennent, d'après (iiib) ; mais alors d'après le lemme, ces voisins n'appartiennent pas à S', et le seul voisin dans S' que peut avoir w est y. Le point w est donc extrémal dans S', pour peu qu'il lui appartienne.

Toujours d'après le lemme, on voit que y n'a qu'un voisin dans $\bar{S}(f_0)$, à savoir y'. Le point y est donc extrémal dans $\bar{S}(f_0)$.

Mais alors $y \in S(f_0)$ d'après le lemme 3.4.5, autrement dit : $f_0(y) \neq 0$. Soit z un 2-voisin de y tel que $y' \notin [y, z]$. Alors on voit facilement qui le seul 2-voisin de z qui est dans $\bar{S}(f_0)$ est y. D'où $f(z) = f_0(y) \neq 0$, et $z \in \bar{S}(f)$. Ceci contredit l'hypothèse (iiia). □

PROPOSITION 4.4.10. *Soit $\phi \in M_\lambda$, tel que $D(\phi) \geq 4$. Alors il existe un relevé f de ϕ dans C tel que $\bar{S}(f)$ admet un point 2-super-extrémal.*

Démonstration — Soit O un point de X. Pour $f \in C$, de support convexe $\bar{S}(f)$ contenant O, notons $d_O(f)$ le nombre $\sup_{x \in \bar{S}(f)} d(O, x)$, et $N_O(f)$ le nombre de points de $\bar{S}(f)$ qui atteignent le maximum précédent, autrement dit qui sont à distance $d_O(f)$ de O.

Parmi tous les relevés f de ϕ dont le support convexe contient O, choisissons-en un qui minimise $d_O(f)$, et parmi ceux-ci, un qui minimise $N_O(f)$.

Soit alors x un point de $\bar{S}(f)$ qui vérifie $d(x, O) = D_O(f)$. Nous allons voir que x est 2-super-extrémal dans $\bar{S}(f)$.

Comme $D(f) \geq D(\phi) \geq 4$, on a $d(x, O) = d_O(f) \geq 2$. Notons x', (resp. y) l'unique voisin (resp. 2-voisin) de x qui est sur la géodésique $[x\,O]$.

Le point x' est en fait l'unique voisin de x dans $\bar{S}(f)$: en effet, si u' était un autre voisin de x dans $\bar{S}(f)$, comme $\bar{S}(f)$ est X-convexe, il existerait $u \in \bar{S}(f)$, 2-voisin de x, avec u' milieu de $[u\,x]$. Mais on aurait alors

$$d(u, O) = d(u, x) + d(x, O) = 2 + d(x, O) > d(x, O)$$

ce qui est absurde. Donc x est bien extrémal dans $\bar{S}(f)$, ce qui prouve la propriété (i) de la définition de super-extrémal.

Soit v un 2-voisin de x sans $\bar{S}(f)$, distinct de y. D'après ce qui précède, x' est le milieu de $[x, v]$, d'où l'on tire $d(v, O) = d(x, O) = d_0(f)$. Le raisonnement précédent, prouvant l'extrémalité de O, s'applique donc aussi à v, ce qui prouve (ii).

Si $d_0(f) > 2$, définissons y' comme l'unique point à distance 3 de x (donc à distance 2 de x', et 1 de y) sur la géodésique $[x\,O]$. Si $d_0(f) = 2$, on a $O = y$, et définissons y' comme étant n'importe quel voisin de y distinct de x'.

Un 2-voisin t de y dans $\bar{S}(f)$, qui n'est pas voisin de y' vérifie $d(t, O) = d(x, O) = D_0(f)$; le raisonnement ci-dessus s'applique donc encore à t, et montre donc qu'il est extrémal. Ceci prouve (iiib).

Enfin, si (iiia) nétait pas vérifiée, tous les 2-voisins t de y vérifiant $y' \notin [y\,t]$ seraient dans $\bar{S}(f)$, donc dans $S(f)$ (lemme 3.4.5). En en choisissant un, t, et en considérant

$$f' = f - f(t)(T - \lambda)\mathbb{1}_y,$$

on obtiendrait une fonction f' vérifiant $d_0(f') \leq d_0(f)$, et si $d_0(f') = d_0(f)$, $N_0(f') < N_0(f)$, contredisant la minimalité de f. Ceci prouve (iiia), et la proposition.

□

4.5. Platitude. Les résultats suivants se démontrent exactement comme les résultats analogues de la partie 3.5

Choisissons un $x \in X$. Notons $C(x, n)$ le k-module des fonctions à support dans $B(x, n)$, et $\bar{C}(x, n)$ l'image de $C(x, n)$ dans M_λ.

LEMME 4.5.1. *Le k-module M_λ est l'union croissante de ses sous-modules $\bar{C}(x, n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

PROPOSITION 4.5.2. 1) *Pour tout $n \geq 1$, on a la suite exacte :*

$$0 \to (T - \lambda)C(x, 2n - 2) \to C(x, 2n) \to \bar{C}(x, 2n) \to 0.$$

2) *Le k-module $\bar{C}(c, 2n)$ est libre de rang fini, pour tout $n \geq 0$.*

COROLLAIRE 4.5.3. *Le k-module M_λ est plat.*

PROPOSITION 4.5.4. *On suppose que p est inversible dans k, et $n \geq 1$. Alors le k-module $M_\lambda^{G_{2n}(x)}$ est isomorphe à $\bar{C}(x, 2n)$. En particulier, il est libre.*

4.6. Réduction du support. Dans cette sous-partie, k est un corps de caractéristique p.

PROPOSITION 4.6.1. *Soit N un sous-G-module non nul de M_λ. Alors il existe $\phi \in N$, $\phi \neq 0$, et un relevé f de ϕ dans C tel que $S(f)$ soit inclus dans une boule $B(c,2) \cap X$ avec $c \in X$.*

Démonstration — Cela se démontre exactement comme la proposition 3.6.1, en utilisant la notion de 2-super-extrémal au lieu de super-extrémal, le corollaire 4.4.9 au lieu du corollaire 3.4.10 et la proposition 4.4.10 au lieu de la proposition 3.4.11.

Plus précisément : soit $\phi \in N$, non nul. Si $D(\phi) \leq 4$, et si f est un relevé de ϕ de diamètre $D(\phi)$, on voit facilement que $S(f)$ est inclus dans une boule $B(c,2)$.

On peut donc supposer $D(\phi) > 4$, ce qui permet (avec de la marge) dappliquer la proposition 3.4.11 : il y a donc un relevé f de ϕ qui a un point super-extrémal x. Soit n la distance maximale d'un point de $S(f)$ à x. Comme $\S(f) \in X$, c'est un entier pair. supposons $n \geq 6$. Soit f_1 obtenu en moyennant f sous l'action de $G_{n-1}(x)$. Alors il est clair que l'image ϕ_1 de f_1 dans M_λ est non nulle, et que ϕ_1 et f_1 coïncide sur $B(x,4) \subset B(x,n-1)$. Le point x est donc encore 2-superextrémal pour f_1, et ϕ_1 est donc non nul dans $\mathcal{M}_\lambda$ (corollaire 4.4.9).

Par construction f_1 est constant sur les ensembles de $S(x,n)$ formés des points dont le projeté sur $S(x,n-2)$ est un point donné de $S(x,n-2)$. (Le *projeté* d'un point de $S(x,2n)$ dans $S(x,2n-2)$ est défini comme l'unique 2-voisin de x dans $S(x,n-2)$.) En appelant $\phi(t)$ cette valeur pour $t \in S(x,n-2)$, et en posant

$$f_2 : = f_1 - \sum_{t \in S(x,n-2)} (T-\lambda)\phi(t)\mathbb{1}_t,$$

, on obtient une fonction qui est encore un relevé de ϕ_1 et dont tous les points du support sont à distance $\leq n-2$ de x.

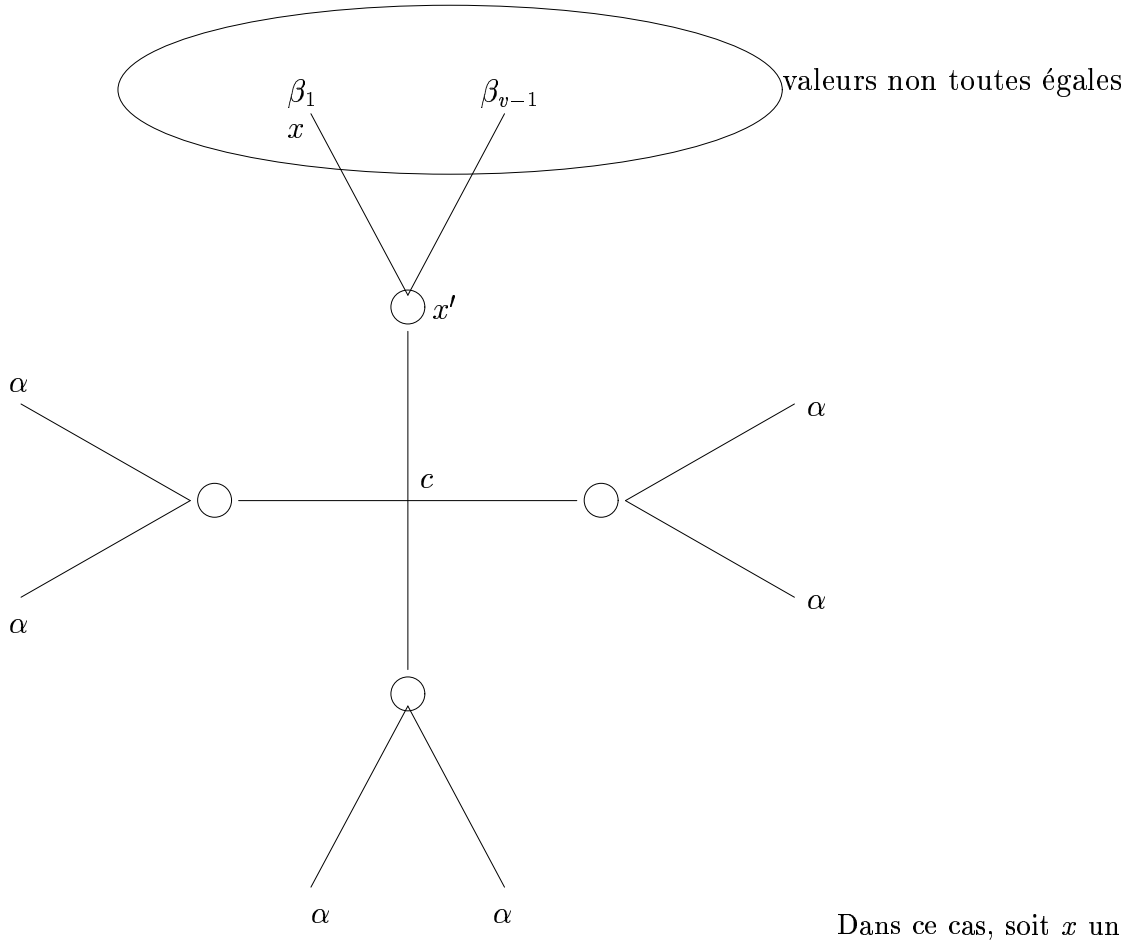
Par ailleurs, f_2 et f_1, donc f_2 et f, coïncident sur $B(x,n-4)$. Si l'on a $n \geq 8$, x est encore 2-super-extrémal pour f_2, et on pourrait réitérer le processus $f \mapsto f_2$ en repartant de f_2.

On peut donc supposer $n \leq 6$, et dans ce cas tout point de $S(f_1)$ est à distance inférieure à 4 de x. Or on voit facilement que x est extrémal dans $\bar{S}(f_1)$, ce qui implique que $D(f_1) \leq 4$ et nous ramène au cas traité dans le premier paragraphe de cette preuve. □

PROPOSITION 4.6.2. *Soit N un sous-G-module non nul de M_λ. Alors il existe $\phi \neq 0$, et un relevé f de ϕ dans C tel que $S(f)$ soit inclus dans une boule $B(x',1)$, avec $x' \in X'$ sauf peut-être si $\lambda = v = 0$.*

Démonstration — On part de f et $c \in X$ comme dans la conclusion de la proposition précédente. De deux choses l'une :

1) Soit il existe un $x' \in X'$, voisin de c, tel que f ne soit pas constante sur l'ensemble des $v'-1$ voisins de x' distincts de c.



Dans ce cas, soit x un voisin de x', distinct de c. Le groupe $G_2(x)$ agit transitivement sur l'ensemble des $(v'-1)(v-1)$ 2-voisins de c qui ne sont pas voisins de x', mais il laisse fixe les voisins de x. (Cela résulte de l'hypothèse d) appliquée 2 fois, d'abord à $G_2(x)$, qui agit donc transitivement sur les voisins de c distincts de x, puis à $G_3(x) \subset G_2(x)$, qui, un tel voisin u de c étant fixé, agit transitivement sur les voisins de u distinct de c.)

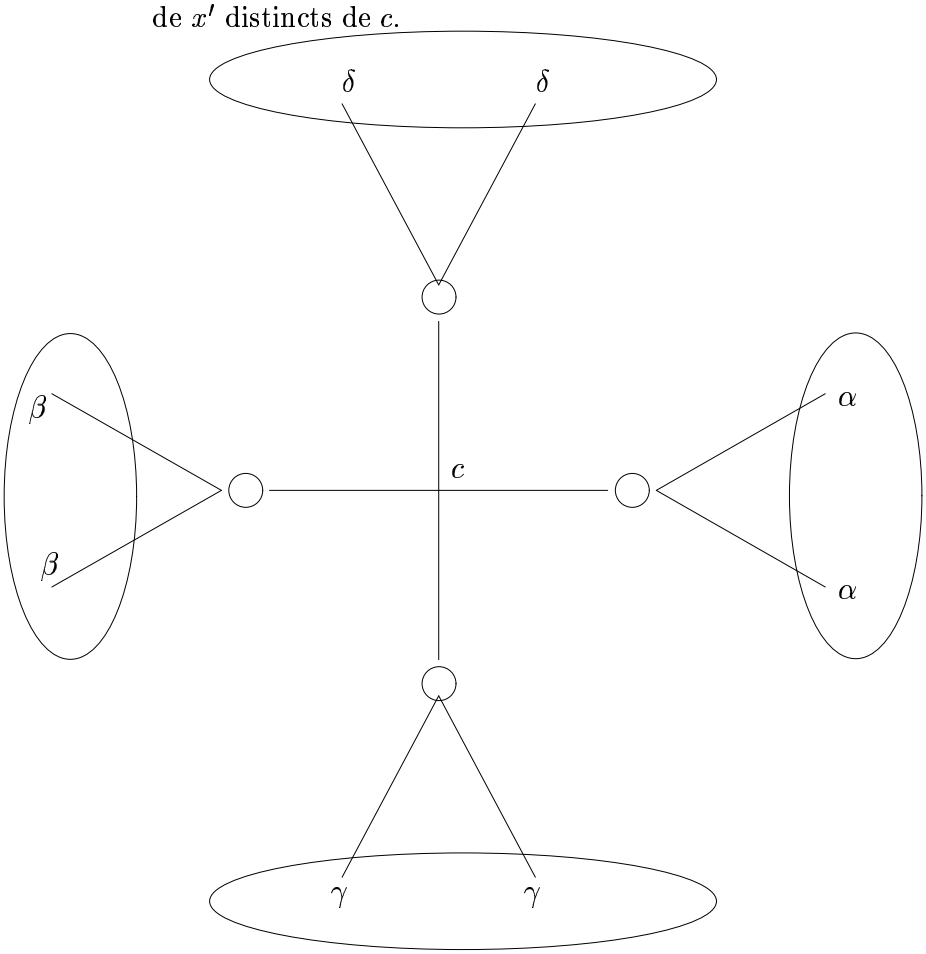
En moyennant f par l'action de ce groupe $G_2(x)$, ce qui est possible d'après l'hypothèse c), et le fait que k n'est pas de caractéristique p, on obtient une fonction f_1, encore à support dans $B(c,2) \cap X$, qui prend la même valeur α en tous les 2-voisins de c qui ne sont pas voisins de x', et des valeurs $\beta_1, \ldots, \beta_{v'-1}$ pas toutes égales en les voisins de x' distincts de c.

On pose alors

$$f_2 = f_1 - (T - \lambda)\alpha \mathbb{1}_c,$$

La fonction f_2 est alors à support dans $B(x', 1) \cap X$. De plus, elle prend les valeurs $\beta_i - \alpha$ aux voisins de x' distincts de c, valeurs qui ne sont pas toutes égales, donc pas toutes nulles. La fonction f_2 est donc non nulle, ainsi que son image dans M_λ, qui appartient par construction à N. Elle répond donc à la question.

2) Soit l'on a, pour tout voisin x' de c, f constante sur l'ensemble des voisins de x' distincts de c.



Dans ce cas, en faisant agir le groupe $G(c)$, on peut raisonner exactement comme dans la preuve de la la proposition 3.6.2. Plus précisément, considérons la fonction sur g sur $B(c, 1)$ (tous les points de $B(c, 1)$ qu'ils soient dans X comme c ou dans X' comme ses voisins) définis par $g(c) = f(c)$, et pour x' voisin de c, $g(x') =$ la valeur commune de f sur les voisins de x' distincts de x. Alors il est clair que si, dans la sous-$G(c)$-représentation

engendrée par g, on obtient une fonction g_1 sur $B(c', 1)$, alors on aura, dans la sous-$G(c)$-représentation engendré par f la fonction f_1 sur $B(c, 2) \cap X$ valant $f_1(c) = g_1(c)$, et pour x' voisin de c, $f_1(x) = g_q(x')$ pour tout $x \neq c$ voisin de x'.

En appliquant la preuve de la proposition 3.6.2, on voit que la représentation enegendré par g contient une fonction g_1 à support dans une paire $\{c, x'\}$ avec x' voisin de c. La fonction f_1 correspondante est une fonction à support dans l'ensemble des voisins de x'.

□

PROPOSITION 4.6.3. *On suppose que $\lambda = v = 0$ dans k, et que pour $x \in X$, l'action de $G(x)$ sur $S(x, 1)$ est une bonne action 2-transitive. Soit N un sous-G-module non nul de M_λ. Alors il existe $\phi \neq 0$, et un relevé f de ϕ dans C tel que*

- *Soit $S(f)$ est inclus dans une boule $B(x', 1)$, pour un $x' \in X'$.*
- *Soit on peut trouver deux points a et b dans X', 2-voisins, tel que f soit l'image par T_1 d'une fonction à support dans $\{a, b'\}$.*

Démonstration — La preuve commence exactement comme celle de la proposition précédente. Si l'on est dans le le cas 1), on n'a pas utilisé l'hypothèse qu'on n'a pas $\lambda = v = 0$, et on peut donc trouver f à support dans une boule $B(x', 1)$.

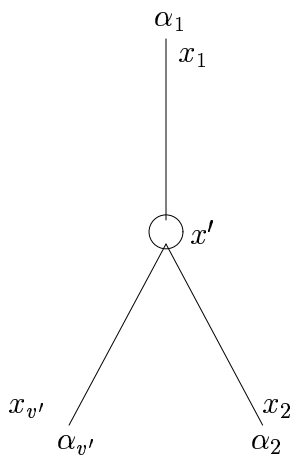
Si l'on est dans le cas 2), on raisonne comme dans la proposition précédente, en associant de la même façon une fonction auxilaire g à f. On peut raisonner alors exactement comme dans la preuve du lemme 3.6.3, et de la remarque qui le suit. On obtient ainsi une fonction dans le $G(c)$-module engendré par g une fonction non nulle g_1 à support dans $\{a, b, c\}$ (a et b voisins de c vérifiant $g_1(c) = g_1(a) + g_1(b)$. La fonction f_1 correspondante prend donc la valeur constante $g_1(a)$ (resp. $g_1(b)$) sur l'ensemble des voisins de b distincts de c, et la valeur $g_1(b) + g_1(a)$ en c. On a donc $f_1 = T_1 g_1(a) \mathbb{1}_a + T_1 g_1(b) \mathbb{1}_b$. □

PROPOSITION 4.6.4. *On suppose qu'on n'a pas $\lambda = v = 0$ dans k. Soit N un sous-G-module non nul de M_λ. Alors on peut trouver $\phi \in N$, non nulle, f relevant ϕ de support un point, sauf peut-être si*

- *$\lambda = -v$ et $\lambda \neq v(v' - 1)$, auquel cas on peut trouver $\phi \in N$, non nulle, f relevant ϕ, f de la forme $T_1 \mathbb{1}_{x'}$ pour un x' dans X'.*
- *$\lambda = v(v' - 1)$, auquel cas on peut trouver $\phi \in N$, non nulle, f relevant ϕ, à support dans une sphère $S(x', 1)$ pour un $x' \in X'$ et de somme nulle.*

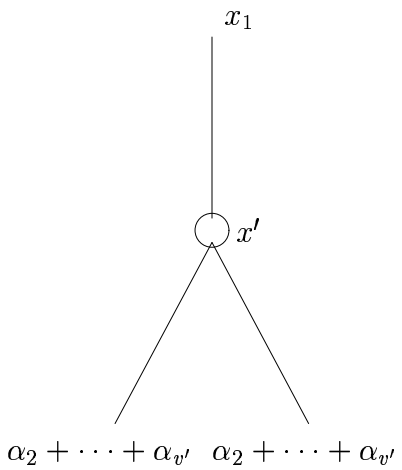
Démonstration — D'après la proposition 4.6.2, on peut partir de $f \in C$, à support dans une boule $B(x', 1) \cap X = S(x', 1)$ pour un $x' \in X'$. d'image dans M_λ appartenant à N et non nulle.

(f)



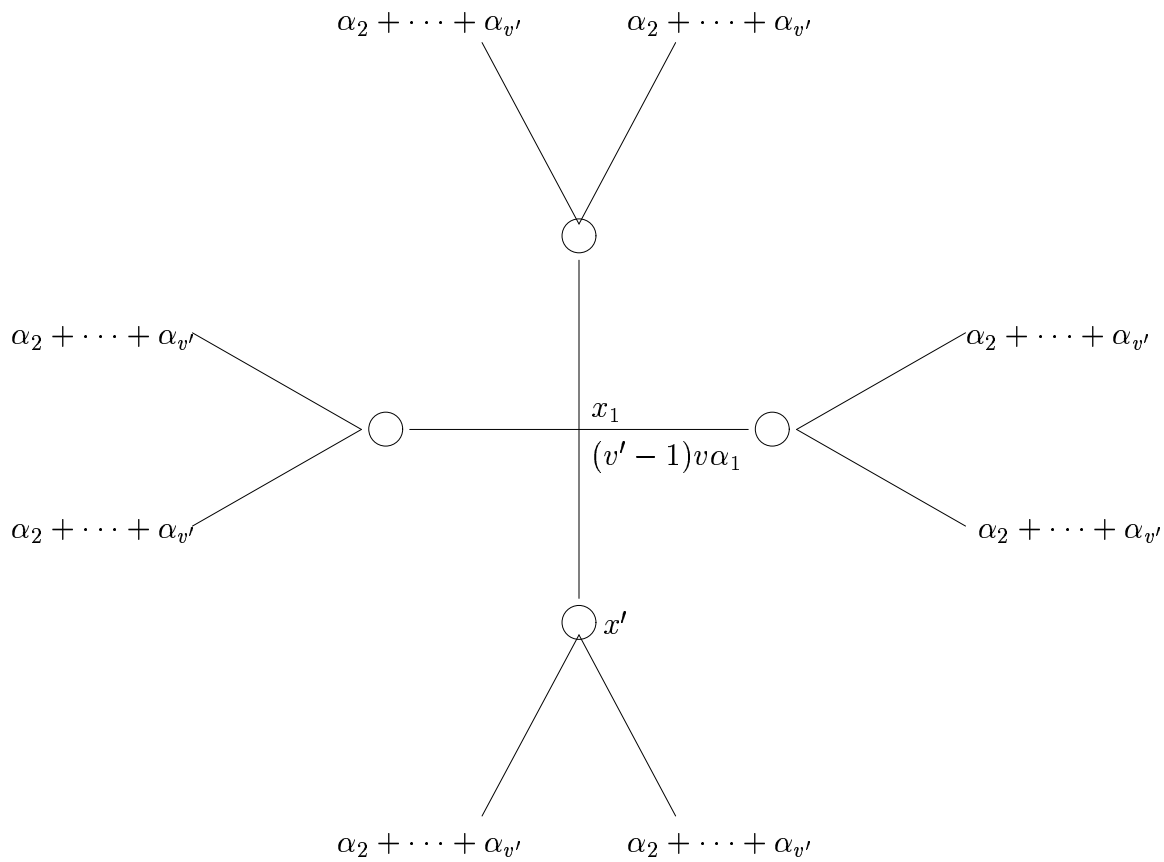
Notons $x_1, \ldots, x_{v'}$ les voisins de x', et α_i les valeurs de f en x_i. En faisant agir le groupe $G(x_1, 1)$, on peut obtenir (hypothèse d)) une fonction f_1, toujours à support dans $S(x', 1)$ valant $(v' - 1)\alpha_1$ en x_1, et la somme $\alpha_2 + \cdots + \alpha_{v'}$ en les x_i, $i \geq 2$.

(f_1)



En faisant alors agir le groupe $G(x_1)$, on obtient une fonction f_2, à support dans $B(x_1, 2) \cap X$, valant $(v' - 1)v\alpha_1$ en x_1, et la somme $\alpha_2 + \cdots + \alpha_{v'}$ sur tous les 2-voisins de x_1.

(f_2)



En posant

$$f_3 = f_2 - (T-\lambda)(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{v'})\mathbb{1}_{x_1},$$

on obtient une fonction f_3, dont l'image dans M_λ est encore dans N, dont le support est inclus dans le singleton $\{x_1\}$, et qui y prend la valeur

$$f_3(x_1) = (v'-1)v\alpha_1 + \lambda(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{v'}).$$

Mais x_1 ne joue aucun rôle particulier parmi les x_i. En reprenant la même construction avec x_i au lieu de x_1, on obtient donc une fonction dont l'image dans M_λ appartient à N, à support inclus dans $\{x_i\}$, et qui y prend la valeur :

$$(v'-1)v\alpha_i + \lambda \sum_{j=1,\ldots,v';\ j\neq i} \alpha_j.$$

Si l'une de ces valeurs est non nulle, la proposition est démontrée. Sinon, c'est qu'on a

$$M\underline{\alpha} = 0, \tag{28}$$

où M est la matrice carrée d'ordre v' :

$$M = \begin{pmatrix} (v'-1)v & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & (v'-1)v & \ldots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \ldots & (v'-1)v & \lambda \\ \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & (v'-1)v) \end{pmatrix},$$

et où $\underline{\alpha}$ est le vecteur colonne de coordonnées α_i. On a

$$M = \lambda E + ((v'-1)v - \lambda)\mathrm{Id}.$$

Si $\lambda = 0$, on a $v \neq 0$ d'après l'hypothèse de cette proposition, et $(v'-1) \neq 0$ d'après l'hypothèse a), d'où $M = (v'-1)v\mathrm{Id} \neq 0$, et dans ce cas, (28) équivaut à $\underline{\alpha} = 0$, ce qui n'est pas.

On peut donc diviser l'équation (28) par λ, et la réécrire

$$(E + (\frac{(v'-1)v}{\lambda} - 1)\mathrm{Id})\underline{\alpha} = 0. \tag{29}$$

Les valeurs propres de E sont 0 (multiplicité $v'-1$, espace propre formé des vecteurs de sommes des coordonnées nulles) et v' (multiplicité 1, espace propre formé des vecteurs dont toutes les coordonnées sont égales). (29) équivaut donc à

- Soit $1 - \frac{(v'-1)v}{\lambda} = 0$, i.e. $\lambda = v(v'-1)$, et on a dans ce cas $\sum_{i=1}^{v'} \alpha_i = 0$.
- Soit $1 - \frac{(v'-1)v}{\lambda}) = v'$, i.e. $\lambda = -v$, et tous les α_i sont égaux. On a donc dans ce cas

$$f = T_1 \alpha_1 \mathbb{1}_{x'}.$$

□

PROPOSITION 4.6.5. *On suppose que pour $x' \in X'$, l'action de $G(x')$ sur $S(x',1)$ est une bonne action 2-transitive en la caractéristique de k. Soit N un sous-module non nul de M_λ, contenant l'image ϕ d'un élément $f \in C$ dont le support est dans une boule $B(x',1)$ pour $x' \in X'$. Alors il existe $f \in C$ non nul, dont l'image dans M_λ appartient à N, et dont le support est inclus dans une paire de points 2-voisins de X.*

Si $v' = 0$ dans k, on peut aussi trouver $f \in C$ non nul, dont l'image dans M_λ appartient à N, et qui soit de la forme $T_1 \mathbb{1}_{x'}$.

Démonstration — Cela résulte immédiatement de la définition d'une bonne action 2-transitive, appliquée à l'action de $G(x')$ sur $S(x',1)$: toute sous-représentation de $k[\Omega]$ contient dans ce cas une fonction à support réduit à deux points, et, si $v' = 0$, le sous-espace $\mathbb{C}$ des fonctions constantes. □

4.7. Structure du module universel. Dans cette sous-partie, on suppose toujours que k est un corps de caractéristique différente de p.

LEMME 4.7.1. *Un sous-G-module de C (RESP. de C') contenant un élément non nul de support un singleton (resp. une paire de points 2-voisins) de X est de codimension au plus 1 (resp. 2) dans C (RESP. dans C').*

Démonstration — Ceci se démontre exactement comme le lemme 3.7.1. □

THÉORÈME 4.7.2. 1) *Si $\lambda \neq -v$ et $\lambda \neq v(v'-1)$ dans k, M_λ est irréductible.*

2) *Si $\lambda = -v \neq v(v'-1)$ dans k, M_λ possède un unique sous-module propre $\pi^s = Im\bar{T}_1 = Ker\bar{T}_0$ (cf. 4.3.3), qui est irréductible, de dimension et codimension infinies. Le quotient $\pi^n := M_\lambda/\pi^s$ est irréductible, isomorphe à $Im\bar{T}_0$, et la suite exacte*

$$0 \to \pi^s \to M_\lambda \to \pi^n \to 0$$

n'est pas scindée.

3) *Si $\lambda = v(v'-1) \neq -v$ dans k, M_λ possède un sous-module propre St, constitué des fonctions dont la somme des valeurs est nulles. Le quotient M/St est de dimension 1, isomorphe au caractère trivial, et la suite exacte*

$$0 \to St \to M_\lambda \to 1 \to 0$$

n'est pas scindée. Si pour $x' \in X'$ l'action de $G(x')$ sur $S(x',1)$ est bonne en la caractéristique de k, St est irréductible.

4) *Si $\lambda = v(v'-1) = -v$, on dispose à la fois du sous-module St des fonctions de sommes nulles, et du sous-module $\pi^s = Ker\bar{T}_0$. Il y a lieu de décomposer ce cas en 3 sous-cas :*

4a) *Si $v = 0$ et $v' \neq 0$ dans k. On a $\pi^s \not\subset St$. Le sous-module $\pi_0^s = St \cap \pi^s$ est de codimension 1 dans π_s. Le quotient $\pi^n = M_\lambda/\pi_s$ est irréductible de dimension infinie, et π^s/π_0^s est le caractère trivial. Le quotient M_λ/π_0^s est scindé : c'est la somme directe de π^n et du caractère trivial.*

De plus, si pour $x \in X$, l'action $G(x)$ sur $S(x,1)$ est bonne en la caractéristique de k, π_0^s est irréductible, et la suite exacte

$$0 \to \pi_0^s \to \pi^s \to 1 \to 0 \tag{30}$$

n'est pas scindée.

4b) *Si $v' = 0$ et $v \neq 0$, on a $\pi^s \subset St$, qui est irréductible de dimension infinie. Si l'on pose encore $\pi^n = M_\lambda/\pi^s$, et maintenant $\pi_0^n = St/\pi^s$, on a $\pi^n/\pi_0^n = 1$, et la suite exacte*

$$0 \to \pi^s \to St \to \pi_0^n \to 0$$

n'est pas scindée.

Si pour $x' \in X'$, l'action $G(x')$ sur $S(x',1)$ est bonne en la caractéristique de k, alors π_0^n est aussi irréductible, et la suite exacte

$$0 \to \pi_0^n \to \pi^n \to 1 \to 0 \tag{31}$$

n'est pas scindée.

4c) *Si $v = v' = 0$, on a encore $\pi^s \subset St$, et on définit $\pi^n = M_\lambda/\pi^s$, $\pi_0^n = St/\pi_s$ comme plus haut.. Par ailleurs π^s possède un hyperplan stable π_0^s (l'image par $\bar{T}_1$ des fonctions de sommes nulles). On a $\pi^s/\pi_0^s = \pi^n/\pi_0^n = 1$, et la décomposition $St/\pi_0^s = \pi_0^n \oplus 1$.*

Si de plus pour $x \in X$ (resp. $x' \in \mathcal{X}$) , l'action $G(x)$ (resp. $G(x')$) sur $S(x,1)$ (resp. $S(x',1)$ est bonne en la caractéristique de k, alors la représentation π_0^s (resp. π_0^n) est irréductible, et la suite exacte

$$0 \to \pi_0^s \to \pi^s \to 1 \to 0$$

$$(\textit{resp. } 0 \to \pi_0^n \to \pi^n \to 1 \to 0\ )$$

n'est pas scindée.

Remarque. Pour tous ces groupes, à l'exception des groupes unitaires non ramifiés à trois variables, on dispose des propriétés, a)-d) et des propriétés de "bonne action 2-transitive" en toute caractéristique, sauf dans certains cas en caractéristique 2. Pour ces groupes, les résultats d'irréductibilité (et sur les suites exactes) énoncés s'appliquent donc toujours, en toute caractéristique $\neq p$ sauf peut-être 2.

Pour les groupes unitaires non ramifiés à trois variables, on a $v = q^3 + 1$, $v' = q+1$, et l'action 2-transitive de $G(x)$ pour $x \in X$ est bonne si la carcactéristique ne divise pas $q+1$, tandis que celle de $G(x')$ pour $x' \in X'$ est toujours bonne, sauf peut-être en caractéristqiue 2. En conséquence, toutes les assertions d'irréductibilité des cas 1), 2), 3) et 4a) s'appliquent (sauf peut-être en caractéristique 2). Dans le cas 4c), les assertions sur π^n (l'irréductibilité de π_0^n, en particulier) s'applique (sauf peut-être en car. 2), mais le théorème n'affirme pas que π_0^s est irréductible.

Démonstration — Dans le cas 1), on évite les cas d'exception des propositions 4.6.1, 4.6.2 et 4.6.4, et l'on sait donc que tout module non nul N de M_λ contient une fonction non nulle de support un point. D'après le lemme précédent, M_λ est irréductible.

Notons que $v(v'-1) = -v$ équivaut à $vv' = 0$. Dans les cas 2) et 3) on est donc assuré que ni v ni v' ne sont nuls.

Dans le cas 2), les mêmes propositions et le lemme précédent impliquent qu'un sous-G-module non nul contient $\pi^s = \operatorname{Im} \bar{T}_1$. D'apres le lemme 4.3.5, on a $\pi^s = \operatorname{Im} \bar{T}_1 = \operatorname{Ker} \bar{T}_0$. On voit donc que π^s est l'unique sous-module irréductible de M_λ. Pour voir que $\pi^n = M_\lambda / I$ est irréductible, on remarque qu'il est isomorphe au sous-module $\operatorname{Im} \bar{T}_0$ de M'_μ (μ relié à λ par 27). Par la symétrie du problème (4.3.6), $\operatorname{Im} \bar{T}_0$ est irréductible (noter qu'on a encore $-v' \neq v(v'-1)$, puisque $vv' \neq 0$ donc on est dans le cas 2) du "théorème symétrique"). L'assertion sur la suite exacte est alors triviale.

Dans le cas 3), la forme linéaire $L =$ "somme des valeurs de la fonctions sur C", passe au quotient M_λ, et définit un sous-module St de M_λ. M_λ / St est isomorphe au caractère trivial puisque L est invariante par G.

Si l'hypothèse supplémentaire est vérifiée, d'après les propositions de réduction, du support 4.6.1, 4.6.2, 4.6.5, tout sous-module de M_λ contient un élément non nul qui a un relevé à support de points voisins. D'après le lemme précédent, il est de codimension au plus 1, et St est donc irréductible.

Dans le cas 4), remarquons d'abord qu'on a $\pi^s \subset St$ si et seulement si $v' = 0$; en effet, la somme des valeurs d'une fonction de la forme $T_1 \mathbb{1}_{x'}$ est v'.

Compte-tenu de cette remarque, seules les assertions d'irréductibilité nécessitent une preuve, ainsi que les non-scindages de suites exactes.

Dans les cas 4a) et 4c), prouvons que π_0^s est irréductible, sous l'hypothèse de bonne 2-transitivité de $G(x)$: si N est un sous-module non nul de $\pi_0^s \subset M_\lambda$, d'après la proposition 4.6.3, on a dans N une fonction ϕ de relevé f non nulle qui est

- soit de support inclus dans une boule $B(x', 1)$ (mais alors, puisque $f = T_1 g$, pour un certain $g \in C'$, on aurait g à support dans $\{x'\}$, ce qui contredirait $f \in \pi_0^s$.)
- Soit $f = T_1 g$, avec g à support dans une paire de points 2-voisins $\{y', z'\}$.

On est donc dans ce deuxième cas. Mais alors l'image inverse de N par $\bar{T}_1$ contient l'image de g dans M'_μ donc d'après le lemme ci-dessus, un hyperplan de M'_μ. Donc N contient un hyperplan de $\operatorname{Im} T_1 = \pi^s$. Ceci prouve que π_0^s ets irréductible, ainsi que la non scindabilité de la suite exacte 30.

Prouvons maintenant l'irréductibilité de π^s dans le cas 4b), Comme $v \neq 0$, la proposition 4.6.2 est applicable, et on peut trouver dans tout sous-module non nul N de π^s une fonction ϕ non nulle de relevé f à support dans $B(x', 1)$. En raisonnant comme ci-dessus, on voit que f est proportionnel à $T_1 \mathbb{1}_{x'}$, d'où $N = \pi^s$.

Les autres assertions s'en déduisent d'après la symétrie du problème.

□

4.8. Compléments : K et B-invariants. On choisit une origine $O \in X$ et on note $K = G(O)$ le stabilisateur de O. On choisit aussi un point voisin $O' \in X'$ de O et on note B la stabilisateur du couple (O, O'). On a donc $B \subset K$.

LEMME 4.8.1. *On suppose que k n'est pas de caractéristique p.*

Tout élément de M_λ fixe par K (resp. par B) a un représentant à support inclus dans $\{O\}$ (resp. à support inclus dans l'ensemble $S(O', 1)$ des voisins de O', et constant sur $S(O', 1) - \{O\}$)

Démonstration —

Tout élément fixe par B ou par K est fixe par $G_2(O)$ donc a un représentant f à support dans $B(O, 2) \cap X$ (cf. 4.5.4).

En fait, un élément fixe par B (ou K) est même fixe par $G_1(0)$, qui est un pro-p-groupe. Comme la caractéristique de k n'est pas p, l'action de $G_1(0)$ est donc une bonne action transitive sur chacun des ensembles de deux voisins de O ayant une projection donnée sur $S(O, 1)$. On en déduit que tout élément fixe par K ou par B a un représentant f qui est constant sur chacun des parties de $S(O, 2)$ ayant une projection donnée sur $S(O, 1)$ comme dans la figure de la page 139. Le lemme se démontre alors exactement comme le lemme 3.7.4

□

PROPOSITION 4.8.2. – *Dans tous les cas, on a* $\dim(M_\lambda)^K = 1$ *et* $\dim(M_\lambda)^B = 2$.

– *Dans tous les cas où* π^n *et* π^s *sont définis (cas 2) et 4) du théorème précédent), on a* $\dim(\pi^s)^K = 0$, $\dim(\pi^s)^B = 1$, $\dim(\pi^n)^K = \dim(\pi^n)^B = 1$.

– *Dans tous les cas où St est définie (cas 3) et 4)) du théorème précédent, on a* $\dim St^K = 0$ *et* $\dim St^B = 1$.

– *Dans tous les cas où* π_0^s *est définie (cas 4a et 4c), on a* $\dim(\pi_0^s)^K = \dim(\pi_0^s)^B = 0$.

Démonstration — Dans la preuve de cette proposition, quand nous parlerons d'une sous-représentation de M_λ, il ira sans dire que nous nous plaçons dans le ou les cas du théorème précédent où elle est définie.

Notons ϕ_O l'image de $\mathbb{1}_O$ dans M_λ et $\psi_{O'}$ l'image de de $T_1\mathbb{1}_{O'}$ dans M_λ. D'après le lemme précédent, ϕ_O (resp. ϕ_O et $\psi_{O'}$) forme (resp. forment) une base de $(M_\lambda)^K$ (resp. M_λ^B).

L'espace St^B est engendré par $\phi_{O'} - v'\mathbb{1}_O$, et est de dimension 1, tandis qu'aucun multiple non nul de $\mathbb{1}_O$ n'est l'image d'une fonction de somme nulle, d'où $St^K = 0$.

Il est clair que $(M_\lambda)^B \cap \operatorname{Im} T_1$ est la droite engendré par $\psi_{O'}$. On a donc bien $\dim(\pi^s)^B = 1$, et $\dim(\pi^s)^K = 0$. Ceci implique à fortiori $\dim(\pi_0^s)^K = 0$. Que vaut $\dim(\pi_0^s)^B$? On a

$$(\pi_0^s)^B = (\pi^s)^B \cap \pi_0^s = (k\psi_{O'}) \cap \pi_0^s.$$

Dans le cas 4a), π_0^s est défini comme les éléments de π_s qui sont de somme nulle : $\psi_{O'}$ est de somme v', supposé non nul dans ce cas. Donc $\dim(\pi_0^s)^B = 0$ dans ce cas. Dans le cas 4c), π_0^s est défini comme l'image par $\bar{T}_1$ des fonctions de somme nulle sur X' ; comme $\psi_{0'} = \bar{T}_1(\mathbb{1}_{O'})$, on voit que $\psi^{O'} \notin \pi_0^s$; là encore, $\dim(\pi_0^s)^B = 0$.

Reste à calculer les invariants de π^n et π_0^n. Pour les B invariants, on utilise l'argument de symétrie suivant : π^n (resp. π_0^n) s'identifie à π'^s (resp. $\pi_0'^s$) via $\bar{T}_0$, ou π'^s (resp. $\pi_0'^s$) est "le π^s" de la situation symétrique. (noter que la symétrie échange les cas 4a) et 4b), et respecte les cas 2) et 4) dans le théorème précédent). Comme le groupe B est symétrique pour la symétrie (4.3.6), on déduit du paragraphe précédent : $\dim(\pi^s)^B = 1$, $\dim(\pi_0^s)^B = 0$. Comme il y a moins de K-invariants que de B-invariants, on a *a fortiori* $\dim(\pi_0^s)^K = 0$, mais comme on sait qu'il y a un K-invariant dans π^s (à savoir l'image de ϕ_O, qui est non nulle), on voit que $\dim(\pi^s)^K = 0$. □

5. Module universel et algèbre de Hecke

5.1. Groupes $\mathfrak{P}$-adiques.

5.1.1. Soit F un corps p-adique, de cardinal résiduel q.

Soit G' un groupe réductif (connexe quasi-simple) sur F, Z son centre. On fait l'hypothèse que le groupe algébrique G'/Z est **de rang un**. On pose $G = G'(F)/Z(F)$. (On remarque, par exemple en prenant $G' = \mathrm{SL}_2$, que l'inclusion $G \subset (G'/Z)(F)$ n'est pas nécéssairement une égalité.)

Alors l'immeuble de Bruhat-Tits associé à G'/Z est un arbre, qu'on note $\mathcal{X}$. Il est muni naturellement d'une action de $(G'/Z)(F)$ donc de G.

5.1.2. Soit K' un compact maximal spécial, i.e. un compact maximal qui est le stabilisateur d'un point spécial de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{X}$. Comme dans un arbre, tous les points sont spéciaux, ceci équivaut simplement à demander que K' soit le stabilisateur d'un point de l'arbre.

5.1.3. On pose $K = K'/(K \cap Z)$. C'est le stabilisateur dans G du même point de l'arbre, et c'est un compact maximal de G.

5.1.4. On vérifie facilement, à l'aide des tables de Tits (cf. [**T**]) que tous les triplets $(G, K, \mathcal{X})$ obtenus ainsi apparaissent comme exemple dans les numéros 3.2, 4.2. Cette vérification est d'ailleurs faite dans [**CH**].

5.2. Algèbre de Hecke.

5.2.1. Soit k un anneau. On note $\mathcal{H}_k^0(G', K')$ l'algèbre de Hecke (avec caractère central trivial) des fonctions bi-$K'(F)$-invariantes à support compact sur $G'(F)$, à valeurs dans k, et invariantes par le centre.

Si l'on demandait que les fonctions soient covariantes selon un certain caractère non ramifiée sous l'action du centre, on obtiendrait une algèbre de Hecke avec caractère central, qu'on pourrait ramener au cas précédent par torsion. Si l'on ne supposait rien sur l'action du centre, on pourrait décomposer l'algèbre de Hecke en termes d'algèbre de Hecke avec caractères centraux.

Nous nous limiterons donc toujours au cas de l'algèbre de Hecke avec caractère central trivial $\mathcal{H}^0$.

5.2.2. On a l'égalité

$$\mathcal{H}_k^0(G', K') = \mathcal{H}_k(G, K),$$

cette dernière algèbre étant celle des fonctions bi=K-invariantes à support compact dans G, la multiplication étant défini comme dans Lazarus.

Dans ce numéro, nous allons déterminer la structure de $\mathcal{H}_k(G, K)$.en utilisant une description en terme de l'arbre $\mathcal{X}$, qui est soit homogène (auquel cas on a $X = \mathcal{X}$) soit bi-homogène (auquel cas X est l'une des orbites sous G de $\mathcal{X}$)

(Le lecteur attentif remarquera que dans cette partie très formelle, on n'utilisera que les hypothèses b) et d) de 3.1 (resp. 4.1), mais jamais les hypothèses a) et c). Les résultats sur la structure de $\mathcal{H}_k(G, k)$ seront donc valables non seulement pour les (G, K) associés à un groupes réductif de rang un comme ci-dessus, mais aussi

à d'autres cas, par exemple ceux où G est tout le groupe d'automorphismes de l'arbre.)

5.2.3. Rappelons (*loc. cit.* page 24) que si V est une k-représentation (à droite) de G, l'algèbre $\mathcal{H}_k(G,K)$ agit naturellement sur le module des invariants V^K.

En particulier, si V est l'espace des fonctions (localement constantes à support compact) sur G, $\mathcal{H}$ agit naturellement sur V^K. Mais comme on a une bijection naturelle ($gK \mapsto gO$) de G/K sur X (hypothèse b)), ce dernier module s'identifie à l'espace C des fonctions à support fini sur X.

5.2.4. L'application k-linéaire $\mathcal{H} \to C$, $f \mapsto f\mathbb{1}_O$ identifie $\mathcal{H}$ au sous-espace C^K des fonctions à support fini sur X qui sont K-invariantes à gauche.

LEMME 5.2.5. *Les orbites de $\mathcal{X}$ sous K sont exactement les sphères $S(O,n)$*

Démonstration — Il est évident que les sphères $S(O,n)$ sont laissées stables par K. Montrons par récurrence que K agit transitivement sur $S(0,n)$. Pour $n=1$, c'est l'hypothèse d) (appliqué en $n=0$). Supposons que K agisse transitivement sur $S(0,n)$, et soit x et y deux éléments de $S(O,n+1)$, x' et y' leur projeté sur $S(O,n)$. Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in K$ tel que $kx' = y'$. Les projetés de kx et de y sur $S(O,n)$ sont donc identiques, et donc, par l'hypothèse d), il existe $k' \in K$ tel que $k'kx = y$. □

5.2.6. L'identification précédente permet donc de voir $\mathcal{H}$ comme le k-module des fonctions sur X qui sont à support fini et constantes sur les sphères de centre O. Notons $\mathbb{1}_i$ la fonctions qui vaut 1 en tout point de $S(O,i)$ (dans le cas d'un arbre homogène - $S(0,2i)$ dans le cas bihomogène) et 0 ailleurs. Alors

$$\mathcal{H} \simeq \oplus_{i=0}^{\infty} k\mathbb{1}_i.$$

5.2.7. Il est clair que l'action de $\mathbb{1}_1$ sur C est celle de l'opérateur T. On voit en particulier que dans l'algèbre de Hecke,

$$\mathbb{1}_1^n = \mathbb{1}_n + \text{ termes en } \mathbb{1}_i,\ i<n.$$

Il en résulte que $\mathcal{H}$ est engendré comme k-module par les éléments indépendants $\mathbb{1}_1^n$. En résumé, on a donc montré :

PROPOSITION 5.2.8. *L'algèbre $\mathcal{H}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes à une variable $k[\mathbb{1}_1]$. Le générateur $\mathbb{1}_1$ agit sur C comme l'opérateur T.*

5.3. Module universel.

5.3.1. Il résulte de la proposition précédente qu'un caractère χ de $\mathcal{H}_k(G,K)$ à valeurs dans k est déterminé par sa valeur $\lambda = \chi(T) \in k$), et qu'inversement tout $\lambda \in k$ provient d'un unique caractère χ.

5.3.2. Dans les parties 2, et 3, nous avions définis le module universel M_λ comme le quotient $C/(T-\lambda)C$. Vérifions que cette définition donne bien la même représentation que celle donnée dans l'introduction :

PROPOSITION 5.3.3. *Si χ correspond à λ, on a un isomorphisme de G-représentations :*

$$M_\lambda \simeq \mathcal{C}(G/K) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K)} k,$$

où k est vu comme module sur $\mathcal{H}$ via χ.

Démonstration — La proposition s'obtient en tensorisant par $C = \mathcal{C}(G/K)$ la suite exacte de $\mathcal{H}$-module :

$$0 \to (T-\lambda)\mathcal{H} \to \mathcal{H} \to k \to 0.$$

□

5.3.4. Ceci justifie les assertions de l'introduction sur nos résultats répondant aux questions 1 et 2. Puisque les cas considérés dans les parties 3 et 4 contiennent tous ceux des groupes de rang un, et puisque le module universel avec lequel on travaillait est le bon, les résultats de platitude des parties 3 et 4 répondent à la question 1), tandis que les théorèmes de ces parties répondent à la question 2).

5.3.5. *Propriété universelle du module universel.* C'est la propriété suivante (là encore, on a seulement besoin de supposer que $(G, \mathcal{X})$ vérifie b) et d)). On note 1_K l'image de la fonction $\mathbb{1}_O$ dans M_λ,

PROPOSITION 5.3.6. *Soit k un anneau. Le couple $(M_\lambda, 1_K)$ est l'objet initial de la catégorie des couples (V, e), où V est une représentation lisse de G, et où e est un vecteur de V invariant par K et sur lequel l'opérateur $T \in \mathcal{H}_k(G,K)$ agit par la multiplication par λ.*

Démonstration — [**LAZ1**], 6.1 □

REMARQUE. La catégorie introduite est égale à celle des représentations de G' de caractère central trivial, ayant un vecteur fixe par K', et une action du générateur de $\mathcal{H}_k(G', K') = \mathcal{H}_k(G, K)$ sur ce vecteur égale à la multiplication par λ. On pourrait considérer la même catégorie en fixant un caractère central quelconque. Cette catégorie aurait aussi un objet initial, qui se déduirait du module universel par twist.

COROLLAIRE 5.3.7. *Soit k un corps de caractéristique différente de p, et $\lambda \in k$. Alors M_λ est indécomposable.*

Démonstration — D'après les lemmes 3.7.4, 4.8.1, on a $M_\lambda^K = k1_K$. D'après la proposition précédente on en tire $\mathrm{Hom}_G(M_\lambda, M_\lambda) = k$. Le corollaire en découle. □

Ce résultat s'applique donc à tous les groupes p-adiques de rang 1, sans hypothèses de banalité de la caractéristique (comparer avec [**LAZ1**], proposition 6.2.2). Notons par ailleurs que dans tous les cas où les théorèmes des parties précédentes donnent la structure complète du module universel (i.e. pour les groupes p-adiques de rang un, dans tous les cas sauf parfois en caractéristique 2, et en caractéristique divisant $q+1$ pour les groupes unitaires non ramifiés), ce corollaire s'en déduit facilement.

5.4. La conjecture de Lazarus en rang un.

5.4.1. On suppose maintenant que p est inversible dans l'anneau k. Rappelons qu'on a défini $M_\lambda(k)$ sur n'importe quel anneau k, pour $\lambda \in k$. Maintenant que l'on sait que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_k(G,K)$ est un anneau commutatif, on peut considérer le module $M_\lambda(\mathcal{H})$ pour tout $\lambda \in \mathcal{H}$. En particulier :

LEMME 5.4.2. *Si $\lambda = \mathbb{1}_1 = T \in \mathcal{H}$, $M_\lambda(\mathcal{H})$ s'identifie comme module sur $\mathcal{H}$ à l'espace C des fonctions (à support fini) sur $X = G/K$ à valeurs dans k.*

Démonstration — C'est quasiment tautologique; donnons-en quand-même une démonstration terre à terre.

Le k-module $C_{\mathcal{H}}$ des fonctions à support fini sur X à valeurs dans $\mathcal{H}$, est muni de deux opérateurs : d'une part, l'action scalaire du générateur $\mathbb{1}_1$ de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_k$. D'autre part l'action du générateur T de $\mathcal{H}_{\mathcal{H}}$, algèbre qui agit à droite (mais peu importe, puisqu'elle est commutative) sur $C_{\mathcal{H}}$.

Définissons une application k-linéaire $s : C_{\mathcal{H}} \to C_k$. Par additivité, il suffit clairement de définir l'image d'une fonction f de $C_{\mathcal{H}}$ dont le support est réduit à un point, disons x. Une telle fonction est définie par sa valeur en x, qui est un élément de $\mathcal{H}_k$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1\mathbb{1}_1 + a_2\mathbb{1}_1^2 + \dots.$$

On pose

$$s(f) = a_0\mathbb{1}_x + a_1T(\mathbb{1}_x) + a_2T^2(\mathbb{1}_x) + \dots,$$

qui est bien un élément de C_k.

Cette application s est trivialement surjective (tous les $\mathbb{1}_x$ sont dans son image). Nous savons qu'elle est k-linéaire. Munissons le but C_k d'une structure de $\mathcal{H}_k$-module, en faisant agir le générateur $\mathbb{1}_1$ de $\mathcal{H}_k$ comme T. Alors on voit que s est $\mathcal{H}_k$-linéaire : il suffit de vérifier, avec f comme plus haut, que $\mathbb{1}_1 f$, qui est de support $\{x\}$ et y prend la valeur $a_0\mathbb{1}_1 + a_1\mathbb{1}_2 + \dots$, a pour image

$$s(\mathbb{1}_1 f) = a_0T\mathbb{1}_x + a_1T^2\mathbb{1}_x + \dots = T(a_0\mathbb{1}_x + a_1T\mathbb{1}_x + \dots) = Ts(f) = \mathbb{1}_1 s(f).$$

Par ailleurs il est clair que s commute à l'action de T.

Dans le noyau $\operatorname{Ker} s$ de s on trouve donc tous les éléments de la forme $(T-\mathbb{1}_1)f$, puisque

$$s((T-\mathbb{1}_1)f) = s(Tf) - s(\mathbb{1}_1 f) = Ts(f) - \mathbb{1}_1 s(f) = Tf - Tf = 0.$$

L'application s se factorise donc par une appliocation $\bar{s} : M_{1_1}(\mathcal{H}) \to C_k$, qui est un isomorphisme de $\mathcal{H}$-module pour les structures de modules considérées.

Pour montrer que $\bar{s}$ est un isomorphisme de modules, il suffit donc de prouver que c'est une bijection. Nous savons déja que s est surjective, mais au lieu de prouver directement l'injectivité, nous allons construire un inverse $\bar{r} : C_k \to M_{1_1}(\mathcal{H})$.

Pour $f \in C_k$ on pose tout simplement $r(f) = f$ vu comme fonction à valeur dans $\mathcal{H}$ via l'injection $k \hookrightarrow \mathcal{H}_k$. Et on définit $\bar{r}$ en composant r avec la projection canonique $C_{\mathcal{H}} \to M_{1_1}(\mathcal{H})$. Les applications r et $\bar{r}$ sont k-linéaires.

Comme on a $s \circ r = \mathrm{Id}_{C_k}$, on a aussi $\bar{s} \circ \bar{r} = \mathrm{Id}_{C_K}$. Soit $f \in C_{\mathcal{H}}$, nous allons voir que

$$r \circ s(f) - f \in \operatorname{Im}(T - \mathbb{1}_1).$$

Par k linéarité, il suffit de le voir pour f de la forme suivante : f est à support un point x et $f(x) = \mathbb{1}_1^n$. On a alors $r(s(f)) = T^n \mathbb{1}_x$ et

$$r(s(f)) - f = T^n \mathbb{1}_x - \mathbb{1}_1^n \mathbb{1}_x = (T-\mathbb{1}_1)(T^{n-1} + T^{n-2}\mathbb{1}_1 + \cdots + \mathbb{1}_1^{n-1})\mathbb{1}_x \in \operatorname{Im}(T-\mathbb{1}_1).$$

On a donc $\bar{r} \circ \bar{s} = \mathrm{Id}_{M_{\mathbb{1}_1}(\mathcal{H})}$, et $\bar{s}$ est donc un isomorphisme. □

PROPOSITION 5.4.3. *Le module C est plat sur $\mathcal{H}$. Les sous-modules C^{K_n} (où K_n est le stabilisateur $G_n(O)$ de la boule de centre O et de rayon n) sont libres de rang fini sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration — Vu le lemme précédent, c'est simplement une redite du corollaire 3.5.3 (resp. 4.5.3) et de la proposition 3.5.4 (resp. 4.5.4) □

5.4.4. Lazarus conjecture (cf. [**LAZ1**], conjecture 1.0.5, page 11, et notre note de la page 108) que pour un groupe réductif p-adique non ramifié G, pour K un compact maximal hyperspécial, et pour k un corps de caractéristique différente de p, on a C^{K_n} plat sur $\mathcal{H}$ si, et seulement si, pour tout caractère non ramifié χ d'un tore maximal déployé M, le stabilisateur de χ dans le groupe de Weyl est un bon groupe de réflexions (cf. [**LAZ1**], page 79)

5.4.5. Dans le cas où G est de rang un, la condition sur les caractères est toujours vérifiée, et la conjecture se réduit à la platitude de C sur $\mathcal{H}$.

5.4.6. La proposition précédente démontre donc la conjecture de Lazarus pour les groupes de rang un, et même un peu plus, puisqu'elle vaut sur un anneau où p est inversible, et pas seulement sur un corps, et sans hypothèse de non ramification pour G, ni d'hyperspécialité pour K.

Ceci suggère d'ailleurs d'étendre la conjecture à tous les couples (G, K) où G est un groupe p-adique, K un compact maximal *spécial*.

6. Module universel et série principale non ramifiée

6.1. Transformation de Satake.

6.1.1. *Notation sur les groupes $\mathfrak{P}$-adiques.* Comme K' est spécial, G' admet une décomposition d'Iwasawa

$$G = K'P$$

avec P un F-parabolique minimal de K ([**T**], 3.3)

Soit A un tore déployé maximal de P, M le centralisateur de A, et W le groupe de Weyl de (G', A).

Posons $M_0 = M \cap K$, et $\Lambda = (M/M_0Z)$. Puisque $G = G'/Z$ est de rang un, on a $\Lambda = \mathbb{Z}$. Fixons un générateur Π de Λ.

6.1.2. *Isomorphsime de Satake.* Soit k un anneau dans lequel p est inversible et où l'on s'est donné une racine carré de q. Alors il existe un isomorphisme naturel de k-algèbre ([**LAZ1**], 3.2), dite *transformation de Satake*

$$S : \mathcal{H}_k(G, K) = \mathcal{H}_k^0(G', K') \to k[\Lambda]^W.$$

Notons que la plupart des références modernes ([**CA**], [**LAZ1**], ou bien Rapoport, A positivity property of the Satake isomorphism. Manuscripta Math. 101 (2000), no. 2, 153–166.), ne citent ou ne démontrent ce résultat qu'avec des hypothèses supplémentaires : G' non ramifié, K hyperspécial. Pour trouver l'énoncé général (G' quelconque, K' bon compact maximal - rappelons qu'un compact maximal spécial est bon), voir [**KA**] ou [**Sat**] ; pour une démonstration si $k = \mathbb{C}$, voir ce dernier, qui remarque en passant que la preuve doit marcher pour k un anneau comme ci-dessus. Cette remarque est développée en une preuve claire et détaillée dans [**LAZ1**], partie 3.2.

Notons aussi que ce résultat implique que $\mathcal{H}_k(G, K)$ est isomorphe à $k[X]$, résultat que nous avions retrouvé très facilement dans un cadre légèrement plus général (en particulier sans supposer p inversible) à la proposition 5.2.8

6.1.3. *Caractères.* Par caractère d'une k-algèbre A nous entendons les morphismes de k-algèbre de A vers k. On note $X(A)$ l'ensemble des caractères de A.

Par caractère d'un groupe nous entendons un morphisme de ce groupe vers k^*. Un caractère de M sera dit *non ramifié* s'il est trivial sur M_0. On note $X_{nr}(M, k)$ le groupe des caractères non ramifiés, et triviaux sur le centre $Z \subset M$ (là encore, on laisse au lecteur le soin de vérifier que rien dessentiel n'est changé si l'on demande que la restriction du caractère de M à Z soit un caractère central fixé).

Un caractère non ramifié (et trivial sur Z) de M n'est donc rien d'autre qu'un caractère de Λ. Un tel caractère s'identifie à un caractère (d'algèbre) de $k[\Lambda]$. On en déduit (cf. [**LAZ1**], 3.2 pour des détails et des compléments) que S induit une surjection :

$$X_{nr}(M, k) \to X(\mathcal{H}_k(G, K)),$$

notée

$$\chi \mapsto \lambda_\chi,$$

qui induit une bijection

$$X_{nr}(M,k)/W \simeq (\mathcal{H}_k(G,K)).$$

Rappelons enfin qu'un élément $\chi \in X(\mathcal{H}_k(G,K))$ est déterminé par sa valeur $\lambda = \chi(T)$ en T qui est n'importe quel élément de k, d'où un isomorphsime

$$X(\mathcal{H}_k(G,K)) \simeq k,$$

et aussi qu'un élément de $X_{nr}(M,k)$ est déterminé par sa valeur en π, d'où un isomorphisme $X_{nr}(M,k) \simeq k^*$.

6.2. Séries principales modulaires.

6.2.1. Soit k un anneau comme ci dessus, i.e. dans lequel p est inversible et où l'on s'est donné une racine carrée de q.

Pour $\chi \in X_{nr}(M,k)$, on définit la série principale associée à χ, noté $I_{\chi,k}$ comme dans [**LAZ1**], définition 4.11. C'est une représentation de G' qui a un caractère central trivial, et qui peut donc être vue comme une représentation de G.

6.2.2. Les représentations $I_{\chi,k}$ les propriétés suivantes :

- Le module $I_{\chi,k}$ est plat sur k, et pour k' extension de k, on a $I_{\chi,k'} = I_{\chi,k} \otimes_k k'$. (évident).
- Pour U sous-groupe compact ouvert de G, le k-module $I^U_{\chi,k}$ est libre de rang fini $|P \cap K/K \backslash U \cap K|$. (cf. [**LAZ1**], page 37)
- En particulier, pour $U = K$, on voit que $I^K_{\chi,k}$ est libre de rang un. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G,K)$ agit sur cette droite par le caractère λ_χ (cf. [**LAZ1**], proposition 1.4.2)
- Si k est un corps de caractéristique nulle, pour χ générique dans $\mathcal{X}_{nr}(M,k)$, $I_{\chi,k}$ est irréductible ([**KA**] ou [**LAZ1**], théorème 4.4.1, quand $k = \mathbb{C}$, et [**LAZ1**], lemme 4.4.2 quand k est de caractéristique banale). Précisons que l'hypothèse "pour χ générique" est à comprendre ainsi : "pour χ en dehors d'un ensemble fini".

6.2.3. Supposons maintenant que k est un corps. Alors dans la droite $I^K_{\chi,k}$ il existe un vecteur et un seul qui prenne la valeur 1 sur l'élément neutre de G. On le note 1_χ (cf. [**LAZ1**], page 37). Posons $\lambda = \lambda_\chi(T)$.

D'après la propriété universelle de M_λ, on dispose d'un unique morphisme de représentations

$$\phi_\chi : M_\lambda \to I_\chi$$

qui envoie $\bar{1}_K$ sur 1_χ. On note $\phi_{\chi,k}$ pour ϕ_χ quand on veut rappeler le corps de base k.

LEMME 6.2.4. *Soit k de caractéristique nulle. Pour tout $\chi \in X_{nr}(M,k)$, sauf peut-être un nombre fini, $\phi_{\chi,k}$ est un isomorphisme.*

Démonstration — Comme ϕ_χ est non nul, ce sera un isomorphisme si la source et le but sont des représentations irréductibles. Or nous avons vu que génériquement (ce qui signifie ici, en rang 1, pour tout χ sauf un nombre fini), I_χ était irréductible. Les théorèmes sur la structures de M_λ démontrés ci-dessus impliquent de leur côté que pour tout $\lambda \in k$ sauf un nombre fini, M_λ est irréductible. Comme pour chaque λ, il n'y a qu'un nombre fini de χ qui vérifie $\lambda_\chi(T) = \lambda$, on voit que pour tout χ sauf un nombre fini, M_λ est irréductible. □

REMARQUE. Si σ est un automorphisme de k, on voit par transport de structure que ϕ_χ est un isomorphisme si et seulement si ϕ_{χ^σ} l'est aussi. Le lemme précédent permet donc d'affirmer que si ϕ_χ n'est pas un isomorphisme, l'orbite de χ sous le groupe des automorphismes de k est finie, donc $\chi(\Pi)$ est fini sur le sous-corps premier de k.

THÉORÈME 6.2.5. *Soit k un corps de caractéristique différente de p (et où l'on a choisi une racine de q). Soit $\chi \in X_{nr}(M,k)$, λ associé à χ (par $\lambda = \lambda_\chi(T)$). Alors les représentations $M_{\lambda,k}$ et $I_{\chi,k}$ ont mêmes facteurs de composition (avec les mêmes multiplicités).*

Démonstration — (Comparer avec [**S2**], [**LAZ1**],[**DA2**].)

Notons d'abord que si k' est une extension de k, $\chi \in X_{nr}(M,k) \subset X_{nr}(M,k')$, $\lambda \in k \subset k'$ associé à χ, Alors le résultat pour $M_{\lambda,k}$ et $I_{\chi,k}$ impliquent trivialement le résultat pour $M_{\lambda,k'}$ et $I_{\chi,k'}$. En utilisant cela, on voit facilement qu'on peut supposer que k est fini sur son sous-corps premier, ce qu'on fait désormais.

Si k est de caractéristique non nulle, posons $R = W(k)$ et L le corps de fractions de R. Choisissons un caractère $\tilde{\chi}$ de $X_{nr}(M,R)$ de M_λ, relevant χ, et tel que $\phi_{\tilde{\chi},L}$ soit un isomorphisme; c'est possible d'après le lemme précédent.

Si k est de caractéristique nulle, on pose $R = k[[X]]$, $L = k((X))$, et on définit un caractère $\tilde{\chi}$ de $X_{nr}(M.R)$ par $\tilde{\chi}(\pi) = X + \chi(\Pi)$. Ainsi le caractère $\tilde{\chi}$ relève χ et d'après la remarque précédente, $\phi_{\tilde{\chi},L}$ est un isomorphisme.

Dans les deux cas, si $\tilde{\lambda} = \lambda_\chi(T)$, on dispose de deux G-modules sur l'anneau de valuation discrète R, $M_{\tilde{\lambda},R}$ et $I_{\tilde{\chi},R}$, qui se réduisent respectivement en $M_{\lambda,k}$ et $I_{\chi,k}$ sur le corps résiduel k, et deviennent isomorphes sur le corps des fractions L de R. De plus, $M_{\tilde{\lambda},R}$ et $I_{\tilde{\chi},R}$ sont des réseaux de $M_{\tilde{\lambda},L} \simeq I_{\tilde{\chi},L}$ au sens de Vigneras (d'après, respectivement, les lemmes 3.5.4 et 4.5.4, et le paragraphe 6.2.2).

Le théorème résulte donc du principe de Brauer-Nesbitt ([**V1**], 9.6) □

7. Compléments sur l'algèbre de Hecke-Iwahori

Dans ce numéro, nous retrouvons à l'aide de l'arbre des résultats (bien connus en caractéristique nulle) sur la structure de l'algèbre de Hecke-Iwahori.

7.1. Définitions.

7.1.1. On reprend les notations de 5.2, et comme précédemment, K désigne la stabilisateur dans G d'un point fixé $O \in X$, et B désigne le stabilisateur d'une arête (O, O'), où O' est un voisin de O dans $\mathcal{X}$.

7.1.2. Si v désigne comme ci-dessus le nombre de voisins de O, on a clairement

$$v = [K : B].$$

7.1.3. On définit la k-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_k(G, B)$ des fonctions bi-B-invariantes sur G, à support compact, comme dans [**LAZ1**].

Si V est une représentation à droite (resp. à gauche) de G, $\mathcal{H}(G, B)$ agit naturellement à droite (resp. à gauche, enfin, du même côté) sur l'espace des B-invariants V^B. En particulier, $\mathcal{H}(G, B)$ agit a droite sur l'espace $\mathcal{C}(G/B)$ des fonctions sur G à valeurs dans k, qui sont B-invariantes à droites à support compact. L'application $\mathcal{H}(G, B) \to \mathcal{C}(G/B)$ donné par

$$f \mapsto f \bullet 1_B$$

est l'injection canonique des fonctions bi-B-invariantes (à support compact) dans les fonctions B-invariantes à droite (à support compact). On a noté 1_B la fonction caractéristique de B, qui n'est autre que l'élément neutre de $\mathcal{H}(G, B)$.

LEMME 7.1.4. *Soit $g \in G$. L'indice $[K : g^{-1}Kg \cap K]$ (resp. $[B : g^{-1}Bg \cap B]$ est égal au nombre de classes à gauche (ou à droite) sous K (resp. sous B) intervenant dans la décomposition de KgK (resp. BgB).*

Le nombre

$$\frac{[B : g^{-1}Bg \cap B]}{[K : g^{-1}Kg \cap K]}$$

appartient à $\mathbb{Z}[1/pv]$. On le note $n(g, B, K)$.

Démonstration — La première assertion résulte de la proposition 3.1 de [**Shim**]. Pour prouver la deuxième, il suffit de montrer que $1/[K : g^{-1}Kg \cap K]$ appartient à $\mathbb{Z}[1/(pv)]$. Mais en utilisant la première assertion, et le lemme 5.2.5, on voit que $[K : g^{-1}Kg \cap K]$ est le cardinal d'une sphère $S(O, n)$, si $n = d(O, g(O))$. Or une telle sphère a pour cardinal $v(v-1)^{n-1}$ dans le cas homogène, $v(v'-1)(v-1)(v'-1)(v-1)\dots$ (nombre de facteurs égal à n) dans le cas non homogène, et l'on sait (hypothèse a)) que $v-1$ et $v'-1$ sont des puissances de p. □

7.1.5. Lorsque p et v sont tous deux inversibles dans k, on définit une application k-linéaire π de la manière suivante :

$$\pi : \mathcal{H}_k(G, B) \to \mathcal{H}_k(G, K) \tag{32}$$

$$1_{BgB} \to \frac{[K : g^{-1}Kg \cap K]}{[B : g^{-1}Bg \cap B]} 1_{KgK} \tag{33}$$

REMARQUE. Supposer que p et v sont inversibles dans k n'implique pas que toutes les caractéristiques non banales pour K (ou pour G) sont inversibles pour K, ni même que toutes les caractéristiques non banales pour B le sont (cf. [**LAZ1**], 2.3, pour la définition des caractéristiques non banales).

Par exemple pour $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$, les caractéristiques non banales sont celles divisant $p(p+1)(p-1)$. Les caractéristiques non banales pour B sont celles divisant $(p-1)$. Or supposer que $pv = p(p+1)$ est inversible n'implique rien sur l'inversibilité de $p-1$.

Pour $G = \mathrm{PU}(3)(\mathbb{Q}_p)$, les caractéristiques non banales sont celles divisant $p(p^3+1)(p-1)$. Celles qui sont non banales pour B sont celles qui divisent $p(p-1)$. Là encore supposer que $pv = p(p^3+1)$ est inversible n'implique rien sur $p-1$.

7.1.6. Pour comprendre la définition précédente, plaçons-nous en caractéristique banale. On sait alors ([**LAZ1**]) qu'on peut définir une mesure de Haar $d_B u$ (resp. $d_K u$) sur G normalisée par la formule

$$\int_B d_B u = 1 \text{ (resp. } \int_K d_K u = 1 \text{)}$$

On a $d_B u = v d_K u$. La multiplication dans les algèbres de Hecke $\mathcal{H}(G,B)$ et $\mathcal{H}(G,K)$ est alors donnée par le produit de convolution par rapport à la mesure d_B (resp. d_K).

On vérifie facilement que $e_K = 1_K/v$ est un idempotent de $\mathcal{H}(G,B)$, et que l'application $\pi_0 : f \mapsto e_K * f * e_K$ est un projecteur sur le sous-espace $\mathcal{H}(G,K)$ des fonctions bi-K-invariantes dans $\mathcal{H}(G,B)$. On calcule facilement :

$$\pi_0(1_{BgB}) = \frac{1}{v}\frac{\int_{g^{-1}Kg\cap K} 1 d_K u}{\int_{g^{-1}Bg\cap B} 1 d_B u} 1_{KgK}.$$

Si f et f' appartiennent à $\mathcal{H}(G,B)$ et que l'une au moins de ces deux fonctions appartient au centre $\mathcal{Z}$, on a trivialement

$$\pi_0(f * f') = \pi_0(f) * \pi_0(f'),$$

où $*$ désigne la convolution par rapport à d_B, i.e la multiplication dans $\mathcal{H}_K(G,B)$. On a donc

$$\pi_0(f * f') = v\pi_0(f) *_K \pi_0(f'),$$

où $*_K$ désigne la convolution par rapport à d_K, i.e. la multiplication dans $\mathcal{H}_k(G,K)$.

Si l'on pose $\pi = v\pi_0$, on voit qu'on a définit une application $\mathcal{H}(G,B) \to \mathcal{H}(G,K)$, identique à celle définit plus haut, et qui vérifie $\pi(ff') = \pi(f)\pi(f')$ dès que soit f soit f' est dans $\mathcal{Z}$.

7.1.7. On vérifie par un petit calcul que si $f \in \mathcal{Z}$, $v \in V^K \in V^B$ où V est une représentation de g, on a

$$fv = \pi(f)v.$$

7.1.8. *Résultats.* Dans cette partie, nous déterminons complètement la structure de l'algèbre de Hecke-Iwahori sur un anneau quelconque, c'est-à-dire que nous donnons une famille génératrice (à deux éléments) de cette algèbre, et déterminons l'idéal des relations entre ces éléments. Nous déterminons également le centre, toujours sur un anneau quelconque, qui est une algèbre de polynômes à un générateur. Sur un corps de caractéristique différent de p nous déterminons les modules absolument simples sur l'algèbre de Hecke-Iwahori, qui se trouvent être tous de dimension 1 ou 2.

En ce qui concerne les applications au reste de cette thèse, nos principaux résultats sont les suivants : si p et v sont inversibles dans k, l'application π réalise un isomorphisme d'algèbre du centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{H}_k(G,B)$ sur $\mathcal{H}_k(G,K)$. Si de plus k est un corps, l'action de $\mathcal{Z}$ sur M_λ^B est scalaire. Si M_λ est irréductible, M_λ^B l'est aussi, tandis que dans les cas où il ne l'est pas, M_λ^B est extension non triviale de deux caractères différents.

7.2. Le cas des arbres homogènes.

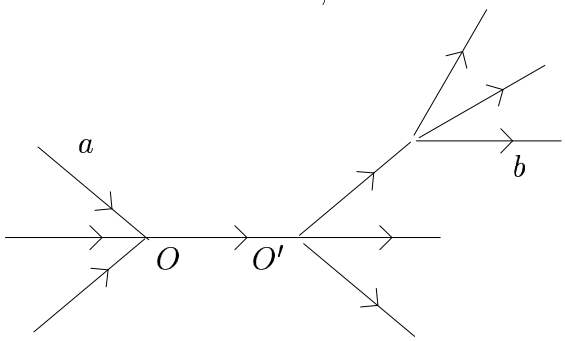
7.2.1. Notons A l'ensemble des *arêtes orientées* de l'arbre X, i.e. des couples (x,x') ou x et x' sont deux sommets voisins de X. L'arête (x,x') est donc vue comme différente de l'arête (x',x).

7.2.2. L'application $G \to A$, $g \mapsto (gO, gO')$ identifie G/B à A comme G-ensemble. Il suffit pour le voir de remarquer que G agit transitivement sur A, ce qui résulte immédiatement des hypothèses a) et d).

7.2.3. Décrivons les orbites de l'action à gauche de B sur A.

Tout d'abord notons que le choix de (O,O') détermine une orientation de tout l'arbre X : nous dirons qu'une arête orientée (x,x') est dans le *bon sens* si la géodésique $[O,x']$ contient soit les deux points O' et x, soit ni l'un ni l'autre de ces deux points, et qu'elle est dans le *mauvais sens* si $[O,x]$ contient exactement l'un des deux points O' ou x. On voit qu'une arête (x,x') est dans le bon sens si et seulement si (x',x) est dans le mauvais sens.

Dans le dessin ci-dessous, toutes les arêtes dessinées sont dans le bon sens.



Il est clair que l'action de G (donc celle de B) sur A respecte la notion de bon et de mauvais sens.

Définissons enfin *l'abcisse* d'une arête $(x.x')$, un entier relatif, de la manière suivante. Si (x, x') est dans le bon sens, on dit que l'abcisse de (x, x') est $d(O, x)$ si la géodésique $[O, x]$ contient x', $-d(o, x)$ sinon. Si (x, x') est dans le mauvais sens, on définit l'abcisse de (x, x') comme celle de (x', x). Il est clair que l'abcisse est invariante sous l'action de G. Dans le dessin ci-dessus, l'arête a est d'abcisse -1, l'arête a' est d'abcisse 2.

LEMME 7.2.4. *Les orbites de l'ensemble des arêtes A sous l'action de B sont les ensembles d'arêtes ayant un sens et une abcisse donné.*

Démonstration — Il faut montrer que deux arêtes (x, x') et (y, y') ayant même sens et même abcisse sont dans la même orbite sous l'action de B. Supposons par exemple que ce sens soit le bon sens et que l'abcisse n soit positive. Alors x et y ont même projection O' sur le boule $B(O, 1)$. On déduit de l'hypothèse d), en procédant par récurrence comme dans la preuve du lemme 5.2.5, qu'il existe un élément $g \in G_1(O) \subset B$ tel que $gx = y$. Comme il existe un élément de g' de $G_n(0) \in B$ qui envoie gx' sur y (ces points ont en effet m6eme projeté y sur $V(O, n)$), on voit que

$$g'g(x, y) = (x', y')$$

et $g'g \in B$.

Les autres cas se font de même. □

7.2.5. Les éléments de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G, B)$ sont donc des fonctions sur l'ensemble des orbites décrits ci-dessus.

Définissons trois éléments U,U', et τ de $\mathcal{H}_k(G, B)$ de la manière suivante.

U (resp. U') est la fonction caractéristique de l'orbite de A constituée des arêtes qui sont dans le bon sens et d'abcisse 1. (resp. d'abcisse -1.) τ désigne la fonction caractéristique de l'orbite constitué des arêtes qui sont dans le mauvais sens et d'abcisse 0 (cette orbite est en fait un singleton, son unique élément est (O', O)).

Déterminons l'action de ces éléments de $\mathcal{H}(G, B)$ sur $\mathcal{C}(G/B) = \mathcal{C}(A)$. On connaît déjà l'action de ces trois éléments sur la fonction $1_B = \mathbb{1}_{(O,O')}$: l'image est la fonction caractéristique décrite ci-dessus. Comme l'action de $\mathcal{H}(G, B)$ sur $\mathcal{C}(A)$ commute à celle de G à gauche, et comme G est transitif sur A, ceci suffit à déterminer l'action de ces éléments sur toute arête de A, et de là l'action sur $\mathcal{C}(A)$:

τ agit simplement en renversant le sens des arêtes, tandis que U et U' agissent de la manière montrée dans le dessin ci-dessous, en envoyant (la fonction caractéristique de) l'arête en gras sur la somme des fonctions caractéristiques des arêtes maigres :

U U'

7.2.6. Ainsi U^n (resp. U'^n, τU^n, $\tau U'^n$) est la fonction caractéristique de l'orbite des arêtes qui sont dans le bon sens et d'abcisse n (resp. dans le bon sens et d'abcisse $-n$, resp. dans le mauvais sens et d'abcisse n, resp. dans le mauvais sens et d'abcisse $-n$).

Vu le lemme précédent, il en résulte que *la famille constitué des éléments* 1, τ, *et* U^n, U'^n, τU^n, $\tau U'^n$ *est une base de* $\mathcal{H}_k(G,B)$ *comme* k*-module.* Il en résulte que (τ, U, U') engendre $\mathcal{H}_k(G_B)$ comme k-algèbre.

7.2.7. On calcule facilement, à l'aide des descriptions combinatoires de l'action de U, U' et τ données ci-dessus, que :

$$\tau^2 = 1 \tag{34}$$

$$\tau U \tau = U' \tag{35}$$

$$UU' = (v-1) + (v-2)\tau U' \tag{36}$$

$$U'U = (v-1) + (v-2)\tau U \tag{37}$$

Ceci détermine complètement la structure de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G,B)$ sur un anneau k quelconque.

PROPOSITION 7.2.8. *Le centre* $\mathcal{Z}$ *de l'algèbre* $\mathcal{H}_k(G,B)$ *est engendré par* $U + U' - (v-2)\tau$.

Démonstration — On vérife aisément que $U + U' - (v-2)\tau$ est bien central.

Un élément générique de $\mathcal{H}(G,B)$ s'écrit

$$h = a + b\tau + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n U^n + d_n U^n \tau + e_n U'^n + f_n U'^n \tau).$$

La condition $h\tau = \tau h$ implique, d'après (35), $c_n = e_n$, $d_n = f_n$). On peut donc réécrire :

$$h = a + b\tau + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n(U^n + U'^n) + d_n(U^n + U'^n)\tau).$$

L'annulation du commutateur $hU - Uh$ se traduit par les équations suivantes, auxquelles on arrive par un calcul sans difficultés en utilisant les relations (35), (36), (37), (34) :

$$\forall n \geq 1\; d_{n-1} = -(v-2)c_n + (v-1)d_{n+1},$$

où l'on a posé $d_0 = b$, et

$$d_1 = 0.$$

On voit facilement que ces équations impliquent que h appartient à $k[U + U' - (v-2)\tau]$. □

PROPOSITION 7.2.9. *On suppose que p et v sont inversibles dans k. Alors l'application π réalise un isomorphsime d'algèbre de $\mathcal{Z}$ sur $\mathcal{H}(G,K)$.*

Démonstration — Calculons l'image de $U + U' - (v-2)\tau$ par π.

L'opérateur U est la fonction caractéristique de BgB, où g est n'importe quel élément de G tel qui envoie l'arête (O, O') sur une arête (O', O''), avec O'' différent de O. Donc $g(O) = O'$, et $KgK = S(O,1)$. On voit immédiatement que $n(g,K,B) = (v-1)/v$, puisque BgB est l'union disjointe des $v-1$ classes à droites correspondants au $v-1$ arêtes orientés partant de O', et distinctes de (O', O). Donc

$$\pi(U) = (v-1)/vT,$$

où $T = 1_{KgK}$ est le générateur standard de $\mathcal{H}(G,K)$.

On vérifie de même que

$$\pi(U') = (v-1)/vT.$$

Enfin, $\tau = 1_{Bg'B}$ où g' est un élément de G tel que $g'(O) = O$ et $g(O) = O'$. On voit que $Kg'K = S(O,1)$, et que $n(g,K,B) = 1/v$. D'où

$$\pi(\tau) = 1/vT.$$

Finalement,

$$\pi(U + U' - (v-2)\tau) = ((v-1)/v + (v-1)/v + (2-v)/v)T = T.$$

La proposition en découlera, si l'on montre que π restreinte qu centre est un morphisme d'anneau. Si k est de caractéristique banale, cela a été prouvé de 7.1.6. Le cas général s'y ramène par un argument standard (la formule $\pi(ff') = \pi(f)\pi(f')$ est vraie pour tout anneau de caractéristique zéro, et donc aussi pour des anneaux de polynômes sur $\mathbb{Z}[1/(pv)]$ – car les deux membres et y ont un sens, et leur égalité se vérifie dans leur corps des fractions, qui est de caractéristique nulle – et finalement pour tout f, f' dans tout anneau k de l'énoncé – considérer le morphisme d'un anneau de polynômes sur $\mathbb{Z}$ dans k qui envoie les indéterminées sur les coeffictients de f et de f', vus comme polynômes en $U'_U - (2-v)\tau$. □

7.2.10. *Modules simples sur $\mathcal{H}(G,B)$.* On suppose maintenant que k est un corps algébriquement clos, de caractéristique différente de p ; on va déterminer les modules simples (à gauche, pour fixer les idées, l'algèbre de Hecke étant isomorphe à son algèbre opposée, et de dimension finie sur k.) sur $\mathcal{H}_k(G,B)$.

Tout d'abord, montrons que *tout module simple sur $\mathcal{H}_k(G,B)$ est de dimension au plus 2 sur k.*

Soit $\mathcal{M}$ un module simple sur $\mathcal{H}_k(G,B)$. Soit $m \in \mathcal{M}$ un élément non nul de $\mathcal{M}$, qui est vecteur propre pour U : $Um = \nu m$, avec $\nu \in k$. Un tel m existe parce que k est algébriquement clos. Considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_0$ engendré par m et τm. Ce sous-espace $\mathcal{M}_0$ est stable par τ, puisque $\tau^2 = 1$.

On a alors

$$U'Um = (v-1)m + (v-2)\tau Um,$$

d'où

$$\nu U'm = (v-1)m + (v-2)\nu\tau m.$$

Comme $(v-1) \neq 0 \in k$ par hypothèse, et que $m \neq 0$, ceci implique $\nu \neq 0$, et

$$U'm \in \mathcal{M}_0.$$

Donc $U(\tau)m = \tau(U'm) \in \mathcal{M}_0$, puisque $\mathcal{M}_0$ est stable par τ. $\mathcal{M}_0$ est donc aussi stable par U, et de là par U'. Autrement dit $\mathcal{M}_0$ est un sous-module de $\mathcal{M}$, donc $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$. Or il est clair que $\mathcal{M}_0$ est de dimension au plus 2 sur k. Ceci prouve l'assertion en italique.

En fait, ceci permet même de classifier les modules simples de dimension finie[2] : tout d'abord nous voyons que si M est un module simple sur $\mathcal{H}_k(G,B)$ de dimension 2, il admet la représentation matricielle suivante, pour un certain $\nu \in k^*$:

$$U = \begin{pmatrix} \nu & v-2 \\ 0 & (v-1)/\nu \end{pmatrix},\ U' = \begin{pmatrix} (v-1)/\nu & 0 \\ v-2 & \nu \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose

$$\lambda = \nu + (v-1)/\nu,$$

on remarque que le module de dimension 2 défini par la représentation matricielle ci-dessus de ne dépend de ν que par l'intermédiaire de λ ; en faisant le changement de base $(e_1, e_2) \mapsto ((v-2)\nu^2 e_2 + (v-1)\nu e_1, (v-1)\nu e_1 + (v-2)\nu^2 e_2)$, on voit que ce module est isomorphe au module $\mathcal{M}_\lambda$ défini par la représentation matricielle suivante :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ (v-1) & \lambda \end{pmatrix},\ U' = \begin{pmatrix} \lambda & (v-1) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme trace $U = \lambda$ dans $\mathcal{M}_\lambda$, on a $\mathcal{M}_\lambda \not\simeq \mathcal{M}_{\lambda'}$ dès que $\lambda \neq \lambda'$. On vérifie facilement de plus que $\mathcal{M}_\lambda$ est irréductible si, et seulement si $\lambda \neq \pm v$ (Sinon $k(e_1 - \pm e_2)$ est une droite fixe).

Comme il est facile de déterminer les représentations de dimension 1 de $\mathcal{H}_k(G,B)$, on obtient : *à isomorphisme près, les modules simples à gauche sur $\mathcal{H}(G,B)$ sont les suivants :*

a) Les modules de dimension 2, qui sont les $\mathcal{M}_\lambda$, avec $\lambda \neq \pm v$.
b) Les modules de dimension 1. Ce sont les caractères χ tels que $\chi(\tau) = \epsilon = \pm 1$, et tels que soit $\chi(U) = \chi(U') = -\epsilon(v-1)$, soit $\chi(U) = \chi(U') = \epsilon$. Il y a donc quatre caractères différents si la caractéristique de k ne divise pas $2v$, moins sinon.

2. Tous les modules sur $\mathcal{H}(G,B)$ considérées seront supposés de dimension finie sur k, sans que cela soit rappelé. Notons que par la définition même d'une représentation admissible ρ de G, le $\mathcal{H}(G,B)$-module ρ^B est de dimension finie

Notons que le $\mathcal{H}(G,B)$-module défini par la représentation trivial de B est le caractère χ_0 tel que $\chi_0(U) = \chi_0(U') = v-1$, $\chi_0(\tau) = 1$.

On peut comparer ces modules irréductibles sur $\mathcal{H}_k(G,B)$ avec les B-invariants des modules universels décrits au théorème 3.7.2 et au lemme 3.7.4 :

PROPOSITION 7.2.11. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Pour tout $\lambda \in k$, le $\mathcal{H}(G,B)$-module à gauche M_λ^B est isomorphe au module $\mathcal{M}_\lambda$ décrit ci-dessus.*

Démonstration — Calculons l'action des éléments U, U' et τ dans la base $\mathbb{1}_O, \mathbb{1}_{O'}$ de M_λ^B (cf. lemme 3.7.4).

Si $U = 1_{BgB}$ avec $g(O) = O'$, $g(O') =$ un voisin de O' distinct de O, on a $BgB = \coprod_{i=1}^{v-1} g_i B$, où les g_i envoient O sur O' et O' sur les $v-1$ voisins de O distincts de O'. Donc

$$U(\mathbb{1}_O) = \sum_{i=1}^{v-1} g_i(\mathbb{1}_O) = (v-1)\mathbb{1}_{O'},$$

$$U(\mathbb{1}_{O'}) = \sum_{i=1}^{v-1} g_i(\mathbb{1}_{O'}) = -\mathbb{1}_O + \lambda\mathbb{1}_{O'},$$

la dernière égalité, valable dans M_λ, ayant été obtenue en soustrayant $(T-\lambda)\mathbb{1}_{O'}$. On voit donc que U est de la forme voulue.

De même, $\tau = 1_{Bg'B}$ avec $Bg'B = g'B$, où $g'(O) = O'$ et $g'(O') = O$. On voit donc que τ agit bien par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et il en va de même de $U' = \tau U \tau$. □

COROLLAIRE 7.2.12. *Si $\lambda = v$, et si k est un corps algébriquement clos de caractéristique ne divisant pas $2v$, le $\mathcal{H}(G,B)$-module M_λ^B est une extension non scindée du caractère χ_0 par un caractère $\chi \neq \chi_0$.*

Démonstration — D'après la proposition précédente, il faut montrer que $\mathcal{M}_v$ est une extension non scindée de χ_0 par un autre caractère. D'après la description matricielle de $\mathcal{M}_v$, une droite stable par $\mathcal{H}(G,B)$ doit déja être stable par τ, donc est soit $k(e_1+e_2)$ soit $k(e_1-e_2)$. Or on constate que

$$U(e_1-e_2) = U'(e_1-e_2) = (e_1-e_2),$$

tandis que

$$U(e_1+e_2) = -e_1 + (2v-1)e_2 = (v-1)(e_1+e_2) + -v(e_1-e_2),$$

$$U'(e_1+e_2) = (2v-1)e_1 - e_2 = (v-1)(e_1+e_2) + v(e_1-e_2).$$

La droite $k(e_1 - e_2)$ est donc toujours stable (et donc un caractère χ), mais la droite $k(e_1 + e_2)$ ne l'est pas sous nos hypothèses $v \neq 0$ dans k. On voit immédiatement sur les formules ci-dessus que le quotient $\mathcal{M}_{-v}/k(e_1 + e_2)$ est le caractère χ_0. On a $\chi \neq \chi_0$ parce que $\chi(\tau) = -1$ tandis que $\chi_0(\tau) = 1$. □

PROPOSITION 7.2.13. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Le centre $\mathcal{Z}$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G, B)$ agit de manière scalaire sur M_λ^B. Plus précisément, si $f \in \mathcal{Z}$ l'action de f sur $\mathcal{M}_\lambda^B$ est la multiplication par le même scalaire que l'action de $\pi(f)$ sur $\mathcal{M}_\lambda^K$.*

Démonstration — Notons que dans le cas (générique d'après la proposition précédente) où M_λ^B est irréductible, la première assertion découle du lemme de Schur. On peut en déduire le cas général par un passage à la limite, et on peut trouver le scalaire par une application de (7.1.7).

Plus simplement, il suffit pour prouver la proposition de vérifier que le générateur $U + U' + (2 - v)\tau$ de $\mathcal{Z}$ agit par la multiplication par λ sur $M_\lambda^B = \mathcal{M}_\lambda$. Cela découle immédiatement de la description matricielle de $\mathcal{M}_\lambda$. □

7.3. Le cas bihomogène. Le cas bihomogène se traite exactement de la même façon. Les calculs sont laissés au lecteur.

CHAPITRE V

Module universel pour GL_3 (avec Ania Otwinowska)

Ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec Ania Otwinowska

1. Introduction

1.1. L'objet de ce court chapitre est de démontrer la conjecture de Lazarus ([**LAZ1**], conjecture 1.0.5), en toute caractéristique différente de p, dans le cas du groupe linéaire GL_3 d'un corps $\mathfrak{P}$-adique.

Nous espérons pouvoir prouver par des méthodes semblables la conjecture de Lazarus pour GL_n. Nous espérons aussi, mais ce sera sans doute un peu plus dur, que ces méthodes pourront mener à une preuve de la conjecture de Lazarus en général, i.e. pour tous les groupes réductifs.

1.2. Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, $d \geq 2$ un nombre entier. On pose $G = \mathrm{PGL}_d(F)$, et on note K l'image de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F)$ dans G. On fixe aussi un anneau quelconque k. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G,K)$ est alors commutative, isomorphe à une algèbre de polynômes $k[T_1,\ldots,T_{d-1}]$, et pour tout caractère λ de cette algèbre, on introduit le module universel $M_\lambda = \mathcal{C}(G/K,k) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k$, où $\mathcal{C}(G/K,k)$ désigne les fonctions à supports finis sur G/K à valeurs dans k, comme dans IV.1.1.1, qui est un k-module sur lequel G agit à droite. Nous démontrons :

THÉORÈME 1.3. *On suppose que $d = 3$. Le module M_λ est plat sur k. Si p est inversible dans k, on a plus précisément : pour tout sous-groupe compact ouvert suffisamment petit U de G, le k-module M_λ^U est libre et de type fini sur k.*

Nous renvoyons à l'introduction du chapitre précédent pour une discussion détaillée de l'histoire du module universel, et les motivations de ce théorème. Nous rappellerons simplement ici que le théorème ci-dessus répond, de manière affirmative, et dans le cas du groupe linéaire, à la question 1) de IV.1.1.3, ce qui implique une réponse affirmative à la conjecture de Lazarus. Plus précisément, la première assertion du théorème affirmant la platitude du module universel est équivalente à la platitude de $\mathcal{C}(G/K,k)$ sur $\mathcal{H}_k(G,K)$ pour tout anneau k (cette dernière assertion est le cas particulier $k' = \mathcal{H}_k(G,K)$, λ tautologique de la précédente –cf. lemme IV.5.4.2– et ce cas particulier entraîne trivialement le cas général). Or la conjecture de Lazarus est l'assertion que $\mathcal{C}(G/K,k)$ est plat sur $\mathcal{H}_k(G,K)$ pour k un corps de caractéristique différente de p. Notons que pour d quelconque, et k un corps de caractéristique banale pour GL_d, cette conjecture est un théorème de Lazarus qui fait l'objet de l'article [**LAZ2**]

Notons également qu'en utilisant l'irréductibilité générique des séries principales non ramifiées pour GL_n en caractéristique zéro, bien connue, on déduit de ce théorème le corollaire suivant, exactement comme on démontre le corollaire IV.6.2.5.

COROLLAIRE 1.4. *Soit k un corps de caractéristique différente de p (et où l'on a choisi une racine de q). Soit χ un caractère non ramifié du Borel standard de G, et λ le caractère de $\mathcal{H}(G,K)$ associé à χ via l'isomorphisme de Satake. Alors les représentations M_λ et I_χ (induite unitaire de χ de B à G) ont mêmes facteurs de composition (avec les mêmes multiplicités).*

Comme la structure des séries principales non ramifiées est connue ([**V1**], chapitre III), on connaît aussi la semi-simplification des modules universels.

2. Traduction en un problème sur l'immeuble de G

2.1. Rappels et notations sur l'immeuble de $\mathbf{PGL}_d(F)$.

2.1.1. On rappelle qu'a tout groupe réductif $\mathfrak{P}$-adique est associé un *immeuble de Bruhat-Tits*: voir [**T**].

À quelques exceptions près, nous ne considérerons les immeubles que du point de vue combinatoire, tel qu'expliqué dans les exercices du paragraphe 1 du chapitre IV de [**Bou**]. Nous éviterons au maximum l'usage du point de vue de [**B-T**], où les immeubles sont de "gros" espaces métriques, et dont les appartement sont isométriques à des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$. Le passage d'un point de vue à l'autre est en général transparent, c'est pourquoi nous nous autoriserons à utiliser dans notre cadre combinatoire les résultats démontrés dans [**B-T**].

2.1.2. Ainsi à G est associé un immeuble, dont on notera X l'ensemble des sommets. On rappelle que X peut être décrit comme l'ensemble des $\mathcal{O}_F$-réseaux de F^d, à homothéties près. Cette description détermine un point privilégié O de X, qu'on appellera parfois *l'origine* de X. Le sous-groupe K de G est le stabilisateur de O pour l'action de G sur X.

On notera $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-Tits "plein". Pour S une partie de X on notera $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{X}$ correspondante, définie comme la fermeture convexe de S dans $\mathcal{X}$.

2.1.3. *Type des arêtes.* Les facettes de dimension 1 (i.e. de cardinal 2) sont appelés *les arêtes.* Rappelons que si x et x' sont deux points distincts de X, (x,x') est une arête, si et seulement si, un réseau Λ de F^d représentant x étant choisi, il existe un réseau Λ' représentant x' tel que

$$\pi\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda.$$

Comme x et x' sont distincts, les inclusions ci-dessus sont strictes, et $\Lambda'/\pi\Lambda$ est un sous-$\bar{F}$-espace vectoriel propre de $\Lambda/\pi\Lambda = \bar{F}^d$. La dimension de cet espace vectoriel est un entier compris entre 1 et $d-1$, qu'on préférera voir comme un

élément non nul du groupe additif $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et qu'on appellera le type de l'arête (x, x'). Les types des arêtes obéissent aux règles (évidentes) suivantes :

- Si (x, x') est une arête de type i, alors (x', x) est une arête de type $-i$
- Si (x, x'), (x', x'') et (x, x'') sont trois arêtes, alors le type de (x, x'') est la somme de ceux de (x, x') et (x', x'').

De plus, l'action de G respecte le type des arêtes.

Si (x, x') est une arête de type i, on dit que x' est un *voisin de x de type i*.

2.1.4. *Chambres et facettes.* Les arêtes sont les facettes de dimension 1, mais nous avons donnée une propriété caractéristique ne faisant pas intervenir la notion de facette. Pour la commodité du lecteur, rappelons comment on peut définir cette notion en terme de celle d'arête.

Une *chambre* est un ensemble C de X de cardinal d, tel qu'on peut trouver $x \in X$ tels que les $y \neq x$ de C soient tous des voisins de x de types deux à deux distincts. Une facette est simplement une partie d'une chambre.

2.1.5. *Appartements.* Rappelons que l'immeuble X est couvert par des *appartements.* Si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de F^d, on lui associe l'ensemble des sommets de X qui ont un représentant de la forme $\mathcal{O}_F \pi^{a_1} e_1 + \ldots + \mathcal{O}_F \pi^{a_d} e_d$, et ce sont les ensembles ainsi obtenus qu'on appelle *appartements.* (Noter que l'appartement associé à la base $(e_1, \ldots, e_d)$ ne dépend en en fait que de l'ensemble des droites $\{Fe_1, \ldots, Fe_d\}$.)

La base $(e_1, \ldots, e_d)$ détermine une origine O dans l'appartement associé (à savoir le réseau engendré par $e_1, \ldots, e_d$, et permet d'associer à tout point de cet appartement ses *coordonnées*, à savoir le d-uplet d'entiers $(a_1, \ldots, a_d)$ qui n'est bien défini qu'à l'addition près d'un d-uplet constant $(a, \ldots, a)$. On a donc une bijection naturelle entre les sommets de l'appartement et $\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$.

Dans ce langage, deux points x et y de cet appartement sont voisins (ou égaux) si, et seulement si l'on peut trouver un représentant $(a_1, \ldots, a_d)$ de x et $(b_1, \ldots, b_d)$ de y, tels que les $b_i - a_i$ soient tous égaux à 0 ou à 1. Le nombre de $b_i - a_i$ égaux à 0, est alors le type de l'arête orientée (x, y) (si ce nombre est entre 1 et $d - 1$. Sinon, c'est qu'on a $x = y$).

Si A est un appartement au sens combinatoire, on notera $\bar{A}$ l'appartement au sens euclidien qui lui correspond. C'est un espace métrique euclidien pour une distance euclidienne que nous noterons δ.

2.1.6. *Distance.* Voici le vocabulaire que nous utiliserons :

La *distance* de deux points x à x' sera toujours (sauf mention explicite du contraire) la distance combinatoire, i.e. le nombre minimal d'arêtes nécessaires pour construire un chemin reliant x à x', et non la distance *euclidienne.* De même pour tous les termes dérivés : *longueur, sphère, boule, rayon.*

Il y a aussi une distance euclidienne sur $\mathcal{X}$, qui se restreint à X, que nous noterons δ. Pour cette distance, on peut parler de milieu et de parties convexes.

2.1.7. *Parties closes.* Nous dirons qu'une partie S de X, qui contient au moins une chambre est close si $\mathcal{S}$ est close dans $\mathcal{X}$ au sens de [**B-T**], 2.4.1. Il revient au même de demander que $\mathcal{S}$ est convexe et réunion d'adhérences de chambres (*loc. cit.*, 2.5.7). Du point de vue combinatoire, S est clos si et seulement si il est réunion de chambres et si, pour tout chemin de longueur minimale reliant deux points de S, tout le chemin est dans S (exercice facile). Comme une intersection d'ensembles clos contenant une chambre commune est close, il existe un plus petit ensemble clos contenant une partie donné contenant une chambre, qu'on appelle *enclos.* (*loc. cit*, 2.4.1)

2.1.8. *Notations.* On note B_n (resp. S_n) la boule (resp. sphère) de centre O et de rayon n. L'ensemble B_n est clos, mais pas S_n. On note K_n le fixateur de B_n. Ainsi, $K_0 = K$.

Les K_n sont des sous-groupes compacts ouverts de G qui sont des pro-p-groupes dès que $n \geq 1$. Ils forment un système de voisinage de l'élément neutre dans G.

Si Y est un sous-ensemble de X, on notera $\mathcal{C}(Y)$ le k-module des applications (ou "fonctions") à support fini de Y dans k. On posera $C_n = \mathcal{C}(B_n)$.

2.2. Traduction du problème en terme d'immeubles.

2.2.1. Comme G agit transitivement sur X, on dispose d'une bijection canonique $G/K \simeq X$ $(g \mapsto gO)$.

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K)$ agit naturellement à droite sur $\mathcal{C}(G/K)$, et cette action peut-être décrite ainsi : via l'isomorphisme

$$\mathcal{H}(G,K) = k[T_1, \ldots, T_{d-1}],$$

chaque T_i agit sur $\mathcal{C}(X)$ de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \forall x \in X,\ (T_i f)(x) = \sum_{y \text{ voisin de type } i \text{ de } x} f(y).$$

2.2.2. Posons $\lambda(T_i) = \lambda_i$, et définissons un k-module muni d'une action de G de la manière suivante :

$$M = \mathcal{C}(X)/(\mathrm{Im}\,(T_1 - \lambda_1) + \ldots + \mathrm{Im}\,(T_{d-1} - \lambda_{d-1})).$$

Alors on voit facilement (cf. [**LAZ1**]) que M est isomorphe au module M_λ de l'introduction.

Comme expliqué dans la note de la page 108, pour vérifier la platitude de M^U pour U sous-groupe compact ouvert suffisamment petit, il suffit de le faire pour tous les $U = K_n$ avec n suffisamment grand.

3. Preuve du théorème

3.1. Quelques résultats particuliers à l'immeuble de $\mathbf{PGL}_3$.

3.1.1. Nous désignons maintenant par X l'immeuble de PGL_3. Les arêtes orientées sont alors de deux types : 1 ou 2 mod 3. Une arête non orientée a alors une et une seule orientation pour laquelle elle est de type 1 : ceci définit un "bon" sens (= celui pour lequel elle est de type 1) sur chacune des arêtes non orientés $\{x, y\}$ [illegible]

3.1 2 · 4 · 4 · 4

[illegible]

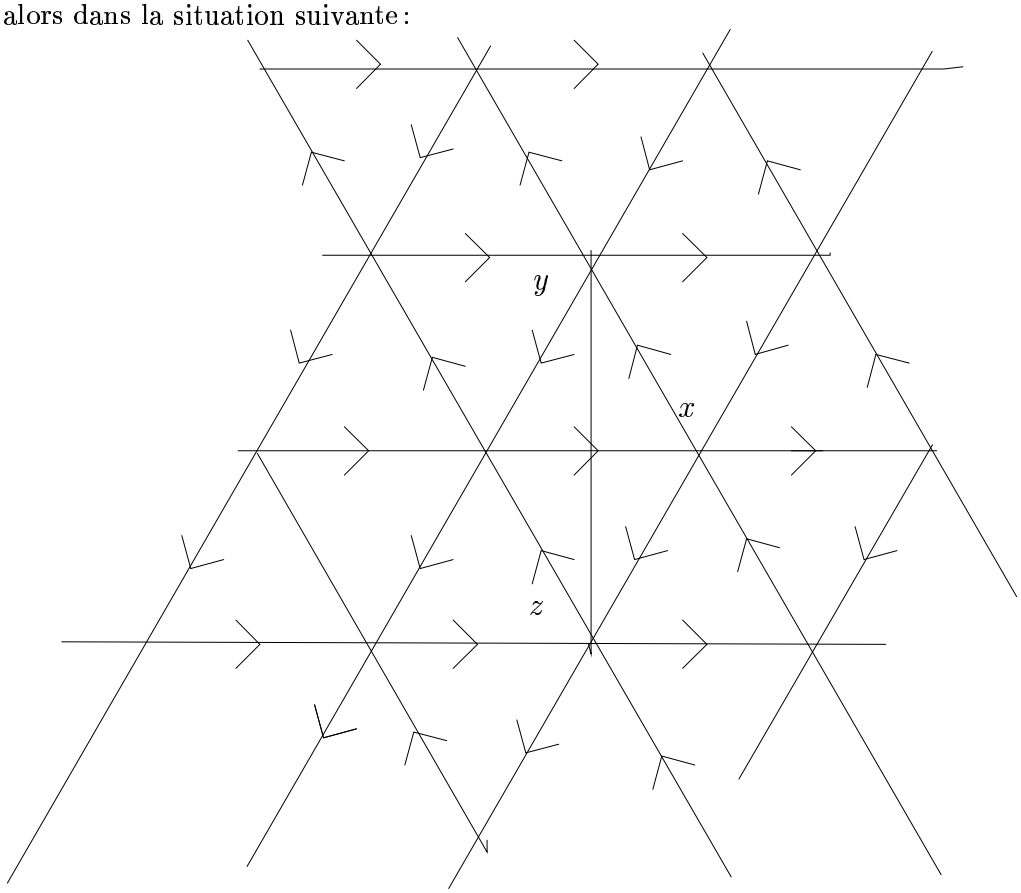
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

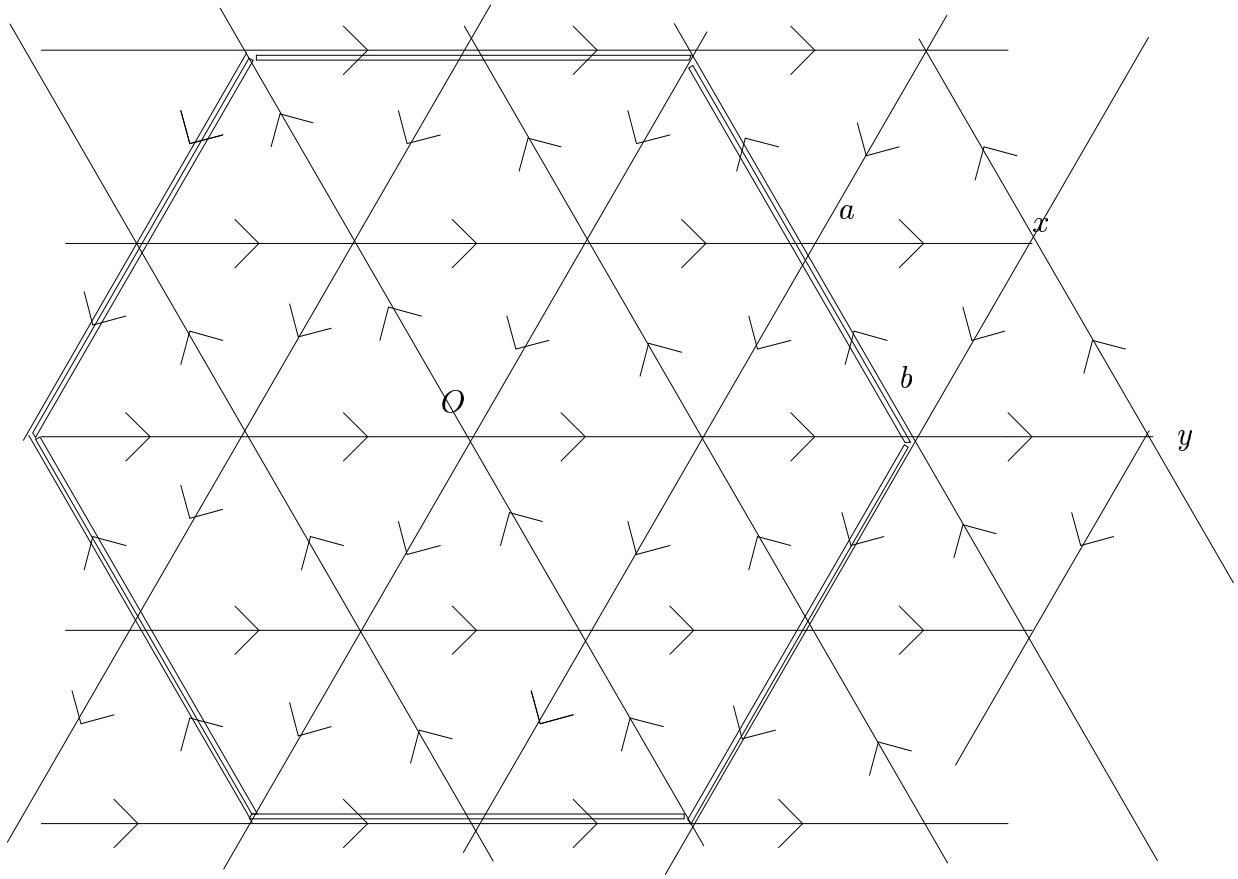
Démonstration — Soit A un appartement passant par x (mais pas nécessairement par l'origine). Vérifions d'abord que, dans A, x a au plus un voisin de chaque type dans S_n. Supposons que x ait deux voisins dans $S_n \cap A$ du même type, y et z. On est alors dans la situation suivante :



Les points y et z appartiennent à l'ensemble clos $B_n \cap A$, donc le segment qui les relie appartient à $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{A}$ (voir figure). Mais $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{A}$ est une réunion de chambres (les petits triangles du dessin), donc il contient x, ce qui absurde, car par hypothèse $x \in S(x, n+1)$.

Si y est un voisin de x dans S_n d'un certain type (1 ou 2), c'est le seul : en effet, s'il y en avait un deuxième z, les deux arêtes $[x, z]$ et $[x, y]$ appartiendrait à un appartement commun A, et l'on a vu que dans A, ceci impliquait $y = z$.

Enfin, dans un appartement A passant par l'origine et x, on voit bien que les voisins de x dans $S_n \cap A$ sont au nombre de 1 ou 2 selon que $\delta(x, O) = n + 1$ ou non. Comme cette condition est indépendante de A, il résulte de ce qui précéde que les voisins de x dans S_n appartiennent à tout appartement passant par O et x.



□

Remarque. Ce lemme est faux pour $d > 3$: si $d > 3$, un point de S_{n+a} peut avoir plusieurs voisins du même type dans S_n, et plus de $d-1$ voisins dans S_n au total.

Pour $d = 3$, j'ignore si le fait que tous les voisins de x dans S_n sont dans un même appartement (ce qui impliquerait trivialement le reste du lemme) résulte plus facilement de la théorie de l'enclos. Le problème est qu'*a priori*, l'ensemble $\{x, O\}$ ne contient pas de chambre, et n'a donc pas d'enclos bien défini.

Définition. On dit que $x \neq O$ est *pointu* si $x \in S_n$ n'a qu'un seul voisin dans S_{n-1}.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.4. *Soit x dans S_n, u et v ses voisins dans S_{n-1} (on prend $u = v$ si x n'en a qu'un seul). Soit y un voisin de x distinct de u et v. Alors $y \in S_n$ si et seulement si y est voisin de u ou de v.*

Démonstration — Si y est voisin de u ou de v, il est clair que $d(O, y) \leq n-1+1 = n$, et donc que $y \in S_n$. Réciproquement, (x, u, v) est une chambre, et on peut donc se placer dans un appartement qui contient x, u, v, et y (mais pas forcément O). Mais alors on voit (si $u \neq v$) que si y n'est pas voisin de u ou v, il est diamétralement

opposé à l'un d'entre eux, disons u. L'inégalité de courbure négative (valable pour d comme pour δ, la preuve est la même, cf. [**B-T**], 3.2.1) donne alors

$$d^2(O,x) \leq 1/2(d^2(O,u) + d^2(O,y)) - 1/4d^2(u,y) = 1/2((n-1)^2 + n^2) - 1 < n^2,$$

ce qui est absurde. Le cas où $u = v$ est laissé au lecteur. □

3.2. Platitude de $M_{\lambda,\mu}$.

PROPOSITION 3.2.1. *Soit $n \geq 1$. Soit f_1 et f_2 deux fonctions à support dans S_n. On suppose que la fonction $T_1 f_1 + T_2 f_2$ est nulle sur S_{n+1}. Alors il existe une fonction g sur S_{n-1} telles que f_1 et f_2 coïncident respectivement avec $T_2 g$ et $-T_1 g$ sur S_n.*

REMARQUES.
- Réciproquement, si f_1 et f_2 sont les restrictions à S_n de $T_2 g$ et $T_1 g$, où g est une fonction sur S_{n-1}, on a $T_1 f_1 + T_2 f_2 = T_1 T_2 g - T_2 T_1 g = 0$ sur la sphère S_{n+1}.
- La proposition a l'interprétation cohomologique suivante. Le $k[T_1, T_2]$-module $C = \mathcal{C}(X)$ est naturellement "filtré" par les sous-k-modules $C_n = \mathcal{C}(B_n)$: si $P \in k[T_1, T_2]$ est homogène de degré d, on a $PC_n \subset C_{n+d}$. Le k-module gradué associé $\hat{C} := \oplus_{n=0}^{\infty} C_{n+1}/C_n$ hérite d'une action de $k[T_1, T_2]$, qui en fait un module gradué sur l'algèbre graduée $k[T_1, T_2]$.

  On peut donc appliquer la théorie du complexe de Koszul (cf. [**Gr**]) : si k désigne le $k[T_1, T_2]$-module trivial, conoyau de l'idéal homogène maximal (T_1, T_2), les groupes $\mathrm{Tor}^i(k, \hat{C})$ sont naturellement gradués, et sont calculés par le complexe de Koszul de $\hat{C}$. Or on voit facilement que la proposition affirme exactement l'exactitude en 1 de la n-ième graduation de ce complexe. Autrement dit, la proposition pour un n donné équivaut à $\mathrm{Tor}^1(k, \hat{C})^n = 0$, et comme la proposition est énoncée pour tout n, elle équivaut à $\mathrm{Tor}^1(k, \hat{C}) = 0$.
- La proposition reste vraie pour $n = 0$ avec la convention que $S_{-1} = \emptyset$, et que l'unique fonction sur S_{-1} est la fonction nulle.

3.2.2. Prouvons la proposition 3.2.1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions sur S_n comme dans l'énoncé de la proposition. Il nous faut définir une fonction g sur S_{n-1}, telle que $f_1 = T_2 g$, et $f_2 = -T_1 g$ sur S_n.

Soit donc x un point de S_{n-1}. Soit y un voisin de type 1 de x appartenant à S_n. Alors, d'après le lemme 3.1.3, x est le seul point de S_{n-1} dont y soit un voisin de type 1. Supposons le problème résolu : si l'on avait $f_2 = -T_1 g$ sur S_n, on aurait en particulier

$$g(x) = -f_2(y).$$

De même, $f_1 = T_2 g$ impliquerait $g(x) = f_1(z)$. Il est donc naturel de chercher à montrer le lemme suivant, qui serait impliqué par la proposition :

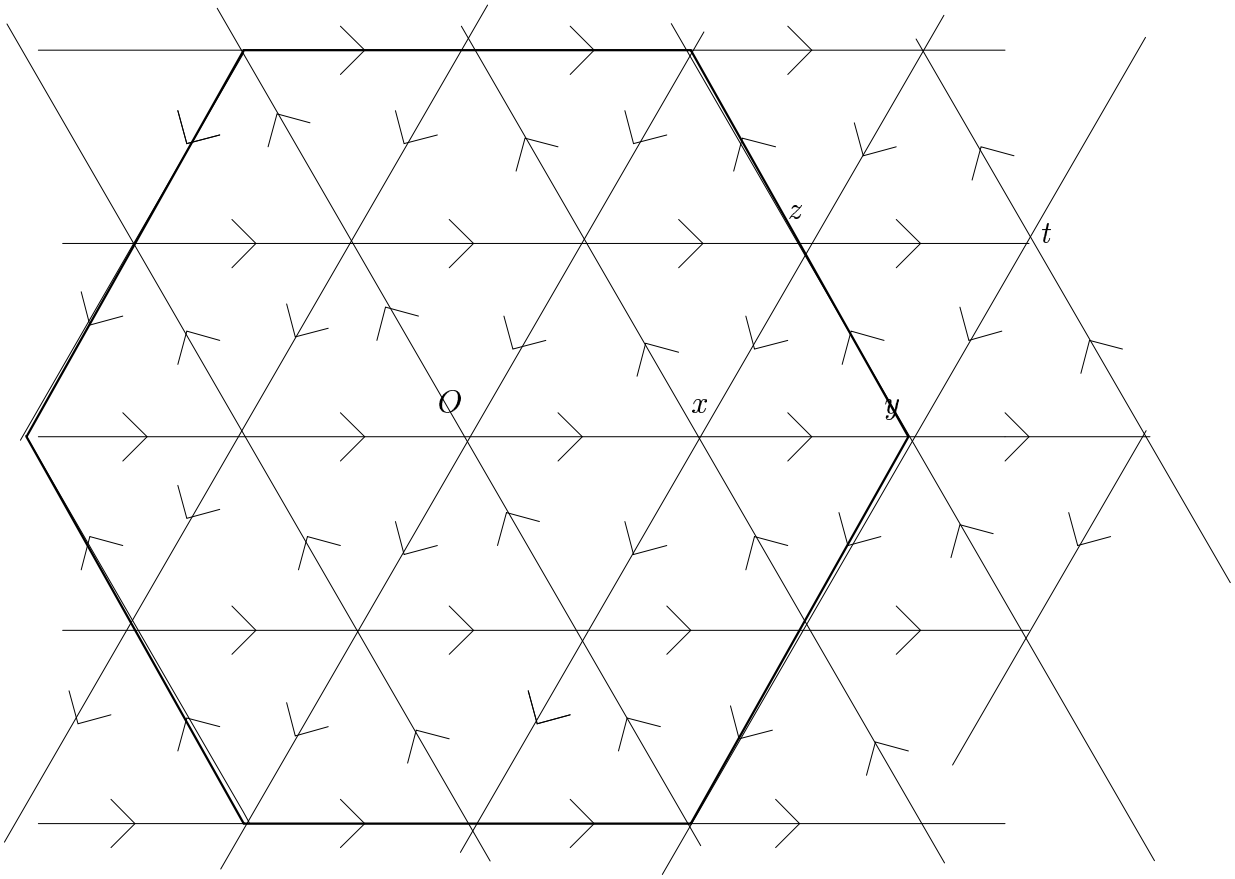
LEMME 3.2.3. *Soit x un point de S_{n-1}. Alors f_1 est constante sur l'ensemble des voisins de type 2 de x qui sont dans S_n, et f_2 est constante sur l'ensemble des voisins de type 1 de x dans S_n. De plus, les deux valeurs prises par ces fonctions sur les ensembles considérés sont opposées.*

3.2.4. Inversement, ce lemme implique facilement la proposition : il suffit de définir, pour tout $x \in S_{n-1}$ $g(x)$ comme $-f_2(y)$ pour un y voisin de type 1 de x dans S_n. Le lemme montre que c'est bien défini, et ce qui précède que $f_2 = -T_1 g$, en tous les points y de S_n qui ont un voisin x dans S_{n-1} tel que (x, y) soit de type 1. Pour un y dans S_n, qui n'a pas de tel voisin, on a trivialement $(T_1 g)(y) = 0$; par ailleurs on voit facilement, en se placant par exemple dans un appartement contenant O et y, qu'il existe un u dans S_{n+1} qui a y pour unique voisin, avec (y, u) de type 2. Comme $T_1 f_1 + T_2 f_2$ est nulle en u, on a $f_2(y) = 0$, et l'égalité $f_2 = -T_1 g$ est encore valable en un tel y, donc sur tout S_n.

On montre de la même manière que $f_1 = T_2 g$.

Il nous suffit donc de prouver le lemme.

3.2.5. Soit y (resp. z) un voisin de type 1 (resp. 2) de x dans S_n. Supposons que y et z soient voisins. Alors il existe t dans S_{n+1} qui ait exactement y et z comme voisins (de type 1 et 2 respectivement) dans S_n. Pour voir ceci, on remarque que (x, y, z) forme une facette ; on peut donc se placer dans un appartement passant par O, x, y, et z ; dans un tel appartement, l'existence d'un $t \in S_{n+1}$ ayant y et z comme voisins de type 1 et 2 respectivement est facile ; le lemme 3.1.3 montre alors que y et z sont, dans tout l'immeuble, les seuls voisins de x dans S_n.



L'annulation de $T_1 f_1 + T_2 f_2$ en t implique donc (si y et z sont voisins)

$$f_1(z) = -f_2(y).$$

Considérons le graphe G_x (c'est un sous-graphe du graphe sous-jacent à X) dont les sommets sont les voisins (quelque soit leur type) de x dans S_n et dont les arêtes relient deux points s'il sont voisins dans X. Remarquons tout de suite que si y et z sont voisins dans G_x, alors nécessairement y et z sont voisins de x de type différent, disons 1 et 2 (cela résulte de 2.1.3), et l'on a donc $f_1(z) = -f_2(x)$. Il est alors clair que le lemme 3.2.3 résulte du lemme suivant.

LEMME 3.2.6. *Le graphe G_x est connexe.*

3.2.7. On suppose d'abord $n \geq 2$. Nous allons interpréter le graphe G_x en termes de géométrie projective.

Nous savons déjà que l'ensemble des voisins (de type 1 et 2 respectivement) de x s'interprète comme l'ensemble des points et des droites (respectivement) dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(\bar{F})$. Deux voisins de x sont eux-mêmes voisins si l'un correspond à un point et l'autre à une droite contenant ce point.

Il nous faut distinguer deux cas, selon que le point x a un ou deux voisins dans S_{n-2}.

Supposons d'abord que x ait deux voisins distincts u et v dans S_{n-2} qui correspondent à un point P et une droite D dans $\mathbb{P}^2$, avec $P \subset D$. Les voisins de x dans S_{n-1} sont alors exactement les voisins de x qui sont aussi voisins soit de u soit de

v (cf lemme 3.1.4), autrement dit ce sont les points (différents de P) de $\mathbb{P}^2$ qui sont dans D, et les droites (différentes de D) qui contiennent P.

Finalement, les points de G_x sont les voisins de x qui ne sont ni dans S_{n-1} ni dans S_{n-2} ; ce sont donc les points de $\mathbb{P}^2 - D$, et les droites de $\mathbb{P}^2$ qui ne contiennent pas P.

Sous cette forme il est facile de montrer que G_x est connexe : Montrons par exemple que deux points Q et Q' de $\mathbb{P}^2 - D$ sont reliés. Si P, Q et Q' ne sont pas sont alignés, Q est relié à Q' via la droite (QQ') qui ne passe pas par P. Si P, Q et Q' sont alignés, on prend Q' n'appartenant pas à D, (PQ) et (PQ') (un tel Q' existe car $|\mathbb{P}^2| - |D| - |(PQ)| - |(PQ')| + |\{P, Q, Q'\}| = q^2 + q + 1 - 3(q+1) + 3 = q^2 - 2q + 1 > 0$ pour tout $q = |\bar{F}|$). Alors Q est relié à Q'' et Q'' à Q'.

Le cas où x n'a qu'un seul voisin u dans S^{n-2} est encore plus simple : si u correspond à un point $P \in P^2$ (le cas d'une droite est dual) G_x s'interprète comme l'ensemble des points de $\mathbb{P}^2$ distincts de P et des droites de $\mathbb{P}^2$ ne passant par P, et la connexité se montre de même. Le cas $n = 1$ est facile.

On a donc montré le lemme 3.2.6, donc le lemme 3.2.3 et la proposition 3.2.1.

Corollaire 3.2.8. *Soit $f \in C_n = \mathcal{C}(B_n)$, tel que $f \in (T_1 - \lambda)C + (T_2 - \mu)C$. Alors $\exists g_1 \in C_{n-1}$, $g_2 \in C_{n-1}$ tels que $f = (T_1 - \lambda)g_1 + (T_2 - \mu)g_2$.*

Démonstration — Par hypothèse

$$f = (T_1 - \lambda)f_1 + (T_2 - \mu)f_2$$

avec f_1 et $f_2 \in C$. Supposons que f_1 et f_2 soit toutes deux à support dans B_{n+m} avec $m \geq 0$. Nous allons construire deux fonctions f_1' et f_2', à support dans B_{n+m-1}, vérifiant toujours la relation

$$f = (T_1 - \lambda)f_1' + (T_2 - \mu)f_2'.$$

Le corollaire en résulte par récurrence descendante sur m.

Pour ce faire, notons que $T_1 f_1 + T_2 f_2 = f + \lambda f_1 + \mu f_2$ est nulle sur la sphère S_{n+m+1}, puisque c'est déjà la cas de f, f_1 et f_2. D'après la proposition précédente, il existe donc g à support dans la sphère S_{n+m-1} telle que f_1 et $T_2 g$, ainsi que f_2 et $-T_1 g$ coïncident sur S_{n+m}.

Posons alors $f_1' = f_1 - (T_2 - \mu)g = (f_1 - T_2 g) + \mu g$. Alors f_1' est à support dans B_{n+m-1}, puisque g l'est, et que f_1 et $T_2 g$ sont à support dans B_{n+m} mais coïncident sur S_{n+m}.

Posons de même $f_2' = f_1 + (T_1 - \lambda)g$, qui est à support dans B_{n+m-1}.

On voit alors que

$$(T_1 - \lambda)f_1' + (T_2 - \mu)f_2' =$$
$$[(T_1 - \lambda)f_1 + (T_2 - \mu)f_2] - [(T_1 - \lambda)(T_2 - \mu)g - (T_2 - \mu)(T_1 - \lambda)g] = f - 0 = f,$$

car $(T_1 - \lambda)$ et $(T_2 - \mu)$ commutent. □

3.2.9. Le k-module C est filtré par ses sous-k-module $C_n = \mathcal{C}(B_n)$. Si l'on note $\bar{C}_n$ l'image de C_n dans $M_{\lambda,\mu}$, on obtient une filtration de $M_{\lambda,\mu}$.

PROPOSITION 3.2.10. – *1) On a un isomorphisme canonique de k-modules*

$$\bar{C}_n = C_n/[(T_1-\lambda)C_{n-1} + (T_2-\mu)C_{n-1}].$$

– *2) Notons L_n le sous-espace de $\mathcal{C}(S_n)$ constitué des restrictions à S_n des fonctions de la forme $T_1f_1 + T_2f_2$, où f_1 et f_2 appartiennent à $\mathcal{C}(S_{n-1})$. Alors on a un isomorphisme canonique de k-modules :*

$$\bar{C}_n/\bar{C}_{n-1} = \mathcal{C}(S_n)/L_n.$$

– *3) Ce dernier module $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est libre de type fini.*

Démonstration —

$$\bar{C}_n = C_n/[((T_1-\lambda)C + (T_2-\mu)C) \cap C_n].$$

Or le corollaire précédent affirme que

$$((T_1-\lambda)C + (T_2-\mu)C) \cap C_n = (T_1-\lambda)C_{n-1} + (T_2-\mu)C_{n-1},$$

ce qui prouve 1).

On en déduit

$$\bar{C}_n/\bar{C}_{n-1} = (C_n/C_{n-1})/p([(T_1-\lambda)C_{n-1} + (T_2-\mu)C_{n-1}]),$$

où p désigne la projection canonique $C_n \to C_n/C_{n-1}$. La restriction $C_n = \mathcal{C}(B_n) \to \mathcal{C}(S_n)$ induit un isomorphisme de C_n/C_{n-1} sur $\mathcal{C}(S_n)$, et cet isomorphisme envoie $p([(T_1-\lambda)C_{n-1}+(T_2-\mu)C_{n-1}])$ sur le sous-module de $\mathcal{C}(S_n)$ que nous avons appelé L_n. Ceci prouve 2).

Pour prouver 3), considérons la suite de morphismes :

$$0 \to \mathcal{C}(S_{n-2}) \to \mathcal{C}(S_{n-1})^2 \to \mathcal{C}(S_n) \to \mathcal{C}(S_n)/L_n \to 0,$$

où le premier morphisme non trivial est celui qui à $g \in \mathcal{C}(S_{n-2}) \subset C$ associe le couple des fonctions $(-T_2g, T_1g)$ restreintes à S_{n-1}, le second morphisme est celui qui à $(g_1, g_2) \in \mathcal{C}(S_{n-1})^2$ associe la restriction à S_n de $T_1g_1+T_2g_2$, et enfin le dernier morphisme est simplement la projection canonique.

Que cette suite est un complexe est formel. C'est d'ailleurs (si l'on s'arrête à l'avant-dernier terme) le (n-gradué du) complexe de Koszul de $\hat{C}$ mentionné à la remarque ci-dessus.

Nous affirmons que cette suite est une suite exacte. De droite à gauche : l'exactitude en $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est évidente. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_n)$ résulte de la définition de L_n. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_{n-1})^2$ est la proposition 3.2.1. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_{n-2})$ résulte facilement du lemme 3.1.3 : en effet, il faut montrer que si $f \in \mathcal{C}(S_{n-2})$, la nullité de T_1f et de T_2f sur S_{n-1} implique celle de f. Pour cela soit x un point de

S_{n-2}. Le point x possède toujours au moins un voisin y dans S_{n-1} (regarder dans un appartement) disons de type 1. $0 = (T_1 f)(y) = f(x)$, d'après 3.1.3.

On en déduit, si k est un corps :

$$\dim_k \mathcal{C}(S_n)/L_n = \dim_k \mathcal{C}(S_n) - \dim_k \mathcal{C}(S_{n-1})^2 + \dim_k \mathcal{C}(S_{n-2}).$$

Comme le membre de droite est un nombre indépendant du corps k (il est égal à $|S_n| - 2|S_{n-1}| + |S_{n-2}|$), il en va de même pour le membre de gauche.

Pour prouver que $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est libre de type fini sur tout anneau k, il suffit de le faire pour $k = \mathbb{Z}$ car la formation de ce module commute à tout changement de base. La type-finitude de $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ étant évidente, il suffit de prouver la platitude, donc, d'après le critère numérique de platitude, de prouver que ce module à la même dimension sur tous les corps $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{Q}$. C'est ce que nous venons de faire.

□

THÉORÈME 3.2.11. *Soit $n \geq 0$. Alors*

- *1) $\bar{C}_n/\bar{C}_{n-1}$ est libre de type fini sur k.*
- *2) $\bar{C}_n$ est libre de de type fini sur k.*
- *3) $M_{\lambda,\mu}$ est plat sur k*
- *4) Si p est inversible dans k, $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est plat sur k si $n \geq 1$.*

Démonstration — Le point 1) résulte immédiatement de la proposition précédente.

Le point 1) implique le point 2) par récurrence sur n, compte tenu de ce qu'une extension de modules libres de type fini l'est encore.

Le point 2) implique le point 3) car $M_{\lambda,\mu}$ est limite inductive filtrante des $\bar{C}_n$.

Le point 3) implique le point 4) car K_n est un pro-p-groupe ($n \geq 1$), si bien que $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est facteur direct de $M_{\lambda,\mu}$. □

3.3. Admissibilité de $M_{\lambda,\mu}$.

3.3.1. Le but de cette sous-partie est de démontrer que pour tout anneau k dans lequel p est inversible, tout λ et μ dans k, et tout n, $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est de type fini sur k. C'est ce que nous appelons *l'admissibilité* de $M_{\lambda,\mu}$ sur k.

REMARQUE. Notons que combiné à la platitude que nous venons d'obtenir ce résultat a le corollaire suivant : si k est une algèbre sur un corps $\mathbb{F}$ (de caractéristique différente de p), $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est libre de type fini sur k. Il suffit en effet de le vérifier pour k de la forme $\mathbb{F}[X_1, X_2]$, car $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ sur k s'obtient à partir de M_{X_1,X_2} par l'extension des scalaires $\mathbb{F}[T_1, T_2] \to k$, $T_1 \mapsto \lambda$, $T_2 \mapsto \nu$. Or sur un anneau tel que $\mathbb{F}[T_1, T_2]$ tout module plat et de type fini est libre d'après un résultat bien connu de Quillen et Suslin.

3.3.2. On peut aussi noter que l'admissibilité de $M_{\lambda,\mu}$ sur un corps k (de caractéristique différente de p) s'obtient sans effort à partir du résultat en caractéristique zéro (qui est connu par la théorie de Bernstein – cf. [**LAZ1**] qui traite aussi le cas de caractéristique banale), grâce au lemme suivant – appliqué à $A = W(k)$, $M = M^{K_n}_{\lambda',\mu'}$ pour λ' et μ' relevés de λ et μ dans A.

LEMME 3.3.3. *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K, de corps résiduel k ; soit M un module plat sur A, tel que $M \otimes K$ est de dimension finie sur K. Alors $M \otimes k$ est de dimension finie sur k.*

Démonstration — Si $v_1, \dots v_n$ est une famille liibre de $M \otimes k$ sur k, $v'_1, \dots, v'_n$ des relevés des précédents dans M, alors la famille $v'_1, \dots, v'_n$ est encore libre sur K : écrivant une relation de liaison $\sum_i \lambda_i v'_i = 0$ dans $M \otimes K$, on peut en divisant cette égalité par π^q, où π est une uniformisante de A et q le minimum des valuations des λ_i, se ramener au cas où les λ_i sont dans A, et au moins l'un d'entre eux inversible dans A. Réduisant cette égalité modulo (π), on obtient une relation non triviale de liaison des v_i dans $M \otimes k$, ce qui est absurde.

Le cardinal d'une famille libre de $M \otimes k$ est donc borné, ce qui implique que cet espace est de dimension finie. □

3.3.4. Cependant nous donnons une autre méthode pour l'admissibilité, qui outre le fait qu'elle s'applique à tout anneau k (où p est inversible) a l'avantage d'être effective (i.e. de pouvoir donner une borne explicite du cardinal d'une famille génératrice de $M^{K_n}_{\lambda,\mu}$) et *self-contained*.

LEMME 3.3.5. *Soit $x \in S_m$. Tout chemin de O à x de longueur m est entièrement contenu dans tout appartement contenant O et x.*

Démonstration — Soit $x_0 = O, x_1, \dots, x_m = x$ un chemin de longueur m de O à x. Alors on a $x_i \in S_i$, et x_{i-1} est un voisin de x_i dans S_{i-1}. Le lemme résulte donc du lemme 3.1.3 par récurrence descendante sur i. □

LEMME 3.3.6. *Soit $x \in S_m$. Tout chemin de O à x de longueur m a le même nombre a d'arêtes de type 1, et le même nombre b d'arêtes de type 2. On a $a+b = m$.*

Démonstration — Soit A un appartement contenant x et O. On décrit le point x par un système de coordonnées $(0, u, v)$ avec $0 \leq u \leq v$ (ce qu'on peut toujours faire quitte à permuter les éléments de la base définissant le système de coordonnées). Si $x_0, x_1, \dots, x_m$ est un chemin de O à x, les coordonnées de x_i peuvent s'écrire $(0, u_i, v_i)$ et l'on a $(u_{i+1}-u_i, v_{i+1}-v_i) \in \{(0,1), (1,0), (1,1), (-1,0), (0,-1), (-1,-1)\}$ (c'est la condition pour que x_i soit voisin de x_{i+1}.) On en déduit immédiatement

que $u \leq m$. Si l'on avait $u < m$, on pourrait trouver un chemin de longueur $u < m$ de O à x (en prenant v arêtes $(1,0)$ puis $u-v$ arêtes $(1,1)$) ce qui est absurde; donc

$$u = m.$$

Les $(u_{i+1}-u_i, v_{i+1}-v_i)$ sont donc tous de la forme $(1,1)$ ou $(0,1)$, et l'arête (x_i, x_{i+1}) est respectivement de type 1 et 2. On en déduit que le nombre d'arêtes de type 1 (resp. 2) dans ce chemin est

$$a = u,$$

$$b = v - u,$$

nombres visiblement indépendant du chemin choisi. □

DÉFINITION. On appelle (a,b) le *type* du point x.

Il est clair (vu la preuve du lemme précédent) que $x \in S_m$ de type (a,b) est pointu si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$. Son unique voisin est de type $(a-1,0)$ si $a > 0$, $(0,b-1)$ si $b > 0$. Si x n'est pas pointu, ses deux voisins sont de type $(a-1,b)$ et $(a,b-1)$.

Dans un appartement donné, un point n'est pas déterminé par son type (à un type donné correspond trois ou six points) mais c'est vrai dans un *secteur*:

DÉFINITION. Un secteur est une partie d'un appartement contenant O de la forme $\{(0,u,v)\}$, $0 \leq u \leq v$, pour un système de coordonnées tel que $(0,0,0)$ est une coordonnée de O.

Il y a donc six secteurs dans un appartement, qui le recouvrent, et qui sont deux à deux d'intersection soit réduite à O soit une demi-droite (auquel cas ils sont dit *adjacents*. La preuve du lemme 3.3.6 montre que si x est dans un secteur, tous les chemins de longueur m de O à x sont dans ce même secteur. Elle montre aussi que si l'on choisit les coordonnées d'un appartement A contenant ce secteur tel qu'il soit l'ensemble des $(0,u,v)$ avec $0 \leq u \leq v$, il n'y a qu'un seul point du secteur de type (a,b) à savoir $(0,a,a+b)$.

DÉFINITION. Soit $x \in S_m$, et $n \leq m$. On appelle *projection* de x sur S_n l'ensemble des points de S_n par lesquels passe un chemin de longueur m reliant O à x. On appelle *projeté* de x sur S_n tout point de la projection de x sur S_n.

Tous les projetés de x sur S_n appartiennent à un même secteur.

On a trivialement :

LEMME 3.3.7 (Transitivité de la projection). *Soit $l \leq n \leq m$ et $x \in S_m$. La projection de x sur S_l est la réunion des projections sur S_l des projetés de x sur S_n*

DÉFINITION. On appelle *segment* de S_n tout ensemble de point de S_n qui est inclus dans un appartement, et qui, dans un système de coordonnées adéquates (où l'origine a pour coordonnées $(0,0,0)$) est l'ensemble des $(0,u,n)$ où u parcourt les entiers d'un intervalle fermé de $[0,n]$. Autrement dit, un segment est l'ensemble des points d'un secteur dont les types sont de la forme $a, n-a$ avec a parcourant un intervalle de $[0\ldots n]$. Autrement dit, un *segment* est un intervalle fermé d'un des côtés de l'hexagone que dessine la sphère S_n dans un appartement.

Un segment est dit *saturé à l'origine* (resp. *à l'extrémité*) s'il contient (dans la description précédente) le point de type $(n,0)$ (resp $(0,n)$).

Un segment est donc saturé (d'un côté ou de l'autre) si et seulement s'il contient un point pointu. Dans la figure de la page 170, le point x (qui est de type $(2,1)$) a pour projection sur S_2 le segment $[ab]$ qui est de longueur 1, et qui est saturé à l'origine, mais pas à l'extrémité. Le point y (de type $(3,0)$ a une projection réduite au point b, donc un segment de longueur zéro, là encore saturé à l'origine.)

LEMME 3.3.8. *La projection d'un point $x \in S_m$ sur S_n est toujours un segment P. Si x est de type (a,b), on a*

$$a \geq \sup_{p\in P} a_p \text{ et } b \geq \sup_{p\in P} b_p$$

ou (a_p, b_p) désigne le type du point p de P ; la première (resp. la seconde) inégalité est une égalité si P n'est pas saturé à l'origine. En particulier, si ce segment n'est pas saturé, il est de longueur $n-m$ (i.e. il contient $n-m+1$ points)

Démonstration — Dans un secteur donné passant par x, les points de P sont tous (d près la preuve du lemme 3.3.6 les points de type $(a_p,b_p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $a_p + b_p = m$, $a_p \geq a$, $b_p \geq b$. Le lemme en découle. □

3.3.9. À un point x de S_m on associe le triplet (P,a,b) ou P est la projection de x sur S_n et (a,b) le type de A, qui vérifie les propriétés suivantes :

P est un segment de S_n,
$a+b=m$,
$a \geq \sup_{p\in P} a_p$ et $b \geq \sup_{p\in P}$ ou (a_p,b_p) désigne le type du point p de P ; la première (resp. la seconde) inégalité est une égalité si P n'est pas saturé.

Il est clair que le triplet (P,a,b) ne dépend que de l'orbite sous K_n de x.

Réciproquement, si (P,a,b) vérifie les propriétés ci-dessus, il provient nécessairement d'un $x \in S_m$. Pour le voir, on se place dans un appartement contenant P, dans lequel P est l'ensemble des points $(0,u,n)$ avec $u_0 \leq u \leq u_1$. Les types de ces points sont les $(u, n-u)$. Par hypothèse on a donc $u_1 \leq a$ et $n-u_0 \leq b$, avec égalité (dans l'une ou l'autre) si P n'est pas saturé (à l'origine ou à l'extrémité). Prenons alors pour x le point de coordonnées $(O,a,a+b)$. Le point x est bien dans

S_m et de type (a,b). De plus, d'après la preuve du lemme 3.3.8, la projection de P est l'ensemble des $(0,u',n)$ avec

$$\max(n-b,0) \leq u' \leq \min(n,a).$$

Si P n'est pas saturé, cette égalité se réécrit $u_0 \leq u \leq u_1$, et l'on voit donc que la projection de x est P. Si P est saturé à l'origine, mais pas à l'extrémité, cette égalité se réécrit $0 \leq u' \leq u_1$, et là encore le projeté de x est bien P. Le cas où P est saturé à l'extrémité (ou aux deux bouts) se traite de même. Ainsi, P est toujours le projeté de x.

Enfin, montrons que si x et $y \in S_m$ ont même (P,a,b), alors x et y sont dans la même K_n-orbite. Il résulte de ce qui précède que x appartient à un appartement A et y à un appartement A' tels que $A \cap A'$ contient P ainsi que O. D'après [**B-T**], proposition. 2.5.8, il existe $g \in \mathrm{GL}_3(F)$ tel que $gA = A'$ qui est l'identité sur $A \cap A'$. Il résulte de ce qui précède que $g(x) = y$, car $g(x)$ a même type et même projeté que y dans A'. Le fait que g laisse stable P se traduit par le fait que $g \mod \pi^n$ est dans un certain parabolique $\mathcal{P}(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})$. On peut alors trouver $h \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ tel que $h \mod \pi^n = g$. La composée $h^{-1}g$ laisse fixe la boule unité B_n, et on vérifie facilement qu'elle envoie x sur y.

On a donc montré que les orbites de S_m sous K_n étaient en bijection avec les (P,a,b) vérifiant les propriétés ci-dessus.

On note $O_{P,a,b}$ l'orbite correspondant à $P(a,b)$. On note $\mathbb{1}_{P,a,b}$ la fonction caractéristique de l'orbite dans S_m $(m = a+b)$ correspondant à $\mathbb{1}_{P,a,b}$.

LEMME 3.3.10. *Si P est saturé à l'origine (resp. à l'extrémité), $T_1\mathbb{1}_{P,a,b} = \mathbb{1}_{P,a+1,b}$ sur S_{m+1} (resp. $T_2\mathbb{1}_{P,a,b} = \mathbb{1}_{P,a,b+1}$ sur S_{m+1})*

Démonstration — Supposons P saturé à l'origine. Cela implique $a \geq n$.

Soit $x \in O_{P,a+1,b}$. Comme x n'est pas de type $(*,0)$, x possède exactement un voisin y dans S_m tel que (y,x) soit de type 1. Un tel y est de type (a,b). Ses projetés sur S_n sont tous dans un secteur contenant 0 et y et ont pour type les (a_p,b_p) avec $a_p + b + p = n$, $0 \leq a_p \leq a$, $0 \leq b_p \leq b$ Mais comme $a \geq n$, ce système d'inégalité est équivalent aux systèmes où l'on a remplacé $a_p \leq a$ par $a_p \leq a+1$, ce qui montre que les projetés de y sont exactement les projetés de x, autrement dit que $y \in O_{P,a,b}$. Réciproquement, il est clair que tout 1-voisin d'un $y \in O_{P,a,b}$ appartient à $O_{P,a+1,b}$, si bien que $T_1\mathbb{1}_{P,a,b} = \mathbb{1}_{P,a+1,b}$. □

LEMME 3.3.11. *Si $m \geq 2n-2$, l'application $(\mathcal{C}(S_m)^{K_n})^2 \to \mathcal{C}(S_{m+1})^{K_n}$ qui à (g_1,g_2) fonctions K_n-invariantes sur S_m associe la fonction (nécessairement k_n-invariante) $T_1f_1 + T_2f_2$ restreinte à S_{m+1} est surjective.*

Démonstration — Une fonction K_n-invariante sur S_{m+1} est combinaison linéaire de $\mathbb{1}_{P,a,b}$ avec $a+b = m+1$. Par linéarité il suffit de prouver qu'un tel $\mathbb{1}_{P,a,b}$ est

dans l'image. Si P n'était pas saturé, sa longueur serait $m+1-n \geq n-1$, mais un segment de longueur $n-1$ est toujours saturé (un coté de S_n dans un appartement est de longueur n). Le segment P est donc saturé, disons à l'origine. Alors d'après le lemme précédent, $T_1 \mathbb{1}_{P,a-1,b} = \mathbb{1}_{P,a,b}$. □

PROPOSITION 3.3.12. *On suppose p inversible dans k. Si $n \geq 1$ et $m \geq 2n-2$, l'application $C_m^{K_n} \to M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est surjective. En particulier, $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est de type fini.*

Démonstration — Comme K_n est un pro-p-groupe, l'application $C^{K_n} \to M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est surjective. Si $\phi \in M_{\lambda,\mu}^{K_n}$, ϕ admet donc un relevé $f \in C$ qui est K_n invariant, et qui est à support dans une boule B_k. Si $k \leq m$, la proposition est prouvée. Sinon, on a $k \geq 2n-1$ et on va montrer qu'on peut diminuer k. D'après le lemme précédent, la restriction à S_k de f s'écrit $T_1 f_1 + T_2 f_2$ sur S_k, avec f_1 et f_2 fonctions sur S_{k-1}. Quitte à moyenner f_1 et f_2 par K_n, on peut supposer que ces deux fonctions sont K_n-invariantes. On pose $f' = f - (T_1 - \lambda) f_1 - (T_2 - \mu) f_2$. Alors f est maintenant à support dans B_{k-1}, est encore K_n-invariante et son image dans $M_{\lambda,\mu}$ est encore ϕ. Réitérant ce procédé, on arrive à $k \geq m$, ce qui prouve la proposition. □

CHAPITRE VI

Variations sur un lemme de Ribet

1. Introduction

1.1. Le lemme de Ribet.

1.1.1. Nous reprenons les notations de Ribet ([**Ri**]) : soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\mathbb{F}$ son corps résiduel et π une uniformisante. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur K. Un *réseau* de V est un $\mathcal{O}$-module libre de rang n dans V qui engendre V sur K.

1.1.2. On suppose donnée une représentation

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

d'un groupe dans V telle que G laisse stable un réseau de V. (C'est le cas en particulier si ρ est continue et G compact). Si $\Lambda \subset V$ est un réseau stable par G, le groupe G agit sur $\Lambda/\pi\Lambda$ qui est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}$. On appellera l'application associée

$$\bar{\rho}_\Lambda : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$$

réduction de ρ attachée a Λ. Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forment une base de Λ, donc de V, la matrice de ρ dans cette base est à coefficients entiers, donc il en est de même pour les éléments caractéristiques (coefficients du polynôme caractéristique). Il est évident que les éléments caractéristiques de $\bar{\rho}(g)$ sont les réductions modulo π des éléments caractéristiques de $\rho(g)$. Donc ces éléments ne dépendent pas du réseau stable Λ choisi. Le théorème de Brauer-Nesbitt (cf. [**C-R**], 30.16) assure alors que les facteurs de compositions de $\bar{\rho}_\Lambda$ ne dépendent pas du réseau stable Λ. On les note $\bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_k$.

1.1.3. On se placera toujours dans le cas où ρ est simple c'est-à-dire que ρ n'a qu'un seul facteur de composition. Ceci ne nous donne aucune information sur les facteurs de composition de $\bar{\rho}$, comme le montrent les deux cas extrêmes $\Lambda = \mathcal{O}^n, G = \mathrm{GL}(\Lambda) = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ où $\bar{\rho}_\Lambda$ est simple, et $\Lambda = \mathcal{O}^n$, G est le groupe des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ congrues à l'identité modulo π, où $\bar{\rho}$ a n facteurs de compositions, tous triviaux de dimension 1. Que peut-on dire néanmoins de $\bar{\rho}$?

1.1.4. *Le lemme de Ribet.* Ribet s'intéresse au cas $n = 2$. Dans ce cas, soit les représentations $\bar{\rho}_\Lambda$ sont simples, soit elles ont deux facteurs de compositions, qui sont des caractères ϕ_1 et ϕ_2.

PROPOSITION 1.1.5 (Lemme de Ribet). *Si ρ est simple et si ses réductions $\bar{\rho}$ ne le sont pas, il existe un réseau $L \subset V$ pour lequel la réduction associée $\bar{\rho}_L$ est de la forme* $\begin{pmatrix} \phi_1 & * \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}$ *mais n'est pas diagonalisable.*

Démonstration — [**Ri**], proposition 2.1, page 154. □

1.1.6. Une représentation ρ qui a deux facteurs de Jordan-Hölder, mais qui n'est pas somme directe de ces deux facteurs s'appellent une *extension non triviale* (ou *non scindée*). Si les deux facteurs se nomment ρ_1 et ρ_2, et si ρ_1 apparaît comme sous-représentation (et donc ρ_2 comme quotient), on dit que c'est une extension de ρ_2 par ρ_1 (attention au sens) :

$$0 \to \rho_1 \to \rho \to \rho_2 \to 0.$$

Ainsi, dans l'énoncé du lemme précédent, $\bar{\rho}_L$ est une extension non triviale de ϕ_2 par ϕ_1.

1.1.7.

Remarque. Dans l'hypothèse du lemme précédent ϕ_1 et ϕ_2 jouent des rôles symétriques. La conclusion symétrique doit donc elle aussi être vérifiée et l'on peut donc affirmer qu'il existe un réseau L' stable par G tel que $\bar{\rho}_{L'}$ est une extension de ϕ_2 par ϕ_1.

1.2. Généralisations et réinterprétation.

1.2.1. Notre objectif dans ce chapitre est de donner diverses généralisations du lemme de Ribet.

1.2.2. Lorsque Laurent Clozel nous avait demandé, au début de notre thèse, de généraliser pour des représentations de dimension supérieure, nous étions parvenu, par une fastidieuse méthode matricielle, au résultat que nous formulons ci-dessous après avoir expliqué une façon commode de représenter les extensions par des graphes :

1.2.3. Soit r est une représentation d'un groupe, de longueur finie, dont les facteurs de Jordan-Hölder $r_1, \ldots, r_k$ sont deux à deux non isomorphes. On lui associe un graphe orienté Γ_r de la manière suivante. Le graphe a k sommets, étiquetés par les facteurs de Jordan-Hölder r_i ; on met une flèche partant de r_i et arrivant à r_j si, et seulement si, on peut trouver un sous-quotient de r qui est une extension non triviale de r_j par r_i.

On peut lire, par exemple, l'indécomposabilité de r sur son graphe : elle revient à ce que le graphe Γ_r soit connexe, en tant que graphe *non orienté*, où l'on ne tient pas compte du sens des flèches.

1.2.4. On reprend les notations de 1.1.1 ; on fait l'hypothèse que les $\bar{\rho}_i$ sont deux à deux distincts, autrement dit, que $\bar{\rho}$ est sans multiplicité.

Pour chaque Λ stable, on dispose de la représentation $\bar{\rho}_\Lambda$ et de son graphe associé $\Gamma_{\bar{\rho}_\Lambda}$ qu'on notera Γ_Λ. Tous ces graphes ont le même ensemble de sommets (les $\bar{\rho}_i$), et on peut considérer le graphe concaténé Γ, qui a lui aussi les $\bar{\rho}_i$ pour sommets, mais qui a une flèche de $\bar{\rho}_i$ vers $\bar{\rho}_j$ si, et seulement s'il existe un Λ stable tel que dans Γ_Λ il existe une flèche de $\bar{\rho}_i$ vers $\bar{\rho}_j$.

THÉORÈME 1.2.5. *Sous les hypothèses précédentes (cf. 1.1.2, 1.1.3, 1.2.4), e graphe* Γ *vérifie la propriété suivante : de n'importe quel point on peut atteindre n'importe quel autre en suivant les flèches.*

1.2.6. La preuve de ce théorème, de nature matricielle, est donnée dans la section 4 de ce chapitre.

1.2.7. Plus tard, Laurent Clozel nous a expliqué la façon dont Serre voyait ces questions d'extensions, dans le cas $n = 2$, en termes d'arbres.

1.2.8. Cette méthode, ainsi que quelque compléments est expliquée dans la partie 2 de ce chapitre.

1.2.9. On peut, avec du travail, la généraliser, et en remplaçant l'arbre de PGL_2 par l'immeuble de PGL_n obtenir une preuve du théorème 1.2.5. Nous ne l'avons pas rédigée, sauf pour $n = 3$, et nous prions le lecteur de nous en excuser, bien qu'à notre avis l'avantage manifeste que présente la preuve "immobilière", plus visuelle, sur la preuve matricielle diminue très vite quand n tend vers l'infini, au fur et à mesure que la dimension de l'immeuble croît et qu'il devient de plus en plus difficile de se le représenter. En fait, pour n grand, on est obligé de reprendre dans la preuve immobilière une combinatoire très analogue à celle que nous donnons dans la preuve matricielle du théorème 1.2.5

1.2.10. Pour $n = 3$, on dispose d'une description très visuelle, sinon de l'immeuble de Bruhat-Tits dans son ensemble (voir cependant Paul Garret, *Buildings and Classical groups*, Chapman and Hall 1997 figures des chapitres 18 et 19) du moins de ses appartements (le pavage hexagonal du plan). Ceci nous permet de donner une preuve très agréable du théorème quand $n = 3$ et même de le préciser quelque peu. C'est ce que nous faisons dans la section 3 de ce chapitre.

Continuant, nous étudions, toujours dans le cas où $n = 3$ un certain nombre de situations particulières se rencontrant dans les applications : celle où la représentation ρ est laissée invariante par l'action d'un automorphisme (extérieur) du groupe G, celle où elle est transformée en sa duale, et puis celle où l'on s'est donné un sous-groupe D de G, et où l'on cherche, sous certaines hypothèses, des réseaux stables par G tels que les représentations réduites associées contiennent des extension non triviales de G, mais qui deviennent triviales après restriction à D.

Ces résultats nous seront indispensables au chapitre VIII, où G sera un groupe de Galois global et D un sous-groupe de décomposition.

2. La méthode de Serre pour démontrer le lemme de Ribet

2.1. Un convexe de l'arbre de $\mathbf{PGL}_2$ associé à ρ.

2.1.1. On note X l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(K)$, sur lequel $\mathrm{GL}_2(K)$ agit. Par abus de langage on note aussi X l'ensemble des sommets de l'arbre.

On renvoie à IV.3.4 pour quelques rappels élémentaires sur cet arbre, et sur la notion d'ensemble de sommets *convexe*. Complétons-les en renvoyant à [**S4**] pour

diverses définitions (demi-droites, bouts, etc.) et l'interprétation des sommets (resp. arêtes, bouts, etc.) de X comme classes d'homothéties de réseaux dans K^2, (resp. etc.), interprétation que nous utiliserons librement.

2.1.2. Soit ρ une représentation continue d'un groupe compact G de dimension 2 sur K. Via ρ, G agit sur X.

2.1.3. On associe à ρ un ensemble S de sommets de l'arbre X, de la manière suivante : l'ensemble S est constitué des sommets $x \in X$ fixes par G.

Vu l'interprétation des sommets de X comme classes d'homothéties de réseaux, un point x appartient à S, si l'un des (ou, ce qui revient au même, tous les) réseaux Λ qui le représentent vérifie(nt) la condition suivante : pour tout $g \in G$, $\exists \lambda \in K^*$, $g\Lambda = \lambda\Lambda$.

Comme G est compact, dans la condition précédente on peut prendre $\lambda = 1$. L'ensemble S est donc *l'ensemble des points de X dont les représentants sont des réseaux stables par G.*

2.1.4. *L'argument de Serre.*

LEMME 2.1.5. *L'ensemble S est non vide.*

Démonstration — La preuve est standard, en utilisant la compacité de G. □

LEMME 2.1.6. *L'ensemble S est convexe.*

Démonstration — Soient x et y deux points de S, i.e. deux points de x fixes par G ; il faut montrer que l'unique géodésique les reliant a tous ses sommets dans S. Mais par unicité, elle est évidemment fixe par G. □

LEMME 2.1.7. *L'ensemble S est fini si et seulement si ρ est irréductible.*

Démonstration — Comme S est convexe, on montre immédiatement à l'aide de l'axiome du choix démombrable que S est fini si et seulement s'il ne contient pas de demi-droite, autrement dit, si G ne stabilise pas de demi-droite.

Or G stabilise une demi-droite si et seulement s'il stabilise un bout b (le sens direct est trivial, le sens réciproque résulte de ce que G est compact, et fixe donc un point $x \in X$: si G fixe un bout b, il fixera la demi-droite issue de x représentant b.)

Enfin, G stabilise un bout si et seulement si l'image de G par ρ est contenue dans un sous-groupe de Borel, i.e. si ρ n'est pas irréductible. □

LEMME 2.1.8. *Soit $x \in S$, Λ un réseau représentant x. Les voisins de x dans S sont en bijection naturelle avec les droites stables de la représentation $\bar{\rho}_\Lambda$. En particulier :*

– *$\bar{\rho}_\Lambda$ n'est pas irréductible si et seulement si x a au moins un voisin dans S.*

– *$\bar{\rho}_\Lambda$ est totalement décomposable (i.e. somme de deux caractères) si et seulement si x a au moins deux voisins dans S.*

Démonstration — Les voisins de x dans X correspondent aux réseaux Λ' tels que $\pi\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda$, donc aux droites dans l'espace vectoriel $\Lambda/\pi\Lambda$ sur $\mathbb{F}$, via la bijection $\Lambda' \mapsto \Lambda'/\pi\Lambda$. Dire qu'un voisin est dans S revient à dire que la droite qui lui est associée est stable. Dire que x a un voisin (resp. deux voisins) dans S revient donc à dire que $\bar{\rho}_\Lambda$ laisse stable une (resp. deux droites). Le lemme en découle. □

PROPOSITION 2.1.9. – *$\bar{\rho}$ est irréductible si et seulement si S est réduit à un point, et on a alors ρ irréductible.*
– *Si $\bar{\rho}$ est réductible et ρ irréductible, il existe un réseau stable Λ tel que $\bar{\rho}(\Lambda)$ est une extension non triviale.*

Démonstration — Si $\bar{\rho}$ est irréductible, c'est que tous les $\bar{\rho}_\Lambda$ le sont, donc que tous les $x \in S$ n'ont pas de voisins dans S (lemme 2.1.8). Comme S est convexe non vide, ceci équivaut à dire que S est un singleton. De plus, S est alors fini, donc ρ est irréductible (lemme 2.1.7), ce qui prouve la première assertion.

Sous les hypothèses de la deuxième assertion, on sait que S est convexe et non réduit à un point (lemme 2.1.8). L'ensemble S possède donc un point extrémal (voir par exemple lemme IV.3.4.6), i.e. un point qui n'a qu'un seul voisin dans S. La proposition résulte alors du lemme 2.1.8 □

2.2. Compléments.

2.2.1. Ceci prouve presque le lemme de Ribet, mais pas encore tout à fait, car si ρ est irréductible tandis que $\bar{\rho}$ a deux facteurs ϕ_1 et ϕ_2, la proposition précédente montre l'existence d'une extension non triviale entre ces deux caractères, mais sans préciser s'il s'agit d'une extension de ϕ_1 par ϕ_2 ou l'inverse.

2.2.2. Pour prouver le lemme de Ribet, on peut supposer que $\phi_1 \neq \phi_2$, sans quoi ce qui précède suffit. On dit alors que $\bar{\rho}$ est *sans multiplicité.*

LEMME 2.2.3. *Si $\bar{\rho}$ est sans multiplicité, l'ensemble S est un segment géodésique.*

Démonstration — Soit $x \in S$, représenté par un réseau Λ. Si $\bar{\rho}_\Lambda$ est extension (triviale ou non) de deux caractères *distincts*, il a au plus deux droites stables, donc x a au plus deux voisins dans S. Le lemme en découle. □

2.2.4. Plus précisément, si $x \in S$, ces voisins dans S peuvent être dits de type 1 ou 2 selon qu'ils correspondent à une droite stable de ρ_λ sur laquelle G agit par ϕ_1 ou par ϕ_2. Si y est un voisin de type 1 de x, x est un voisin de type 2 de y. Il est alors clair que S a exactement deux points extrémaux, disons a et b, tels que l'unique voisin de a dans S est un voisin de type 1 (disons) et l'unique voisin de b dans S est un voisin de type 2. On a donc montré le résultat suivant, légèrement plus précis que le lemme de Ribet.

PROPOSITION 2.2.5. *Si ρ est irréductible, et $\bar{\rho}$ somme de deux caractères distincts ϕ_1 et ϕ_2, il existe exactement deux réseaux Λ (à homothéties près) stable par G, tels que $\bar{\rho}_\Lambda$ est une extension non triviale. Pour l'un de ces réseaux, $\bar{\rho}_\lambda$ est une extension de ϕ_1 par ϕ_2, et pour l'autre, de ϕ_2 par ϕ_1.*

3. Le cas $n = 3$

Dans cette partie, on suppose que ρ est une représentation irréductible de dimension 3, et que $\bar{\rho}$ est complètement réductible somme de trois caractères ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3. On fait de plus l'hypothèse que $\bar{\rho}$ est *sans multiplicité* , i.e. que les ϕ_i sont deux à deux distincts.

3.1. Connexité.

3.1.1. On note $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-Tits de PGL_3, X l'ensemble de ses sommets. On renvoie à V.2.1 et à V.3.1 pour tous les rappels nécessaires sur cet immeuble.

3.1.2. On associe à ρ l'ensemble S des sommets de l'immeuble X correspondant à des réseaux stables par G.

LEMME 3.1.3. *Soit $x \in S$, et Λ un réseau représentant x. L'ensemble des voisins y de x dans S tel que $[x\,y]$ est dans le bon sens (resp. mauvais sens – cf. V.3.1.1) correspond naturellement à l'ensemble des sous-représentations de dimension 1 (resp. 2) de $\bar{\rho}_\Lambda$*

Démonstration — Si y est voisin de x dans S, il correspond à un réseau Λ' tel que $\pi\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda$ donc à un sous-espace $\Lambda'/\pi\Lambda$ de $\Lambda/\pi\Lambda$ qui est l'espace de la représentation ρ_Λ. Ce sous-espace est de dimension 1 ou 2 (selon le type de l'arête $[xy]$, et il est stable par G si et seulement si Λ' l'est i.e. $y \in S$. □

LEMME 3.1.4. *L'ensemble S contient une chambre.*

Démonstration — L'ensemble S est non vide par compacité de G. Soit $x \in S$. La représentation $\bar{\rho}_x$ est, par hypothèse, trigonalisable, elle fixe donc une droite et un plan. D'après le lemme précédent, cela signifie que z a deux voisins dans S au moins, un de chaque type. Avec x, ils forment une chambre contenue dans S. □

LEMME 3.1.5. *L'ensemble S est clos.*

Démonstration — Puisque S contient une chambre, cela résulte de la proposition 2.4.13 de [**B-T**]. □

LEMME 3.1.6. a) *Si $x \in S$, il existe un appartement contenant tous les voisins de x dans S.*
b) *L'ensemble S est inclus dans un appartement.*

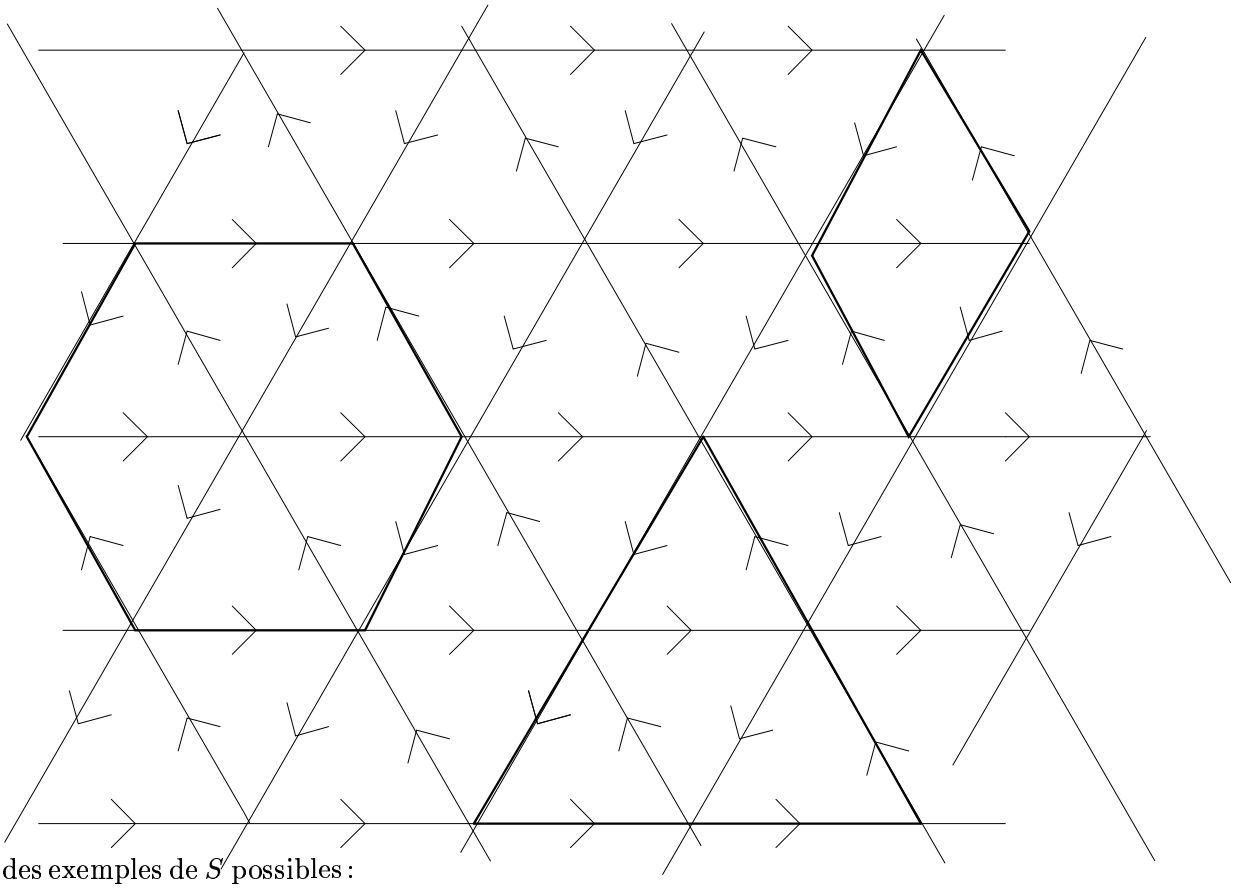
Démonstration — Soit Λ un réseau représentant x. L'hypothèse de multiplicité 1 implique que l'ensemble des sous-espaces de $\Lambda/\pi\Lambda = \mathbb{F}^3$ stables par G est inclus dans un appartement de l'immeuble sphérique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F})$. Cet immeuble sphérique s'identifie naturellement à l'ensemble de s voisins de x dans X de manière telle à ce que tout appartement de l'immeuble sphérique soit la trace d'un appartement de X. Le point a) en découle.

Si $\{x, y\}$ est une arête de S, et si $z_1, \ldots, z_k$ sont des éléments distincts de S tels que $\{x, y, z_i\}$ est une chambre pour $i = 1, \ldots, k$, tous les z_i et y sont voisins de x, et il découle du point a) que tout ce beau monde est dans un même appartement. Or il est clair (voir figure page suivante) que dans un appartement, on doit avoir $k \leq 2$. Autrement dit, toute arête (= cloison) de S appartient a au plus deux chambres. Le fait que S est contenu dans un appartement résulte alors de la preuve de la proposition 2.8.5 de [**B-T**]. □

LEMME 3.1.7. *L'ensemble S est fini.*

Démonstration — Soit (e_1, e_2, e_3) une base de K^3 définissant un appartement contenant S. À tout point s de S correspond un réseau stable par G de la forme $\mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}\pi^a e_1 \oplus \mathcal{O}\pi^b e_1$, avec a et b bien déterminés. Si S est infini, quitte à permuter les éléments de la base e_i, on peut supposer qu'il y a une infinité de $s \in S$ tels que $0 \leq a \leq b$. En particulier, on peut trouver une suite s_n d'éléments de N tels que (b_n) tend vers l'infini, et tel que (a_n) soit tend vers l'infini, soit est borné. On voit alors facilement que le sous-espace Ke_1 dans le premier cas (resp. $Ke_1 \oplus Ke_2$ dans le second cas) de K^3 est laissé stable par G, contredisant l'irréductibilité de ρ. □

3.1.8. Maintenant qu'on sait que S vit dans un appartement, qui est un espace euclidien de dimension 2, on peut utiliser toutes les notions de géométrie euclidienne plane standard. On voit déjà que S est un polygone convexe.

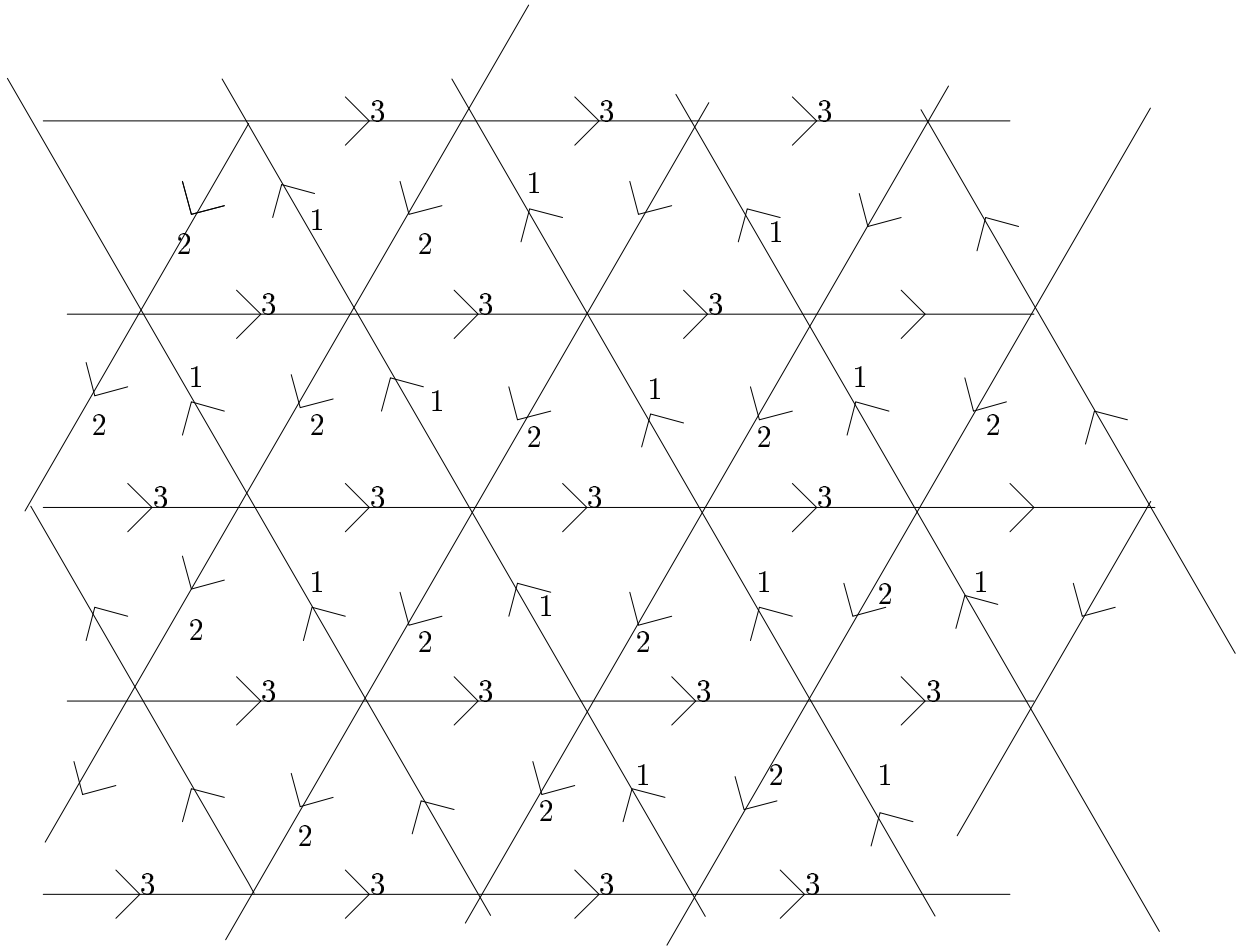


Voilà des exemples de S possibles :

Remarque. Le polygone convexe a au plus 6 (et au moins 3) sommets (nous dirons plutôt *points anguleux*, pour ne pas confondre avec les sommets de X). Pour le voir, noter que la somme des $\pi - \alpha_i$ où les α_i désigne les points anguleux intérieurs du polygones est toujours égal à π. Ici, les α_i ne peuvent valoir que $\pi/3$ ou $2\pi/3$, et donc le nombres de points anguleux est plus petit que 6.

3.1.9. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de K^3 définissant un appartement A qui contient S, et telle que le réseau $\Lambda = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3$ corresponde à un point de S. Alors les réductions $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ forment une base de $\Lambda/\pi\Lambda$, on peut supposer que dans cette base, la matrice de $\bar{\rho}$ a pour coefficients diagonaux, dans l'ordre, ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3

Ceci permet de définir un marquage $\{1, 2, 3\}$ des flèches de A : si x est un point de A, correspondant à un réseau de coordonnées (a, b, c) et si y est un voisin de x dans A de type 1, il lui correspond un réseau de coordonnées $(a + 1, b, c)$ ou $(a, b + 1, c)$ ou $(a, b, c + 1)$. La flèche (x, y) est dite de type 1, 2 ou 3 selon ces trois cas. On dessine ce marquage :



Si (x, y) désigne une arête de S dans le bon sens de type i ($i = 1, 2, 3$), alors y définit une droite stable dans $\bar{\rho}_x$, sur laquelle G agit par ϕ_i : pour voir cela, il suffit de noter que si x est de coordonnées (a, b, c) comme ci-dessus, correspondant à un réseau Λ' engendré par $\pi^a e_1, \pi^b e_2, \pi^c e_3$, la matrice de ρ dans cette base a pour coefficient diagonaux, dans l'ordre, des fonctions de G se réduisant modulo p en ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Cette dernière assertion est vraie pour le réseau Λ initial, et reste vraie pour tout point de A parce qu'un changement de point revient à changer la matrice de ρ par la conjugaison par une matrice diagonale, opération qui ne change pas les coefficients diagonaux.

3.1.10. On voit facilement qu'un $x \in S$ est un point anguleux si et seulement s'il n'a pas de voisins diamétralement opposés, et que ceci équivaut à $\bar{\rho}_x$ indécomposable.

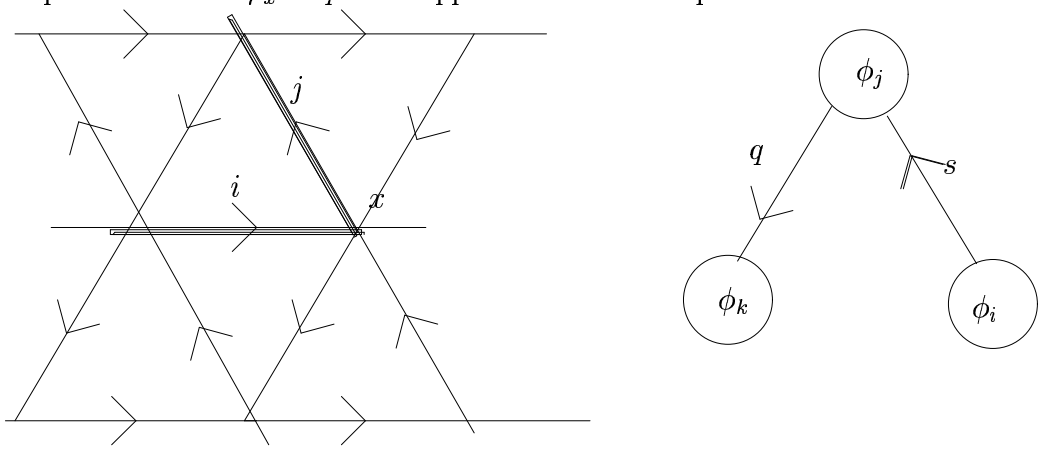
Les assertions suivantes sont tout aussi évidentes - sur le dessin, ou avec un peu de réflexion :

Un point anguleux x de S a soit deux, soit trois voisins dans S (ce qui correspond respectivement aux cas $\alpha = \pi/3$, $\alpha = 2\pi/3$ de la remarque ci-dessus).

Si le point anguleux x a deux voisins dans S exactement, autrement dit s'il y a deux flèches de S passant par x, l'une a x pour origine et l'autre a x pour but (nous dirons que la première est *rentrante* et l'autre *sortante*). Si la première est de type $i \in \{1, 2, 3\}$, et la seconde de type j, on a nécessairement $i \neq j$, et l'on voit

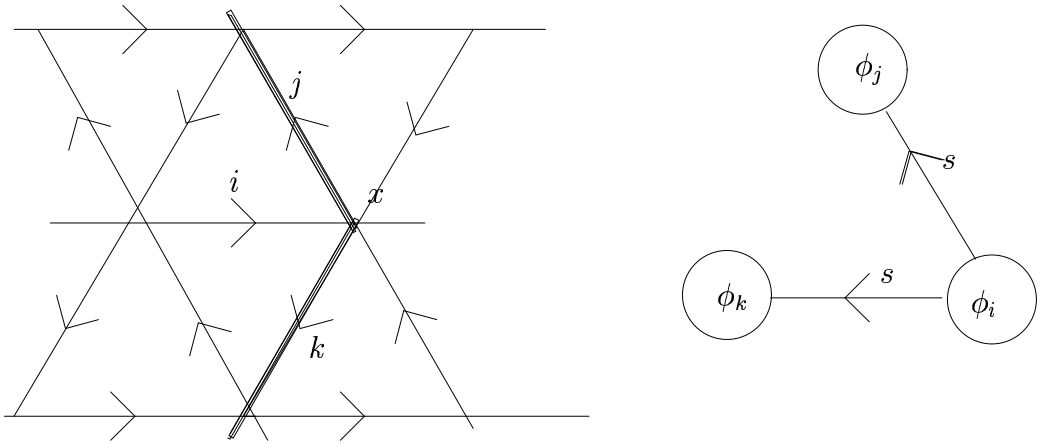
que $\bar{\rho}_x$ a exactement une droite et un plan stables (qui forment un drapeau). Sur la droite, G agit par ϕ_i et sur le plan quotienté par la droite, par ϕ_j. On a donc une extension non triviale de ϕ_j par ϕ_i (comme sous-représentation de $\bar{\rho}_x$ et une de ϕ_k par ϕ_j (comme quotient – k désigne l'élément de $\{1, 2, 3\}$ différent de i et de j).

Sur le dessin suivant, on a représenté à gauche le voisinage immédiat du point anguleux x considéré et à droite le graphe Γ_x de la représentation $\bar{\rho}_x$ associée. Sur ce graphe, on a noté s les arêtes correspondant à des extensions apparaissant comme sous-représentation de $\bar{\rho}_x$ et q celles apparaissant comme quotient :

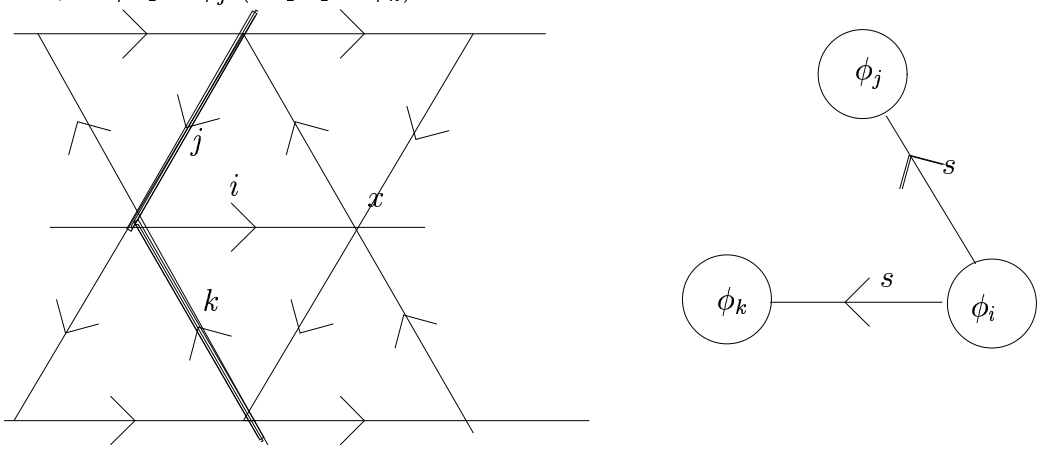


Si le point anguleux x a trois voisins dans S, parmi les trois flèches de S qui passent par x il y en a deux rentrantes et une sortante ou bien deux sortantes et une rentrante.

Dans le premier cas, si i désigne le type de la flèche rentrante, les types des flèches sortantes sont j et k, différents et distincts de i. La représentation ρ_x a une droite stable (sur laquelle G agit par ϕ_i) et deux plans stables (contenant la droite), qui sont des extensions non scindées de ϕ_j (resp. de ϕ_k) par ϕ_i



Dans le second, si i désigne le type de la flèche sortante, les types des flèches rentrantes sont j et k, différents et distincts de i. La représentation ρ_x a deux droites (et un plan les contenant) stables, et contient comme quotient deux extensions non triviales, de ϕ_i par ϕ_j (resp. par ϕ_k).



3.1.11. Il est clair vu cette description que si deux points anguleux x et x' définissent des représentations $\bar{\rho}_x$ et $\bar{\rho}_{x'}$ isomorphes, ces deux points anguleux sont du même genre (i.e. avec le même nombre de flèches rentrantes et sortantes, et les mêmes types de ces flèches.) Il est également clair que S ne peut avoir deux points anguleux du même genre.

3.1.12. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Les flèches ϕ_i définissent tous un même vecteur dans l'espace vectoriel associé à l'espace affine euclidien de l'appartement considérer. Ce vecteur définit par dualité, via le produit scalaire naturel, une forme affine (définie à un l'addition d'un réel prés) sur cet espace affine, et on peut considérer un point de S qui minimise cette forme affine.

Il est clair qu'un tel point x est un point anguleux de S et que c'est l'origine d'une arête rentrante de type i de S. D'après la description ci-dessus, $\bar{\rho}_x$ contient soit deux extensions de ρ_j et ρ_k par ρ_i soit une extension de ρ_j par ρ_i et de ρ_k par ρ_i (pour un choix adéquat de (j, k) tels que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$). Dans tous les cas, on voit que si l'on trace le graphe dont les sommets sont les $i \in \{1, 2, 3\}$ et les arêtes

orientés (i, j) les extensions non triviales de ϕ_j par ϕ_i, on peut aller en suivant les flèches de i à j et à k.

En résumé, on a donc prouvé le théorème 1.2.5 dans notre cas, et aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1.13. *Il y a entre* 3 *et* 6 *réseaux stables par* G *qui définissent des représentations résiduelles indécomposables. Ces représentations sont deux à deux non isomorphes ; elles sont mêmes caractérisés par la donnée des extensions non triviales qu'elles contiennent comme sous-représentations d'une part, comme quotient d'autre part.*

3.1.14.

REMARQUE. Les points du bord du polygone S qui ne sont pas des points anguleux, définissent eux aussi des représentations qui ne sont pas semi-simples. Si x un point non anguleux d'un côté du polygone S, ce côté a un type i (au sens où il est constitué de flèches du même type i) ; il part de x une et une seule arête rentrante dans S, de type $j \neq i$ disons. Alors si $k \neq i, j$ $\bar{\rho}_x$ contient comme facteur direct une extension non scindée de ϕ_j par ϕ_k.

3.2. Représentations invariantes par un automorphisme de G.

3.2.1. On garde les notations et hypothèses de la partie précédente, mais on se donne maintenant un automorphisme τ de G. On note ρ^τ la représentation de G définie par

$$\rho^\tau(g) = \rho(\tau(g)).$$

On fait l'hypothèse que ρ_τ est isomorphe, comme représentation de G sur K, à ρ, i.e. que ρ est invariante par τ.

Il existe donc un opérateur d'entrelacement φ, automorphisme de V, tel que

$$\forall g \in G, \varphi\rho(g) = \rho(\tau(g))\varphi. \tag{38}$$

L'opérateur φ induit une application (notée φ_*) sur l'immeuble X associé à V. Comme ρ et ρ^τ ont même ensemble de réseaux stables, l'ensemble S est stable par φ_*.

3.2.2. Si $x \in S$ est représenté par un réseau Λ, le réseau $\varphi(\Lambda)$ représente $\varphi_*(x)$, et l'application $\varphi : \Lambda \to \varphi(\Lambda)$ passe au quotient et définit un isomorphisme entre $\Lambda/\pi\Lambda$ et $\varphi(\Lambda)/\pi\varphi(\Lambda)$ qui est, d'après 38, un opérateur d'entrelacement entre $\bar{\rho}_x$ et $\bar{\rho}^\tau_{\varphi_* x}$.

3.2.3. Les facteurs de composition de $\bar{\rho}_x$ sont ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3, ceux de $\bar{\rho}^\tau_{\varphi_* x}$ sont ϕ_1^τ, ϕ_2^τ et ϕ_3^τ. On voit donc que

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} = \{\phi_1^\tau, \phi_2^\tau, \phi_3^\tau\}.$$

3.2.4. Faisons maintenant une hypothèse supplémentaire : on suppose que pour $i = 1, 2, 3$ $\phi_i = \phi_i^\tau$.

Sous cette hypothèse, si $\bar{\rho}_x$ admet un sous-espace stable qui est une extension non triviale de ϕ_i par ϕ_j, $\bar{\rho}_{\varphi_*(x)}$ admettra un sous-espace stable (l'image du précédent par $\bar{\varphi}$) qui sera encore une extension non triviale de ϕ_i par ϕ_j et la même assertion vaut pour un quotient. Si de plus x est choisi parmi les points anguleux de S, $\varphi_*(x)$ est encore un point anguleux de S, et la proposition 3.1.13 implique que $\varphi_*(x) = x$.

La proposition 3.1.13) a alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.2.5. *On suppose ρ absolument irréductible. Supposons que G soit un sous-groupe distingué (ouvert) d'indice fini d'un groupe compact H. Le groupe H agit par conjugaison sur G. On suppose :*

a) $\forall h \in H, \rho^h \simeq \rho$

b) $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\forall h \in H$, $\phi_i^h \simeq \phi_i$

c) $H^2(H/G, \mathbb{F}) = H^2(H/G, \mathbb{F}^*) = 0$ *pour l'action triviale de H/G sur $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^*$.*

Alors ρ s'étend en une représentation continue r de H dans V. De plus, r est résiduellement somme de trois caractères, et son ensemble S est le même que celui de ρ.

Démonstration — (comparez avec [**CL2**], proposition 1.1).

Soit x un point anguleux de S. Pour $h \in H$, on a $\rho^h = \varphi_h \rho \varphi_h^{-1}$ où φ_h est un automorphisme K-linéaire de V. Pour tout $h \in H$, d'après 3.2.4, on a $(\varphi_h)_* x = x$. On identifié φ_h à sa matrice dans une base de V qui est aussi une base d'un réseau associé à x, on voit que $\forall h \in H$, $\phi_h \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O})$.

La fin de la preuve se fait exactement comme dans [**CL2**]. □

3.2.6.

REMARQUE. Nous ne l'avons pas rédigé, mais nous nous sommes convaincu que l'analogue de la proposition 3.1.13 est vraie sans la restriction $n = 3$, et sans supposer que les ρ_i sont de dimension un (mais en supposant toujours qu'ils sont deux à deux distincts). On en déduirait par la même méthode un corollaire plus général, qui affirmerait que pour ρ une représentation de G, stable par H (i.e. qui vérifie a)), et telle que les ρ_i sont distincts et eux aussi stables par H, alors ρ se prolonge à H sous l'hypothèse cohomologique c).

Sous cette forme, le corollaire généralise la proposition 1.1. de [**CL**], qui suppose elle que la réduite $\bar{\rho}$ est irréductible. Notons que l'hypothèse de stabilité a) est une condition nécessaire évidente, et que l'hypothèse de stabilité des ρ_i est assez facile à vérifier en pratique.

Quand à l'hypothèse cohomologique, la suite de l'article [**CL2**] montre un certain nombre de cas non triviaux où elle est satisfaite.

3.3. Représentations changées en leur contraposée par un automorphisme de G.

3.3.1. Soit τ un automorphisme de G tel que

$$\rho^\tau \simeq \rho^*,$$

où ρ^* désigne la représentation contraposée de ρ, dont l'espace est le dual V^* de V.

On a donc un isomorphisme de K-espaces vectoriels ϕ de V dans V^* tel que

$$\forall g \in G,\ \rho(\tau(g)) = \varphi^{-1}\rho^*(g)\varphi. \tag{39}$$

3.3.2. Si Λ est un réseau de V, on note Λ^* le réseau dual dans V^*. L'application $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ passe au quotient et définit une bijection naturelle b entre l'ensemble des sommets de l'immeuble X de $\mathrm{PGL}(V)$ et celui de l'immeuble X^* de $\mathrm{PGL}(V^*)$. Cette application respecte la structure simpliciale de X et de X^* (i.e. elle envoie arête sur arête et face sur face) mais elle inverse le sens des flèches.

Il est clair que si S (resp S^*) est l'ensemble des sommets de X (resp. de X^*), correspondant à un réseau stable par ρ (resp ρ^*), on a

$$S^* = b(S).$$

3.3.3. Par ailleurs l'application φ induit une application φ_* de X dans X^* qui est un isomorphisme d'immeubles respectant tant la structure simpliciale que le type des arêtes (i.e. le sens des flèches). On déduit immédiatement de (39) que

$$\varphi_*(S) = S^*.$$

3.3.4. L'application $\psi := b^{-1}\varphi_*$ (qui est un anti-automorphisme de X, i.e. un automorphisme de l'ensemble simplicial X inversant le sens des flèches) laisse donc stable l'ensemble S. Si $x \in S$, φ induit par passage au quotient un isomorphsime

$$\bar{\rho}_x^\tau \simeq \bar{\rho}^*_{\psi(x)}.$$

En particulier, ces deux représentation ont même facteurs de Jordan-Hölder :

$$\{\phi_1^\tau, \phi_2^\tau, \phi_3^\tau\} = \{\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1}, \phi_3^{-1}\}.$$

3.3.5. On déduit facilement de ceci le résultat suivant :

LEMME 3.3.6. *Si une extension apparaît comme sous-quotient d'un ρ_Λ, l'extension duale apparaît comme sous-quotient d'un $\rho_{\Lambda'}$.*

3.4. Cas d'un sous-groupe agissant via un sous-groupe de Borel d'un sous-groupe de Levi.

3.4.1. *Sous-groupes de Borel-Levi.* On appellera ici *sous-groupe de Borel-Levi* de $\mathrm{GL}_3(K)$ tout groupe conjugué au groupe suivant (qu'on appelle *Borel-Levi standard*) :

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \tag{40}$$

Autrement dit, un Borel-Levi est le fixateur d'un triplet (D_1, D_2, P) où D_1 et D_2 sont des droites de K^3, P un plan de K^3, vérifiant $D_1 \subset P$ et $D_2 \oplus P = K^3$. Un Borel-Levi de GL_3 est un Borel d'un sous-groupe de Levi non trivial (différent d'un tore).

3.4.2. *Demi-appartements.* On appelle *demi-appartement* (au sens combinatoire) d'un appartement A la trace sur A d'un demi-appartement (au sens de [**B-T**], définition 2.2.2). Il est clair qu'un demi-appartement peut toujours se décrire, pour une base e_1, e_2, e_3 bien choisie, comme l'ensemble des sommets de l'appartement associé à cette base, de coordonnées (par rapport à cette base) (a, b, c) avec $b \geq a$.

Les notions de point *du bord* et de point *intérieur* d'un demi-appartement sont évidentes. Dans l'exemple précédent, les points du bord sont ceux qui vérifient $a = b$, autrement dit ceux qui admettent pour coordonnées $(0, 0, c)$.

En utilisant le fait qu'une matrice laisse fixe le réseau $\pi^{-a}Ke_1 \oplus \pi^{-b}Ke_2 \oplus \pi^{-c}Ke_3$ si et seulement si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \pi^{b-a}* & \pi^{c-a}* \\ \pi^{a-b}* & * & \pi^{c-b}* \\ \pi^{a-c}* & \pi^{b-c}* & * \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}),$$

on voit que le stabilisateur du demi-appartement décrit ci-dessus est l'intersection du Borel-Levi standard avec $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O})$.

3.4.3. *Classes d'équivalences de demi-appartements.* On dit que deux demi-appartements sont *équivalents* s'ils contiennent un demi-appartement commun. On voit facilement que ceci définit une relation d'équivalence, compatible à l'action de $\mathrm{GL}_3(K)$.

Étant donné un point x de X et une classe d'équivalence de demi-appartements C, il y a un et un seul demi-appartement (noté $C(x)$) dans la classe C qui admet x comme point du bord. Notons que si $y \in C(x)$, $C(y) \subset C(x)$.

Dans un même appartement A deux demi-appartements sont équivalents si et seulement s'ils sont translatés l'un de l'autre (en tant que sous-ensemble de $\mathcal{A}$). Une classe C de demi-appartements dont l'un au moins est inclus dans A définit donc à un scalaire près une forme affine l sur $\mathcal{A}$, et tous les demi-appartements de

la classe C dans A sont définis par une inégalité $l(x) \leq l_0$ pour $x \in X$. Le nombre réel l_0 est la valeur que prend l sur les points du bord du demi-appartement.

LEMME 3.4.4. *Le stabilisateur dans $GL_3(K)$ d'une classe d'équivalence de demi-appartements est un Borel-Levi, et ceci définit une bijection entre les classes d'équivalence de demi-appartements et les Borel-Levi.*

Démonstration — Cela résulte aisément de ce qui précède. □

3.4.5. On suppose maintenant que G possède un sous-groupe fermé (donc compact) D, tel que $\rho(D)$ soit contenu dans un Borel-Levi de $\mathrm{GL}_3(K)$. On notera C la classe de demi-appartements associée à ce Borel-Levi. On suppose aussi que la représentation $\bar{\rho}$ reste sans multiplicité une fois restreinte à D, autrement dit que les caractères $\phi^1_{|D}, \phi^2_{|D}, \phi^3_{|D}$ sont deux à deux distincts.

3.4.6. Notons S_D l'ensemble des sommets de X qui correspondent à des réseaux stables par D. On a $S \subset S_D$.

3.4.7. Notons que si $x \in S_D$, on a $C(x) \subset S_D$ (puisque D fixe x et C, il fixe l'*unique* demi-appartement de la classe C ayant x comme point du bord)

3.4.8. Soit A un appartement qui contient S_D. Un tel appartement existe d'après le lemme 3.1.6, applicable à D à cause de l'hypothèse de multiplicité 1 pour D. Un tel appartement contient *a fortiori* S.

Soit l une forme affine sur $\mathcal{A}$ associée à C. Soit $l_0 = \sup_S l$. Il est clair que le maximum est atteint par un point anguleux x (tous les points de S tels que $l(x) = l_0$ forment un segment sur une droite. Une extrémité de ce segment est nécessairement un point anguleux de S). Il existe des points y de S tels que $l(y) < l_0$, sinon S serait contenu dans une droite et ne pourrait être clos. Le point x est alors un point intérieur de $C(y)$ et cet ensemble est inclus dans S_D. Considérons la représentation réduite $\bar{\rho}_x$ associée à x. Comme x est un point anguleux de S, $\bar{\rho}_x$ est indécomposable (3.1.10) ; par ailleurs, x est un point intérieur à $C(y)$ donc possède 6 voisins dans $C(y)$, qui sont tous dans S_D puisque $C(y) \subset S_D$. On en déduit (lemme 3.1.3 appliqué à D) que la restriction $(\bar{\rho}_x)_D$ de $\bar{\rho}_x$ à D est totalement décomposée. On a donc prouvé :

PROPOSITION 3.4.9. *Avec les hypothèses de cette sous-section, il existe un réseau Λ tel que $\bar{\rho}_\Lambda$ est indécomposable comme représentation de G et totalement décomposable une fois restreinte à D.*

3.5. Combinaison des deux précédentes situations.

3.5.1. On fait maintenant les hypothèses des deux précédentes sous-sections : rappelons-les.

Comme toujours $\rho : G \to \mathrm{GL}_3(K)$ est une représentation irréductible continue du groupe compact G. La réduite semi-simplifiée $\bar{\rho}$ est somme de trois caractères ϕ_i, $i = 1, 2, 3$.

On se donne un automorphisme τ de G, tel que $\rho^\tau \simeq \rho^*$. Rappelons que cela implique que $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} = \{\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*\}$. Parmi les différentes manières de satisfaire cette égalité, on en choisit une : on suppose que

$$\phi_1^* = \phi_3^\tau, \phi_2^* = \phi_2^\tau, \phi_3^* = \phi_1^\tau.$$

Soit enfin D est un sous-groupe compact de G, tel que $\rho(D)$ soit contenu dans un Borel-Levi, et tel que les restrictions à D ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 soient encore deux à deux distinctes.

Noter qu'on ne suppose pas que $D = D^\tau$.

3.5.2. On dispose alors d'un anti-automorphisme ψ de l'immeuble X qui stabilise S (cf. 3.3.4). Notons que les hypothèses nous disent comment agit ψ sur le marquage des arêtes) (cf. 3.1.9) : ψ envoie une arête marquée i sur l'arête marquée $4 - i$.

Si l'on note S_D et S_{D^τ} les ensembles de points fixes X par D et D^τ, on a

$$\psi(S_D) = S_{D^\tau}.$$

(Pour le voir, revenons à la définition de $\psi = b^{-1}\phi^*$. Il résulte de 39 que l'application φ_* envoie S_D sur $S^*_{D^\tau}$, où $S^*_{D^\tau}$ désigne l'ensemble des réseaux stables par ρ^* dans X^*. Comme on a $b(S_D) = S^*_D$ et $b(S_{D^\tau}) = S^*_{D^\tau}$, le résultat en découle.)

Enfin, notons que $\rho(D^\tau)$ est encore inclus dans un Borel-Levi, car la transposée d'un Borel-Levi est un Borel-Levi.

3.5.3. Sous nos hypothèses, les ensembles S_D et S_{D^τ} sont soit (tous deux) des demi-appartements, soit (tous deux) des appartements. En effet, il suffit de le montrer pour S_D, puisque $\psi(S_D) = S_{D^\tau}$ qui est inclus dans un appartement d'après le lemme 3.1.6, applicable à D. Si C désigne la classe de demi-appartements associée à un Borel-Levi contenant D, et l une forme affine sur A associée, on voit immédiatement que $S_D = A$ si l est non majorée sur S_D, et que S_D est le demi-appartement défini par $l(X) \leq l_0$ si l_0 est la borne supérieure de $l(S_D)$.

Proposition 3.5.4. *Avec ces hypothèses, et quitte à remplacer K par une extension ramifiée de degré 2, on dispose comme sous-quotient d'un $\bar{\rho}_x$*

1) *Soit d'une extension non scindée de ϕ_2 par ϕ_1 et d'une autre de ϕ_3 par ϕ_2.*
2) *Soit d'une extension non scindée de ϕ_3 par ϕ_1, qui devient scindée si on la restreint à D ou à D^τ.*
3) *Soit d'une extension non scindée de ϕ_1 par ϕ_2, et d'une extension non scindée de ϕ_2 par ϕ_3, qui deviennent scindées si on les restreint à D ou à D^τ.*

Remarque. Comme les hypothèses sont symétriques en ϕ_1 et ϕ_3, l'énoncé obtenu en intervertissant partout ϕ_1 et ϕ_3 dans la proposition précédente est vrai aussi. Il ne dit pas tout à fait la même chose.

Démonstration —

Si K' est une extension ramifiée de degré 2 de K (par exemple $K' = K(\sqrt{\pi})$), l'immeuble X' de $\mathrm{PGL}_3(K')$ s'obtient en rajoutant à X les milieux de chaque arêtes (en effet, si $[x, y]$ est une arête de X, avec x représenté par $\mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3$ et y par $\pi\mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3$ (resp $\pi\mathcal{O}e_1 + \pi\mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3$) il s'introduit au milieu de cette arête la classe du réseau $\sqrt{\pi}\mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3$ (resp.$\sqrt{\pi}\mathcal{O}e_1 + \sqrt{\pi}\mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3$)), et d'autres appartements, correspondant à des tores non définis sur K, qui eux ne contiennent aucun point de X.

Considérant ρ comme un morphisme de G vers $\mathrm{GL}_3(K')$, le nouvel ensemble S' associé à ρ vérifie $S' \cap X = S$. De plus, il est clair que $\rho : G \to Gl_3(K')$ vérifie encore l'hypothèse que $\bar{\rho}_{ss}$ est sans multiplicité, si bien que S' est nécessairement contenu dans un appartement, et comme S' contient S, c'est un appartement venant de X, i.e. correspondant à un tore défini sur K. Vue la description ci-dessus des points d'un tel appartement, on déduit du fait que S est fini et que S' est un clos le fait que S' est nécessairement fini, donc que ρ est encore irréductible[1] sur K', et aussi que chaque coté de S' possède un point qui n'est pas l'une de ses extrémités.

On peut donc supposer, quitte à remplacer K par K' que chaque coté du polygone S contient un point qui n'est pas l'une de ses extrémités. Ainsi, à chaque côté de S est associé une extension non triviale, et deux côtés différents donnent des extensions différentes.

Notons aussi que les cas 1) et 3) affirment l'existence de deux extensions avec certaines propriétés. Dans chaque cas, il suffit en fait de prouver l'existence de l'une d'entre elles vu le lemme 3.3.6, car l'autre est duale de la première.

Par ailleurs, on a $S \subset (S_D \cap S_{D^\tau})$. Notons Δ, Δ^τ les droites formant le bord de S_D et de S_{D^τ}, si ce sont des demi-appartements. Si ce sont des appartements, on pose $\Delta = \Delta^\tau = \emptyset$.

Les points x des côtés de S qui ne sont pas dans $\Delta \cup \Delta^\tau$ définissent des réductions $\bar{\rho}_x$ qui sont diagonalisables une fois restreintes à D ou à D^τ (puisqu'un tel point x appartient à l'intérieur de S^D, et a donc 6 voisins dans S_D, ce qui donne 6 sous-espaces propres stables pour $\bar{\rho}_x$, ce qui implique clairement la diagonalisabilité de $(\bar{\rho}_x)_{|D}$; même raisonnement pour D^τ.)

Comme S a au moins trois côtés, il y a donc bien un côté qui n'est pas contenu dans $\Delta \cup \Delta^\tau$.

S'il y en a deux (au moins), chacun d'eux donne une extension non triviale (cf. la remarque 3.1.14) qui devient scindée sur D et sur D^τ. Dans ce cas, parmi ces deux (au moins) extensions, il y en a forcément une qui apparaît parmi les 5 extensions des cas 1) 2) et 3) de la proposition (puisqu'il y a six extensions possibles au total), et ceci prouve la proposition.

1. On aurait pu se passer de ce raisonnement en supposant que ρ est géométriquement irréductible, ce qui sera le cas dans nos applications de cette proposition

On peut donc supposer que S n'a qu'un seul côté qui n'appartient pas à $\Delta \cup \Delta^\tau$. Il est alors clair que dans ce cas S est un triangle, dont deux côtés ont pour support Δ et Δ^τ, qui sont des droites bordant les *demi-appartements* S_D et S_{D^τ}. Les droites Δ (resp. Δ^τ)sont constitués d'arêtes qui ont toutes le même marquage. Ceci définit un marquage 1, 2, ou 3 attaché à chacune de ces deux droites. Il résulte de 3.5.2 que le marquage de Δ^τ est 3, 2 ou 1 si le marquage de Δ est 1, 2 ou 3 respectivement. Comme les trois côtés du triangle ont des marquages différents, c'est donc que le marquage de Δ et Δ^τ est 1 et 3 (ou l'inverse).

Le troisième côté est donc constitué d'arêtes marquées 2. Considérons un sommet à l'intérieur de ce côté. Toujours d'après 3.1.14 ce point donne un extension non scindée de ϕ_3 par ϕ_1, ou bien de ϕ_1 par ϕ_3, qui devient scindée sur D et D^τ. S'il s'agit d'une extension de ϕ_3 par ϕ_1, on a prouvé le point 2) de la proposition, donc la proposition elle-même. S'il s'agit au contraire d'une extension de ϕ_1 par ϕ_3, considérons des sommets à l'intérieur des deux premiers côtés du triangle S. Ces points donnent (d'après 3.1.14, encore une fois) des extensions de ϕ_2 par ϕ_1 et ϕ_3 par ϕ_1, et même si l'on ne peut plus affirmer que ces extensions deviennent scindées une fois restreintes à D et D^τ, on a néanmoins prouvé le point 1), donc la proposition. □

4. Preuve du théorème 1.2.5

4.1. Une généralisation directe du lemme de Ribet.

4.1.1. On a besoin de deux lemmes techniques. Le premier est trivial.

LEMME 4.1.2. *Soit r une représentation sans multiplicité (i.e. dont tous les facteurs de Jordan-Hölder apparaissent avec multiplicité 1). Supposons que r admette deux sous-espaces stables V et V', et que $r_{|V}$ et $r_{|V'}$ aient les mêmes facteurs de Jordan-Hölder. Alors $V = V'$.*

Démonstration — Considérons la suite de sous-espaces stables

$$0 \subset V \subset V + V' \subset r,$$

et prolongeons-la en une suite de composition (c'est toujours possible). Alors on voit que le tronçon entre V et $V + V'$ définit une suite de composition de $(V + V')/V \simeq V/(V \cap V')$. Les facteurs de composition de ce tronçon font donc partie de ceux de V' et donc de V. Comme ceux de V sont déjà apparus dans la première partie de la suite de composition et n'interviennent qu'une fois au total, il vient que $V + V' = V$, d'où $V' \subset V$. Par symétrie (ou dimension), $V = V'$. □

LEMME 4.1.3. *Mêmes hypothèses que le lemme précédent. On suppose que dans une base $\mathcal{B}_1$, r s'écrit:*

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

et dans une autre ($\mathcal{B}_2$):

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix},$$

A et A' ayant mêmes facteurs de Jordan-Hölder. Alors il existe une base $\mathcal{B}_3$, dont la matrice U par rapport à $\mathcal{B}_1$ est unipotente par bloc, et telle que r s'écrit dans $\mathcal{B}_3$:

$$\begin{pmatrix} A'' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix},$$

avec A'' ayant les même facteurs que A.

En résumé, si r trigonale est diagonalisable, elle l'est par une matrice unipotente.

Démonstration — Soit Q la matrice de $\mathcal{B}_2$ par rapport à $\mathcal{B}_1$, et soit V le sous-espace correspondant à la première partie de la décomposition par blocs. On a $r_{|V} = A$ et $r_{|QV} = A'$. On peut donc appliquer le lemme précédent à V et QV, et on obtient donc $V = QV$. Dans les mêmes blocs que précédemment, Q s'écrit:

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$Q' = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$Q'^{-1}Q \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} Q^{-1}Q' = Q'^{-1} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} Q' = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}A'Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^{-1}B'Q_2 \end{pmatrix},$$

et donc la matrice unipotente par bloc

$$U = Q^{-1}Q'$$

convient. □

PROPOSITION 4.1.4. *On reprend les notations et hypothèses du théorème 1.2.5 Supposons que pour un réseau stable Λ, $\bar{\rho}_\Lambda$ s'écrive:*

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Alors il existe un autre réseau Λ' dans lequel la réduction $\bar{\rho}_{\Lambda'}$ a la forme $\begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où A' a les mêmes facteurs que A, mais où l'on sait que A' n'est pas facteur direct.

Démonstration — (cf. [**Ri**]) Quitte à prendre pour base de V un base $e_1, \ldots, e_n$ d'un $\mathcal{O}$-module T stable par G , ρ peut être vue comme un morphisme $G \to \mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$. Si une matrice $M \in \mathrm{GL}(n, K)$ vérifie $M\rho(G)M^{-1} \subset \mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$, alors le réseau $M^{-1}T$ est aussi stable par G et la réduction attachée à ce nouveau réseau est le morphisme

$$G \to M\rho(G)M^{-1} \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}).$$

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons la proposition fausse. Nous allons construire par récurrence une suite de matrices $M_i \in \mathrm{GL}(n, K)$ telle que $M_i\rho(G)M_i^{-1} \subset \mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$ dont le bloc supérieur droit est divisible par π^i, celui inférieur gauche par π, et telles que les réductions des deux blocs diagonaux ait les mêmes facteurs que A et B, dans cet ordre. Pour $i = 0$, on peut prendre $M_1 = I$.

L'idée est d'utiliser la matrice par bloc

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi I \end{pmatrix},$$

qui vérifie

$$P \begin{pmatrix} A & \pi C \\ D & B \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} A & C \\ \pi D & B \end{pmatrix},$$

comme le montre un calcul direct. Alors, par hypothèse de récurrence,

$$P^i M_i \rho(G) M_i^{-1} P^{-i}$$

est composé de matrices entières, et la réduction associée $\bar{\rho}_{M_i}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_i & * \\ 0 & B_i \end{pmatrix}.$$

Par l'hypothèse d'absurdité, on sait que cette représentation peut être diagonalisée en une matrice

$$\begin{pmatrix} A_i' & 0 \\ 0 & B_i' \end{pmatrix}.$$

Par le lemme 3, on sait qu'on peut supposer la matrice de passage de la forme

$$\bar{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & \bar{u}_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$$

qui rende $\bar{\rho}_{M_i}$ diagonale. En appelant u_i un relevé de $\bar{u}_i$ dans $\mathcal{O}$ et U_i le relevé $\begin{pmatrix} 1 & u_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\bar{U}_i$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$, on voit que

$$U_i P^i M_i \rho(G) M_i^{-1} P^{-i} U_i^{-1}$$

est constitué de matrices dont le bloc supérieur droit est divisible par π; et le coin inférieur gauche, qui n'est pas changé par la conjugaison par U, est toujours divisible par π^{i+1}, on peut donc poser

$$M_{i+1} = P^{-i} U_i P^i M_i.$$

On voit alors que

$$M_i = \begin{pmatrix} I & T_i \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où les T_i vérifient

$$T_{i+1} = T_i + \pi^i U_i;$$

ce qui montre que la suite M_i converge, disons vers une matrice M dans $\mathrm{GL}(2, K)$. Mais alors $M\rho(G)M^{-1}$ est constitué de matrices ayant le bloc supérieur droit nul, ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité de ρ. Cette contradiction prouve le théorème. □

4.2. Connexité orientée du graphe Γ.

LEMME 4.2.1. *Fixons pour le moment une réduction $\bar{\rho}_\Lambda$, et écrivons la dans une certaine base (quitte a renuméroter)*

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \rho_i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_j & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_k & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix}.$$

(il s'agit d'une écriture par blocs, les ρ_k n'étant pas forcément de dimension 1.) Soient $i \leq j < k$ trois entiers entre 1 et m, et supposons qu'il n'y ait pas de flèches dans Γ de ρ_a vers ρ_b dès que $i \leq a \leq j$ et $j < b \leq k$. Alors, quitte à changer de base, on peut écrire $\bar{\rho}_\Lambda$ sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \rho_i & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_j & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_k & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix}.$$

Démonstration — Par abus de langage, je nommerai $e_1, \dots, e_m$ la base dans laquelle la représentation a la forme triangulaire de l'hypothèse, même si les e_l ne sont pas des vecteurs, mais des suites finies de vecteurs (dont les longueurs sont les dimensions des blocs ρ_l). Quotientons la représentation par $e_1, \dots, e_{j-1}$, et appelons Q la représentation obtenue. Considérons la sous-représentation $< e_j, e_{j+1} >$ de Q. Cette représentation, de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho_j & * \\ 0 & \rho_{j+1} \end{pmatrix}.$$

est semi-simple par hypothèse (sinon on aurait une flèche de ρ_j vers ρ_{j+1} dans Γ) et peut donc, d'après le lemme 4.1.3 se mettre par un changement adéquat de e_{j+1}, sous la forme

$$\begin{pmatrix} \rho_j & 0 \\ 0 & \rho_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Le (nouveau) "vecteur" e_{j+1} est maintenant stable dans Q, et on peut donc quotienter par e_{j+1}, et recommencer la même opération pour e_j et e_{j+2}, et ainsi de suite, jusqu'à e_k. En relevant tous ces quotients, on voit que Q peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} \rho_j & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & \rho_k & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix}.$$

En relevant Q, on voit qu'on a déjà fait naître une ligne de zéros:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \rho_i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_j & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_k & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix}.$$

Mais on s'aperçoit aussi que $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_k$ (on a enlevé e_j et les e_l avec $l > k$) est devenu stable par $\bar{\rho}$, donc induit une sous-représentation. On peut alors recommencer la même procédé avec cette sous-représentation, en remplaçant e_j par e_{j-1}, créant ainsi une deuxième ligne de zéros, et ainsi de suite, jusqu'à e_i. On a alors prouvé le lemme. □

THÉORÈME 4.2.2. *Le graphe Γ est connexe, au sens où de n'importe quel sommet on peut, en suivant les flèches, atteindre n'importe quel autre.*

Démonstration — Remarquons déjà qu'on peut, quitte à changer de réseau Λ, mettre n'importe quel facteur tout en haut de la matrice de $\bar{\rho}_\Lambda$, c'est-à-dire comme sous-représentation de $\bar{\rho}$. (Si on veut mettre le facteur numéro k en haut, il suffit de conjuguer ρ par une matrice P dans une décomposition en blocs appropriée (un bloc pour les $k-1$ premiers facteurs, un bloc pour les autres), et de permuter les vecteurs de la base). Soit C la *descendance* de ρ_1 dans Γ (i.e l'ensemble des sommets de Γ qu'on peut atteindre en partant de ρ_1 et en suivant les flèches).

On démontre par récurrence finie sur l la propriété P_l suivante, qui est triviale pour $l = 1$, et le théorème pour $l = m$: quitte a renuméroter les ρ_i $(i \geq 2)$, il existe un $\bar{\rho}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & \rho_l & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix},$$

tel que les sommets $\rho_1, \dots, \rho_l$ appartiennent à C.

En effet, supposons P_l. Appliquons la proposition 4.1.4 en prenant $e_1, \dots, e_l$ comme premier bloc, $e_{l+1}, \dots, e_m$ comme second. Il existe donc une autre représentation $\bar{\rho}$, toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & \rho_l & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix},$$

mais dont on est maintenant sûr qu'elle ne peut pas s'écrire

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix},$$

Il y a au moins un ρ_b avec $b > l$ qui est le point d'arrivée d'une flèche partant de l'un des ρ_a, $1 \leq a \leq l$, car sinon on appliquerait le lemme précédent avec $i = 1$, $j = l$ et $k = m$, obtenant ainsi l'écriture de $\bar{\rho}$ interdite. Soit donc k le premier entier

après l tel que ρ_k appartient à C. (on vient de montrer qu'il existait). Appliquons maintenant le lemme pour $i = l+1$, $j = k-1$ et $k = k$ (si j'ose dire). $\bar{\rho}$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \rho_l & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_k & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m \end{pmatrix}.$$

Mais alors on peut changer l'ordre des éléments dans la base, en mettant e_k entre e_l et e_{l+1} (bien sûr, on ne fait rien si on a déjà $k = l+1$.) La matrice de $\bar{\rho}$ reste triangulaire supérieure, et il est clair que maintenant, les $l+1$ premiers termes diagonaux appartiennent à C, ce qui, à une renumérotation près, signifie qu'on a montré P_{l+1}, et par là même, le théorème. $\square$

CHAPITRE VII

Augmentation du niveau

1. Introduction et notations

1.1. Introduction à l'introduction. L'objet de ce chapitre est de démontrer plusieurs généralisations du théorème de Clozel (cf. [**CL**]) sur l'augmentation du niveau pour les formes automorphes des groupes unitaires à trois variables.

Dans cette introduction, nous énoncerons le théorème de Clozel, sous une forme légèrement modifiée, ce qui nécessitera d'assez longs rappels préliminaires sur les formes automorphes pour les groupes unitaires à trois variables. Nous expliquerons et motiverons ensuite nos résultats.

1.2. Formes automorphes pour les groupes unitaires. Nous précisons ici quelques notions, et fixons quelques notations sur les groupes unitaires à trois variables et leurs formes automorphes, qui auront cours dans ce chapitre et le suivant.

1.2.1. *Groupe unitaire G' quasi-déployé à trois variables.* On note G' la forme quasi-déployée sur $\mathbb{Q}$ du groupe unitaire à trois variables $\mathrm{U}(2,1)$, définie dans [**Ro2**], page 66, associée à une extension quadratique imaginaire E de $\mathbb{Q}$. Par abus de langage, on note encore G' la forme entière, définie sur $\mathbb{Z}$, de ce groupe, donnée dans I.3.2.1, i.e. associée à la matrice $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

Après extension des scalaires à E, G' devient isomorphe à GL_3, i.e.

$$G' \otimes_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}} \mathrm{Spec}\, E = (\mathrm{GL}_3)_E.$$

1.2.2. *Composantes locales.* Pour toute nombre premier p, on pose

$$G'_p = G' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p.$$

Par abus de langage, on désigne aussi par G'_p le groupe topologique $G'_p(\mathbb{Q}_p) = G'(\mathbb{Q}_p)$. On dispose dans ce groupe du sous-groupe $G'(\mathbb{Z}_p)$, qui est un compact maximal spécial. Plus précisément :

- Pour p décomposé dans E, on a un isomorphisme $G'_p \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, qui identifie $G'(\mathbb{Z}_p)$ au compact maximal hyperspécial $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$.
- Pour p inerte dans E, G'_p est un vrai groupe unitaire, non ramifié (cela signifie que G'_p est quasi-déployé, et devient déployé après une extension non ramifiée des scalaires), et $G'(\mathbb{Z}_p)$ en est un compact maximal hyperspécial (cela résulte – via [**T**], 3.8.1 – de ce que G' sur $\mathbb{Z}_p$ est un schéma en groupes lisse à fibre spéciale réductive, ce qu'on voit par un petit calcul).
- Pour p ramifié dans E, G'_p est un groupe unitaire ramifié, et $G'(\mathbb{Z}_p)$ est un compact maximal spécial de G'_p (si p est impair, [**CH**] affirme que $G'(\mathbb{Z}_p)$

est un compact maximal, nécessairement spécial pour un groupe de rang semi-simple 1 ; le cas $p = 2$ est laissé au lecteur)

Enfin, on pose $G'_\infty = G' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = U(2,1)(\mathbb{R})$, et on choisit un compact maximal K_∞ de $G_\mathbb{R}$. Le groupe G'_∞ est quasi-déployé, donc non compact.

1.2.3. *Une forme intérieure G compacte à l'infini du groupe unitaire.* Le groupe $G'_\infty = \mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})$ possède une forme intérieure compacte (et une seule) : le groupe $\mathrm{U}(3)(\mathbb{R})$ associée à une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^3$ définie positive.

Pour les groupes unitaires de rang impair, on peut obtenir des formes intérieures globales en remplaçant arbitrairement un nombre fini de composantes locales par des formes intérieures. Il existe un (unique à isomorphisme près) groupe G sur $\mathbb{Q}$, tel que $G_p = G'_p$ et $G_\infty = \mathrm{U}(3)$. On peut définir une forme entière explicite de G, à savoir le groupe unitaire associé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.[1]

On a encore $G \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}} \mathrm{Spec}\, E = (\mathrm{GL}_3)_E$. De plus, les sous-groupes $G(\mathbb{Z}_p)$ de G_p sont encore des compacts maximaux spéciaux (pour $p \neq 2$, on voit facilement que $G \simeq G'$ comme groupe sur $\mathbb{Z}_p$,et le résultat découle de l'énoncé analogue pour G' ; le cas $p = 2$ est laissé au lecteur).

Nos références pour les représentations automorphes de G et G' sont le livre [**Ro1**] et les articles [**Ro2**] et [**Ro3**].

1.2.4. *Changement de base.* Rappelons que Rogawski définit, conformément à ce que prévoit le principe de fonctorialité de Langlands, un changement de base pour les représentations automorphes cuspidales de G (resp. de G'): à une telle représentation π de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ (resp. de $G'(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$) on associe une représentation automorphe Π de $G(\mathbb{A}_E) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_E)$.

De même, il existe un changement de base local : si p est une place de $\mathbb{Q}$ et w une place de E au dessus de p, on peut associer à une représentation irréductible π_p de G_p une représentation irréductible Π_w de $G(E_w) = \mathrm{GL}_3(E_w)$.

Ces changements de bases locaux et globaux sont compatibles en un sens évident.

Notez bien que la connaissance de Π (resp. de Π_w) ne détermine pas celle de π (resp. de π_w) (mais seulement celle du paquet à laquelle elle appartient)

1.2.5. *Matrices de Hecke.* Si π_p est une représentation *non ramifiée* de G_p, et si w est une place de E au dessus de p, alors Π_w est aussi non ramifiée. Une représentation non ramifiée de $\mathrm{GL}_3(E_w)$ est caractérisée par sa *matrice de Hecke* t_w qui est une matrice de type $(3,3)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, diagonale, et considérée seulement à conjugaison près.

1. Par rapport aux notations de [**CL**], nous avons inversé G et G'. En fait, dans ce chapitre et le suivant, nous parlerons beaucoup plus de la forme compacte que de la forme quasi-déployé, et il nous a paru souhaitable de ne pas traîner partout des primes.

Si p est décomposé dans E, et w et w' sont les deux places au dessus de p, on a la relation

$$\mathfrak{t}_w = \mathfrak{t}_{w'}^{-1}$$

Si p est inerte, et w au-dessus de p, on a

$$\mathfrak{t}_w = \mathfrak{t}_w^{-1}.$$

Si π est une représentation automorphe de G ou de G', π_p est non ramifiée pour presque tout p, et l'on dispose donc, pour presque toute place w de E d'une matrice de Hecke $\mathfrak{t}_{\pi,w}$. Si la famille $(\mathfrak{t}_{\pi,w})$ détermine Π, grâce au théorème de multiplicité un forte pour GL_3, elle ne détermine pas tout à fait π. Cependant, elle contient beaucoup de l'information associée à π, en particulier, elle détermine la représentation galoisienne associée.

1.2.6. *Représentations cohomologiques.* Les représentations automorphes de G ou de G' qui nous intéresseront seront toutes des représentations *cohomologiques*, i.e. des représentation dont la composante à l'infini π_∞ est cohomologique, i.e. possède un groupe de $(\mathfrak{g}, K)$ cohomologie non nulle.

Les représentations cohomologiques π_∞ pour $G'_\infty = \mathrm{U}(2,1)(\mathbb{R})$ sont classifiés et décrites dans [**Ro2**], pages 79-84.

La représentation triviale est cohomologique.

1.2.7. *Représentations stables.* Dans la théorie de Rogawski, conforme à la philosophie de Langlands et d'Arthur, certaines représentations automorphes sont *endoscopiques*, i.e. proviennent par fonctorialité de représentations de certains sous-groupes réductifs, eux-mêmes dit *endoscopiques*. Nous reviendrons plus en détail sur cette notion et la classification de Rogawski de ces représentations dans le chapitre suivant. Pour l'instant nous nous intéressons aux représentation automorphes qui ne sont pas endoscopiques : celle-ci sont dites *stables*.

Le principal résultat sur les représentations stables est le théorème suivant de Blasius et Rogawski ([**BL-RO1**]), qui est l'un des résultats majeurs du livre [**ZFPMS**].

THÉORÈME 1.2.8. *Soit π' une représentation automorphe de G', stable et cohomologique, non ramifiée hors S. Soit l un nombre premier n'appartenant pas à S. Alors il existe une extension finie L_λ de $\mathbb{Q}_l$, et une représentation r du groupe de Galois absolu de E, noté $\mathfrak{G}_E$, de dimension 3 sur L_λ, telle que*

- *r est absolument irréductible.*
- *r est non ramifiée en dehors des places de E divisant des places de $S \cup \{l\}$. r est cristalline en les places divisant l.*
- *En les places où r est non ramifiée, le polynôme caractéristique d'un élément de Frobenius est égal à celui de la matrice $N_{E/\mathbb{Q}}(\varpi_v)\mathfrak{t}_{\pi,v}$, où ϖ_v désigne une uniformisante de E_v.*

1.2.9. *Arithméticité des représentations cohomologiques.* On s'attend à ce que *toute représentation automorphe de G (resp. de G') cohomologique soit arithmétique.* Nous n'essaierons pas de démontrer cette affirmation, ce qui nécessiterait déjà de définir la notion de représentations *arithmétiques* pour les groupes unitaires. Nous nous contenterons de l'ersatz suivant, suffisant pour énoncer nos théorèmes.

LEMME 1.2.10. *Soit π une représentation automorphe de G' cohomologique et stable ou bien une représentation automorphe de G triviale à l'infini. Alors il existe un corps de nombres L d'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ tels que pour presque toute place w de E la matrice $N_{E/\mathbb{Q}}(w)\mathrm{t}_{\pi,w}$ ait un polynôme caractéristique à coefficients dans $\mathcal{O}_L$ (où $N(w)$ désigne la norme de l'idéal correspondant à w, i.e. p si w est au-dessus de p décomposé, p^2 si w est au dessus de p ramifié.)*

Démonstration — Pour une représentation cohomologique et stable de G' cela résulte du théorème 1.2.8. Pour une représentation triviale à l'infini, c'est facile et sera prouvé en passant en 2.1.4. □

1.2.11. *Congruences entre représentations.* Soit π_1 et π_2 deux représentations automorphes (de G ou de G') cohomologiques. D'après le lemme précédent, il existe un corps de nombre L tel que les matrices $N_{E/\mathbb{Q}}(w)\mathrm{t}_{\pi_i,w}$ soient à coefficients dans $\mathcal{O}_L$ pour presque tout w et pour $i = 1,\ 2$. Soit λ une place finie de L, de caractéristique résiduelle l.

Nous dirons que les représentations π_1 et π_2 sont *congrues modulo* λ si pour presque tout w, on a

$$\mathrm{t}_{\pi_1,w} \equiv \mathrm{t}_{\pi_2,w} \bmod \lambda.$$

(Nous entendons par là que les matrices $\mathrm{t}\pi_1, w$ et $\mathrm{t}\pi_2, w$ ont même polynôme caractéristique modulo λ.) Nous dirons aussi, dans ce cas, que π_1 et π_2 sont congrues *modulo l*.

1.2.12. Il découle facilement du théorème 1.2.8 (et de celui de Tchebotarev, accompagné du principe de Brauer-Nesbitt) que si π_1 et π_2 sont deux représentations stables et cohomologiques, elles sont congrues modulo λ si et seulement si les représentations galoisiennes associées r_1 et r_2 ont des réductions $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ dans $\mathbb{F}_\lambda$ qui sont égales dans le groupe de Grothendieck.

1.2.13. *Représentations Eisenstein modulo l.* Soit l un nombre premier.

Nous dirons qu'une représentation π automorphe cohomologique de G ou G' est *d'Eisenstein mod l* si, pour L un corps de nombre comme dans le lemme 1.2.10, il existe une place λ de L au-dessus de l, et un caractère $\bar{\alpha}$ de $\mathbb{A}_E^*/E^*\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{F}_\lambda$, tel que, pour presque toute place w de E, si ϖ_w désigne l'uniformisante associée, on ait

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}(\varpi_w)\bar{\omega}(\varpi_w) & & \\ & \bar{\alpha}(\varpi_w) & \\ & & \bar{\alpha}(\varpi_w)\bar{\omega}^{-1}(\varpi_w) \end{pmatrix} = N_{E/\mathbb{Q}}(\varpi_w)\mathrm{t}_{\pi,w} \bmod \lambda.$$

L'égalité ci-dessus est à comprendre comme égalité de matrices à conjugaison près.

(Cette définition est tirée de [**CL**], définition 2.3)

LEMME 1.2.14. *Soit π une représentation automorphe cohomologique. Alors l'ensemble des nombres premiers l tel que π est Eisenstein modulo l est fini.*

Démonstration — Sinon l'on aurait l'égalité de matrices ci-dessus, pour presque toute place w, non pas modulo λ, mais en caractéristique zéro. La classification de Rogawski assure que cela n'arrive pas. □

1.3. Les résultats de Clozel. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats de Clozel :

THÉORÈME 1.3.1 (Clozel). *Soit π une représentation automorphe de G, triviale à l'infini. Soit l un nombre premier ≥ 5. On suppose que π n'est pas d'Eisenstein modulo l. Soit S l'ensemble des places où π est ramifiée.*

Supposons qu'il existe un nombre premier p inerte dans E, différent de l et n'appartenant pas à S, tel que, modulo permutation, et si v est la place au-dessus de p dans E,

$$\mathfrak{t}_{\pi,v} \equiv \begin{pmatrix} p^2 & & \\ & 1 & \\ & & p^{-2} \end{pmatrix} \quad \textit{modulo} l.$$

*On suppose de plus que p est lourd pour l, i.e. que l est banal pour p (au sens de [**V1**]), autrement dit que $(p^3+1)(p-1)$ n'est pas multiple de l.*

Alors il existe une représentation ρ de G' cohomologique et stable, tel que

- *(i) les représentations π et ρ sont congrues modulo l*
- *(ii) ρ_p est la représentation de Steinberg de $G(\mathbb{Q}_p)$.*
- *(iii) ρ est non ramifié hors $S \cup \{p\}$. Plus généralement, si K^p est un sous-groupe compact ouvert de $\prod_{p' \neq p} G_{p'}$, et si π a un vecteur (non nul) fixe par K^p, on peut supposer que ρ a aussi un vecteur (non nul) fixe par K^p.*

COROLLAIRE 1.3.2 (Clozel). *Soit π' une représentation automorphe cohomologique et stable de G'. Soit l un nombre premier ≥ 5. On suppose que π' n'est pas Eisenstein modulo l. Soit S l'ensemble des places où π' est ramifiée.*

Supposons qu'il existe un nombre premier p inerte dans E, différent de l et n'appartenant pas à S, tel que, modulo permutation, et si w est la place au-dessus de p dans E,

$$\mathfrak{t}_{\pi,w} \equiv \begin{pmatrix} p^2 & & \\ & 1 & \\ & & p^{-2} \end{pmatrix}.$$

On suppose de plus que p est lourd pour l

Alors il existe une représentation ρ' de G' cohomologique et stable, tel que

- *(i) les représentation π' et ρ' sont congrues modulo l*
- *(ii) ρ'_p est la représentation de Steinberg de $G(\mathbb{Q}_p)$.*
- *(iii) ρ' est non ramifié hors $S \cup \{p\}$. Plus généralement, si K^p est un sous-groupe compact ouvert de $\prod_{p' \neq p} G_{p'}$, et si π' a un vecteur (non nul) fixe par K^p, on peut supposer que ρ' a aussi un vecteur (non nul) fixe par K^p.*

1.3.3. C'est en fait le corollaire qui est énoncé comme théorème dans [**CL**] (la seule différence avec notre énoncé est dans l'expression de la condition (i), mais 1.2.12 montre que notre condition (i) et celle de Clozel sont les mêmes).

Le théorème ci-dessus n'est pas explicitement énoncé dans [**CL**], mais il y est bien démontré : c'est même exactement ce que montrent les parties 4 et 5 de [**CL**], en s'arrêtant à l'avant-dernier paragraphe. Le lecteur aura remarqué en particulier que dans cette partie du texte, Clozel n'utilise jamais l'hypothèse stable.

Le corollaire résulte du théorème, grâce aux résultats de Rogawski sur le transfert des représentations stables de G' à G. Rogawski démontre en effet qu'il existe une bijection entre les représentations stables de G et de G' respectant, entre autres choses, les matrices de Hecke aux places non ramifiées.

La preuve du corollaire à partir du théorème occupe la partie 3 de [**CL**] (aller de G' à G), et le dernier paragraphe de la partie 5 (revenir de G à G').

1.3.4. L'hypothèse que p est lourd pour l est utilisé de nombreuses fois dans [**CL**] : résultats de Vigneras (proposition 4.1), de Casselman (proposition 4.2) de Lazarus sur le module universel (proposition 4.3), etc. Seule une analyse détaillée, que nous ferons plus bas, permet de voir dans quel cas l'utilisation de cette hypothèse est essentielle, et dans quel cas elle peut être évitée.

1.3.5. Dans le théorème comme dans son corollaire, on peut reformuler l'hypothèse fondamentale de congruence sur la matrice $\mathrm{t}_{\pi,v}$ en demandant à la place que π_p soit de caractère central trivial et que la valeur propre λ de l'opérateur de Hecke T générateur de l'algèbre de Hecke (avec caractère central trivial) de $G(\mathbb{Q}_p)$ agissant sur la droite des K-invariants de π_p vérifie la congruence :

$$\lambda \equiv p(p^3+1) \bmod \lambda.$$

En effet, comme il est expliqué dans [**CL**], page 1272, la condition sur $\mathrm{t}_{\pi,w}$ signifie que le caractère non ramifié du tore maximal auquel π_p est associé est congru (modulo le centre) au caractère qui est associé à la représentation triviale. On voit facilement (par exemple par les résultats de IV.6.2) que cette condition est équivalente à la suivante : les caractères de l'algèbre de Hecke associés à la représentation triviale et à π_p sont congrus. Or il résulte immédiatement de la définition de l'algèbre de Hecke que son générateur T agit par $p(p^3+1)$ sur (les K-invariants de) la représentation triviale.

Notons que si π_p est bien non ramifiée, mais n'est pas de caractère central trivial, on peut s'y ramener par twist.

1.4. Nos résultats : cas des caractéristiques normales en rang un.

1.4.1. L'objectif de ce chapitre est de donner des généralisations du théorème de Clozel énoncé ci-dessus.

1.4.2. La généralisation des résultats de Lazarus sur le module universel au cas des caractéristiques non banales (que nous avons obtenue au chapitre IV) permet d'envisager des généralisations analogue du théorème ci-dessus, où l'on lèverait (tout ou partie) de l'hypothèse p lourd pour l.

1.4.3. *Caractéristiques normales.* En observant un instant les résultats (IV.3.7.2 et IV.4.7.2) sur la structure de ces modules universels pour les groupes de rang un, on s'aperçoit qu'il existe des caractéristiques, *non banales*, où la structure du module universel est la même qu'en caractéristique nulle (ou banale).

C'est le cas des caractéristiques non banales qui ne divisent ni v, ni v' (dans le cas bihomogène - qui ne divisent pas v dans le cas homogène). Pour le groupe unitaire à trois variables non ramifié $G_p = U(3)(\mathbb{Q}_p)$, on a $v = p^3 + 1$, $v' = p + 1$, et les caractéristiques non banales ni divisant ni v ni v' sont celles divisant $p - 1$.

Nous appellerons *normales* ces caractéristiques qui ne divisent ni v ni v'. Une caractéristique banale est normale, mais la réciproque est fausse.

1.4.4. On peut s'attendre à ce que l'énoncé de Clozel reste vrai en caractéristique normale. C'est ce que nous démontrons dans ce chapitre. Avant de donner l'énoncé du théorème, introduisons d'abord d'autres généralisations :

1.4.5. Au lieu de travailler avec le groupe unitaire G sur $\mathbb{Q}$, on peut envisager d'adapter la démonstration au cas de n'importe quel groupe défini sur un corps de nombres F, compact à toutes les places à l'infini.

En quel place w augmenter alors le niveau ? Dans le cas du groupe unitaire, Clozel suppose la place p inerte dans E, ce qui équivaut à demander que G_p soit de rang un et non ramifié.

Pour appliquer nos résultats sur le module universel, nous avons toujours besoin que le groupe soit de rang un en la place où l'on souhaite augmenter le niveau. Mais comme nous disposons de ces résultats pour tous les groupes de rang un, sans égard au fait qu'ils soient ou non ramifiés, ce sera notre seule hypothèse.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème :

THÉORÈME 1.4.6. *Soit F un corps de nombre, et G un groupe réductif sur F, compact en toutes les places archimédiennes. On suppose que G_{der} est simple et simplement connexe.*

Soit π une représentation automorphe de G, triviale en toutes les places archimédiennes, et de dimension infinie en au moins une place non ramifiée[2]

2. Cette condition est analogue à la condition π n'est pas d'Eisenstein de [**CL**]

Il existe un ensemble fini de nombre premiers, S ne dépendant que de π, telle que si l est un nombre premier n'appartenant pas à S, on a ce qui suit :

Supposons qu'il existe un place finie w de F, ne divisant pas l, telle que,

i *G_w est de rang un.*

ii *Il existe un bon compact maximal K_w tel que $\pi_w^{K_w}$ est non nul.*

iii *Le caractère par lequel $\mathcal{H}(G_w, K_w)$ agit sur $\pi_w^{K_w}$ est congru modulo l au caractère attaché à la représentation triviale.*[3]

iv *La caractéristique l est normale pour G_w, i.e. l ne divise pas vv' (resp. l ne divise pas v, dans le cas d'un arbre homogène)*

Alors il existe une représentation ρ de G, triviale à l'infini, telle que

i *les représentations π et ρ sont congrues modulo l*

ii *ρ_w est la représentation de Steinberg de G_w.*

iii *Si K^w est un sous-groupe compact ouvert de $\prod_{w' \neq w} G_w$, et si π a un vecteur (non nul) fixe par K^w, on peut supposer que ρ a aussi un vecteur (non nul) fixe par K^w.*

1.4.7. La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à la preuve de ce théorème. Nous préciserons tout d'abord le sens de la notion de représentations congrues, que nous n'avons pas définie pour un groupe de rang un quelconque. Cette définition prolongera bien sûr celle que nous avons donné pour le groupe unitaire à trois variables. Modulo cette définition, le lecteur vérifiera immédiatement (à l'aide des remarques précédentes, en particulier 1.3.5) que notre théorème est bien une généralisation du théorème de Clozel)

1.4.8. La preuve que nous donnerons suivra de près la preuve de Clozel. Le seul problème consiste à adapter les arguments de [**CL**] au cas des caractéristiques non banales, où les foncteurs $V \to V^K$ et $V \to V^B$ ne sont pas exacts. De ce point de vue, l'essentiel du travail a été fait au chapitre 5, où l'on a généralisé la théorie du module universel aux caractéristiques non banales.

1.4.9. Même dans le cas où G est le groupe unitaire à trois variables sur $\mathbb{Q}$, notre généralisation est non vide : nous vérifierons que pour π une représentation stable de G de caractère centrale triviale, et pour l générique, il existe une infinité de nombres premiers p inertes dans E, où l'on peut augmenter le niveau de π en appliquant le théorème 1.4.6, mais pas celui de [**CL**]. En fait, il existe une infinité

3. Cette condition se reformule ainsi : Si λ est la valeur propre du générateur T de $\mathcal{H}(G_w, K_w)$ agissant sur $\pi_w^{K_w}$, on a la congruence

$$\lambda \simeq v(v'-1) \bmod l,$$

où v et v' désigne les valences des sommets de l'arbre associé à G_w, v étant la valence du sommet sommet associé à K_w, quand l'arbre associé à G_w est bihomogène.

(respectivement :

$$\lambda \simeq v \bmod l,$$

quand l'arbre est homogène)

de nombres premiers p tels que $p \equiv 1 \bmod l$ (i.e. l est une caractéristique normale non banale) qui vérifie les hypothèses du théorème 1.4.6.

1.4.10. Cependant, en vue de certaines applications, notre théorème, tout comme celui de [**CL**], souffre d'une faiblesse, que nous allons expliquer. Nous nous plaçons toujours dans le cas du groupe unitaire G. L'un des objectifs d'un théorème d'augmentation du niveau peut être de *stabiliser* une représentation automorphe, i.e. de construire, à partir d'une représentation automorphe non stable π, une représentation automorphe stable ρ qui soit congrue à π modulo l.

Or il se trouve (voir 2.4.3) qu'on ne peut pas appliquer le théorème 1.4.6 (ni *a fortiori* celui de [**CL**]) à une représentation de la classe particulièrement intéressante arithmétiquement des *représentations endoscopiques abéliennes.* Nous verrons que si une place finie $w = p$ de $F = \mathbb{Q}$ vérifie les trois premières conditions du théorème 1.4.6, elle ne peut vérifier la dernière, autrement dit, l ne peut être une caractéristique normale pour G_p.

1.4.11. Pour pouvoir augmenter le niveau de ces représentation réfractaires, on peut songer à étendre le théorème 1.4.6 aux places inertes p tels que $p^3 + 1 = 0$ modulo l, autrement dit aux places non normales. De nombreux problèmes se posent, dont voici les deux plus importants.

On aurait alors congruence entre le caractère de l'algèbre de Hecke correspondant au module universel contenant la Steinberg, et celui correspondant au module universel contenant la représentation π^s. Il pourrait donc y avoir des relevés "exotiques', i.e. tel que ρ_p est π^s et non a Steinberg. Il serait intéressant de prouver que les deux types de relevés existent, mais nous ne savons pas le faire.

L'autre problème est que le module universel a alors, si $p^2 - p + 1 = 0$ modulo l des quotients non triviaux qui n'admettent pas la représentation triviale comme quotient. Dans ce cas, la méthode utilisée ici est inapplicable. Enfin, si $p = -1$ modulo l, l'incomplétude de nos résultats sur la structure du module universel pour $U(3)$ nous gêne.

1.5. Nos résultats : cas des places décomposés.

1.5.1. Devant l'échec des tentatives d'augmentation du niveau des représentations endoscopiques abéliennes de G en une place inerte (ou ramifiée), on essaie de démontrer des théorèmes d'augmentation du niveau en une place décomposée.

1.5.2. Nous nous plaçons de nouveau dans le cas considéré au départ, à savoir le cas ou notre est groupe est G, forme compacte à l'infini du groupe unitaire à trois variables défini sur $\mathbb{Q}$. Si p est une place de $\mathbb{Q}$ décomposée dans E, le choix d'une place v de E au-dessus de E détermine un isomorphsime canonique $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_3(E_v) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. On note K un compact maximal de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, B un Iwahori contenu dans K, et B_1 et B_2 les deux sous-groupes parahoriques de K qui contiennent (strictement) B.

THÉORÈME 1.5.3. *Soit π une représentation automorphe de G, de caractère central trivial. On suppose que π n'est pas d'Eisenstein. Alors il existe un ensemble fini S de nombre premiers, ne dépendant que de π tel que pour tout l en dehors de S on a ce qui suit.*

Supposons qu'il existe un nombre premier p, décomposé dans E tel que

a. *l est banal pour p, i.e. l ne divise pas $(p^3-1)(p+1)$.*

b. *π_p est non ramifiée et de caractère central trivial.*

c. *La matrice de Hecke de π en p est congrue (modulo une place λ au-dessus de l, et à conjugaison près) à la matrice*

$$\begin{pmatrix} p & & \\ & 1 & \\ & & p^{-1} \end{pmatrix}.$$

Cette condition équivaut à la suivante

c'. *Les valeurs propres des deux générateurs standard de l'algèbre de Hecke en p sont congrus modulo λ à p^2+p+1.*

d. *le représentation π est de multiplicité 1 dans l'espace $L^2(G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$*

Alors il existe une représentation ρ de G, automorphe et cuspidale, telle que

i *les représentations π et ρ sont congrues modulo l*

ii *ρ_p a un vecteur fixe par B_1 ou par B_2, mais pas par K..*

iii *Si q est un nombre premier différent de p, si K_q est un sous-groupe compact maximal spécial de G_q, et si π a un vecteur (non nul) fixe par K_q, on peut supposer que ρ a aussi un vecteur (non nul) fixe par K_q*

2. Preuve du théorème 1.4.6

2.1. Déterminations de l'ensemble des mauvaises caractéristiques S.

2.1.1. Le but de cette sous-partie est de déterminer l'ensemble S de nombres premiers l à exclure. On y reprend les notations du début de l'énoncé du théorème : le groupe algébrique G sur F et sa représentation automorphe π. On y introduit quelques autres notations qui serviront aussi dans la suite.

2.1.2. On note G_∞ le produit des composantes à l'infini de G. Par hypothèse, G_∞ est compact.

Soit K_f un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que π admet un vecteur invariant par K_f. On peut supposer que K_f s'écrit comme un produit sur les places finies de F

$$K_f = \prod_w K_w$$

et que, aux places où π_w a un vecteur fixe par un bon compact maximal de G_w, K_w est l'un de ces compacts. On note Σ l'ensemble des places finies de F où au contraire K_w n'est pas un bon compact maximal.

2.1.3. L'ensemble

$$G(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f$$

est fini et, pour tout anneau k, on note $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{A}_k$ pour marquer la dépendance en k) le k-module des fonctions sur cet ensemble à valeurs dans k.

On note $\mathcal{H}_k^\Sigma$ le produit tensoriel des algèbres (commutatives) $\mathcal{H}_k(G_w, K_w)$ pour $w \notin \Sigma$. Cette algèbre agit naturellement à droite sur $\mathcal{A}$.

2.1.4. Soit η un caractère de $\mathcal{H}^\Sigma$ sur $\mathbb{C}$, qui apparaît dans $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, i.e. tel qu'il existe $f \in \mathcal{A}_\mathbb{C}$, non nulle, telle que $\forall h \in \mathcal{H}$ on ait $f.h = \eta(h)f$.

Comme $\mathcal{A}$ est de dimension finie, et est défini sur $\mathbb{Z}$, ainsi que l'action de $\mathcal{H}_\Sigma$, η prend ses valeurs dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres $\mathcal{O}_\eta$.

Ceci s'applique en particulier à la représentation π. En effet, π possède une fonction f dans $\tilde{\mathcal{A}}_\mathbb{C}$ propre pour $\mathcal{H}^\Sigma$, ce qui définit un caractère η de $\mathcal{H}^\Sigma$. Autrement dit, les représentations automorphes triviales à l'infini sont arithmétiques.

2.1.5. *Congruences entre représentations.* Si maintenant π' est un autre représentation automorphe de G triviale à l'infini, on peut aussi lui associer un caractère η' d'une algèbre $\mathcal{H}^{\Sigma'}$, où Σ' est un ensemble fini de places finies de F. Nous dirons que π et π' sont *congrues modulo l*, s'il existe un ensemble fini Σ'' de places finies contenant Σ et Σ', un anneau d'entiers de corps de nombre $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{O}_\eta$ et $\mathcal{O}_{\eta'}$, et une place λ de $\mathcal{O}$ au-dessus de l, tels que les restrictions de η et η' à $\mathcal{H}^{\Sigma''}$ soient congrues modulo λ.

Pour vérifier que cette définition revient à celle que nous avions donnée en 1.2.11 dans le cas d'un groupe unitaire, il suffit d'appliquer la version arithmétique ([**LAZ1**], ou voir IV.6.2) de la transformation de Satake.

LEMME 2.1.6. *Il existe une ensemble fini de nombre premiers S_1 tels que, pour tout corps k de caractéristique n'appartenant pas à cet ensemble, $\mathcal{H}_k$ agit sur $\mathcal{A}_k$ de manière semi-simple.*

Démonstration — Sur $\mathbb{C}$, les éléments de $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ agissent de manière auto-adjointe sur $\mathcal{A}$ par rapport au produit scalaire de Petersson. L'algèbre $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ agit de manière semi-simple sur $\mathcal{A}$. Son image $\mathfrak{T}_\mathbb{C}$ dans $\mathrm{End}_\mathbb{C}(\mathcal{A})$ est donc isomorphe à un produit fini de copies de $\mathbb{C}$.

On peut définir en général $\mathfrak{T}_k$ comme l'image de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathrm{End}_k(\mathcal{A}_k)$, et la formation de $\mathfrak{T}_k$ commute à l'extension des scalaires. Comme $\mathfrak{T}_\mathbb{C}$ est étale sur $\mathbb{C}$, $\mathfrak{T}_\mathbb{Q}$ l'est sur $\mathbb{Q}$, et comme $\mathfrak{T}_\mathbb{Z}$ est de type fini (comme sous-module de $\mathrm{End}_\mathbb{Z}(\mathcal{A}_\mathbb{Z})$) $\mathfrak{T}_{\mathbb{F}_l}$ est étale sur $\mathbb{F}_l$ pour presque tout l, et de là $\mathfrak{T}_k$ pour tout corps k de caractéristique égale à l'un de ces l. Mais alors $\mathfrak{T}_k$ est un de produit de corps, et $\mathcal{H}_k$ agit donc de manière semi-simple sur $\mathcal{A}_k$. $\square$

PROPOSITION 2.1.7. *Pour tout l en dehors d'un ensemble fini S_2, pour toute $\mathcal{O}_\eta$-algèbre*[4] *k qui est un corps de caractéristique l, $\mathcal{A}_k(\eta)$ ne contient pas de fonctions invariantes par G_w.*

Démonstration — Soit w' une place telle que $\pi_{w'}$ est non ramifiée et de dimension infinie. Soit $\chi_{w'}$ le caractère de $\mathcal{H}(G_{w'}, K_{w'})$[5] correspondant à cette représentation. Le groupe $G_{w'}/Z(G_{w'})$ n'ayant qu'un nombre fini de caractères, *a fortiori* de caractères non ramifiées, il n'y a qu'un ensemble fini $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ de caractères de $\mathcal{H}(G_{w'}, K_{w'})$ qui correspondent à des représentations non ramifiées de dimension 1 de $G_{w'}$. Il est clair que ces caractères complexes sont en fait à valeurs dans l'anneau d'entiers d'un corps de nombres, disons $\mathcal{O}_\eta$ quitte à grossir encore ce dernier, et que pour presque tout l (disons pour l en dehors d'un ensemble fini S), on aura, pour k un corps de caractéristique l au-dessus de $\mathcal{O}_\eta$, que les seuls caractères de $\mathcal{H}_k(G_{w'}, K_{w'})$ correspondant à des représentations non ramifiées seront les réductions des χ_i modulo l.

Comme η n'est pas l'un des χ_i, il est clair que pour tout l en dehors d'un ensemble fini S_2 (qu'on supposera contenir S), on aura pour toute place λ de $\mathcal{O}_\eta$ au-dessus de l, $\eta \not\equiv \chi_i$ modulo λ pour $i = 1, \ldots, n$.

Pour un tel l, montrons que $\mathcal{A}_k(\eta)$ n'a pas de vecteurs fixes par G_w: s'il en avait un, f, *a fortiori* f serait fixe par $G_{\mathrm{der}}(K_w)$ et aussi par $G_{\mathrm{der}}(K)$. Le groupe $G_{\mathrm{der}}(K_w)$ étant de rang un par hypothèse, donc non compact, et G_{der} simple et simplement connexe, on a $G_{\mathrm{der}}(K)G_{\mathrm{der}}(K_w)$ dense dans $G_{\mathrm{der}}(\mathbb{A}_K)$ et donc f invariante par $G_{\mathrm{der}}(\mathbb{A}_K)$. La représentation engendrée par f est donc abélienne, et en particulier la réduction $\bar{\eta}_{w'}$ doit être l'un des χ_i, ce qui est absurde. □

2.1.8. On définit l'ensemble fini S comme la réunion des ensembles exceptionnels S_1 et S_2 des lemmes 2.1.7 et 2.1.6, et de $\{2\}$.

2.2. Préliminaires locaux.

2.2.1. Jusqu'à présent, nous n'avions pas distingué de places finies de F particulières. On en choisit maintenant une, qu'on note $w \notin \Sigma$, pour laquelle G_w est de rang un, comme dans l'énoncé du théorème.

Dans toute cette sous-partie, on s'intéresse à des représentations lisses du groupe G_w, qu'on notera simplement G, à valeurs dans un corps k, de caractéristique différente de p. On note aussi K le bon compact maximal K_w de G par lequel π_w a un vecteur fixe, et on note B un Iwahori contenu dans K.

4. Rappelons que η est le caractère de $\mathcal{H}^\Sigma$ attaché à π, voir 2.1.4

5. Rappelons que toutes les caractères de Hecke considérés ici sont à caractère central trivial

2.2.2. *Rappels du chapitre V.*

a) Le G-module M_v dans le cas d'un arbre homogène (resp. $M_{v(v'-1)}$ dans le cas bihomogène) qu'on notera simplement M possède une (unique) droite invariante par K, sur laquelle le générateur canonique T de l'algèbre $\mathcal{H}(G,K)$ agit par v (resp. $v(v'-1)$) et est universel (plus précisément objet initial) pour cette propriété.

b) On dispose d'une suite exacte non scindée.

$$0 \to St \to M \to k \to 0.$$

La représentation St est appelée *la représentation de Steinberg*; elle ne possède pas de K-invariants non nuls, et seulement une droite de B-invariants.

c) Si k est de caractéristique normale, St est irréductible (et la réciproque est vraie).

d) Si k est de caractéristique normale, le centre $\mathcal{Z}$ de l'algèbre $\mathcal{H}(G,B)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{H}(G,K)$. De plus, il agit sur la droite B-invariante de St par le même caractère (qu'on notera χ_{St}) que sur la représentation triviale k. Ce caractère s'identifie via l'isomorphisme susmentionné avec le caractère (qu'on notera encore χ_{St}) de $\mathcal{H}(G,K)$ qui envoie T sur v (resp. $v(v'-1)$.)

Le point a) résulte de la définition du module universel, et des propositions IV.3.5.4 et IV.4.5.4. Le point b) résulte de ces propositions et des théorèmes IV.3.7.2 et IV.4.7.2. Le point c) résulte aussi de ces théorèmes, et le point d) résulte de IV.7.1.8.

LEMME 2.2.3. *Soit k un corps de caractéristique nulle, et soit ψ un caractère de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K) \simeq \mathcal{Z}$, à valeurs dans un anneau d'entiers $\mathcal{O}$ inclus dans k, tel que*

$$\psi \equiv \chi_{St} \mod \lambda,$$

où λ est une place de $\mathcal{O}$ divisant l, et où l est un nombre premier impair normal pour G.

Soit r une représentation irréductible de G sur k qui possède une droite fixe par B, sur laquelle $\mathcal{Z}$ agit par ψ. Alors de trois choses l'une :

- $r = k$
- $r = St$
- $\dim r^B = 2$.

On est dans l'un des deux premiers cas si et seulement si $\dim r^B = 1$, ce qui équivaut aussi à $\psi = \chi_{St}$.

Démonstration — Il est bien connu en caractéristique nulle qu'une représentation irréductible qui a un B-invariant apparaît comme un facteur de composition d'une série principale non ramifiée, donc d'un module universel M_λ (d'après le théorème IV.6.2.5). La représentation r apparaît donc comme sous-quotient d'un

certain M_λ. Comme on est en caractéristique zéro, le foncteur des B-invariants est exact, et il existe une droite B-invariante dans M_λ sur laquelle $\mathcal{Z}$ agit par ψ. D'après IV.7.1.8, on doit avoir $\psi(T) = \lambda$, où T désigne le générateur standard de l'algèbre de Hecke (cf. IV.5.2.8).

Or on a par hypothèse $\psi(T) \equiv v$ modulo l (resp. $\psi(T) \equiv v(v'-1)$). L'hypothèse l normal et $l \neq 2$ implique alors que $\psi(T) \neq -v$ dans le cas homogène (resp. $\psi(T) \neq v'$ dans le cas bihomogène).

D'après les théorèmes IV.3.7.2, IV.4.7.2, on est donc soit dans le cas où $\lambda = v$ (resp. $\lambda = v(v'-1)$), i.e. $\psi = \chi_{St}$, soit dans un cas d'irréductibilité de M_λ. Dans le premier cas, on a $r = k$ ou St d'après b), et dans le second $r = M_\lambda$, ce qui implique $\dim r^B = 2$ d'après les propositions IV.3.5.4, IV.4.5.4. (Ce lemme résulte aussi de [**DA1**].)

□

LEMME 2.2.4. *Soit k un corps de caractéristique normale pour G, et V une représentation lisse de G sur k (à gauche). Soit km un droite de V^B, stable par $\mathcal{H}_k(G,B)$. On suppose que, comme module à gauche sur $\mathcal{H}_k(G,B)$, la droite km est isomorphe au module associé à la représentation triviale de G. Alors m est invariant par G.*

Démonstration — (Ce lemme peut aussi se déduire de [**V2**], théorème 1.4.2)

L'action de $\mathcal{H}(G,B)$ sur le module associé à la représentation triviale est un caractère χ_0 (cf. IV.7.2.10 pour sa forme dans le cas homogène)

Comme on est en caractéristique normale, les résultats de IV.7.1.6 sont applicables. En particulier on peut parler de $e_K = (1/v)e_B$ comme élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,B)$, et l'on voit que $e_k * m = (1/v)m$, ce qui implique que m est stable par K. De plus le centre de $\mathcal{H}(G,B)$ agit sur m par le caractère χ_{St} et il en va de même de $\mathcal{H}(G,K)$ (point d) de 2.2.2.)

On a donc (point a) de 2.2.2) une application du module universel M vers V, qui envoie le générateur K-invariant m_0 de M sur m.

Si cette application était injective, sa restriction à $M^B = \mathcal{M}_v$ (notations de IV.7.2.10) le serait encore. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,B)$ agirait alors par le même caractère sur m et sur m_0. Mais l'on a vu (cf. IV.7.1.8) qu'il n'en était rien.

L'application $M \to V$ n'est donc pas injective. Vu la structure de M (point b) de 2.2.2), c'est que $M \to V$ a pour image la représentation triviale, donc km est invariant par G. □

2.2.5. *Une remarque inutile pour la suite.* Parmi les autres propriétés locales qu'utilise Clozel, on trouve les calculs de cohomologies lisses :

$$\mathrm{Ext}^1(k, St) = \mathrm{Ext}^1(St, k) = k$$

et tous les autres groupes Ext^i entre représentations irréductibles sont triviaux. Ceci reste valable en caractéristique normale (tous les résultats de [**BL**] et du court (6 pages) appendice de [**CAS**] sont valables en toute caractéristique $l \neq p$, comme le lecteur le vérifiera facilement, malgré les avertissements de Casselman. Ces résultats constituent les outils formels utilisés pour calculer les Ext^i, calcul qui se fait comme en caractéristique nulle en utilisant 2.2.2, point b).)

On en déduit facilement $\mathrm{Ext}^1(M, M) = k$. Ceci est source de difficulté, pour appliquer directement la méthode de Clozel, on aurait besoin de savoir qu'une extension de M par M a un espace de B-invariants de dimension 4, et un espace de K-invariants de dimension 2, comme en caractéristique zéro (ou banale). C'est le cas pour une extension triviale bien entendu, mais il existe des extensions non triviales. Pour une telle extension, nous ignorons si le résultat est vrai. C'est peu probable, et en tout cas cela ne découle pas d'un bête argument cohomologique: les groupes $H^1(B, M)$ et $H^1(K, M)$ se calculent facilement à l'aide de la suite spectrale de Hochchild-Serre, et on voit qu'ils sont non nuls pour les caractéristiques normales non banales.

2.3. Fin de la preuve.

2.3.1. Dorénavant, on suppose que l est un nombre premier n'appartenant pas à l'ensemble S déterminé en 2.1.8, et que la place w de F choisie en 2.2.1 vérifie toutes les hypothèses du théorème : G_w est de rang 1, π_w admet un vecteur fixe par un compact maximal $K = K_w$ (donc $w \notin \Sigma$), et l est une caractéristique normale pour G_w.

2.3.2. Rappelons (cf. 2.1.2) que K_f désigne un compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ qui s'écrit $\prod_w K'_w$ sur les places finies, et que Σ désigne les places où $K_{w'}$ n'est pas un compact maximal. On pose $\Sigma' = \Sigma \cup \{w\}$, et

$$\mathcal{H}^{\Sigma'} = \otimes_{w' \notin \Sigma'} \mathcal{H}(G_{w'}, K_{w'}),$$

si bien que

$$\mathcal{H}_\Sigma = \mathcal{H}_{\Sigma'} \otimes \mathcal{H}_w,$$

où l'on a posé $\mathcal{H}_w = \mathcal{H}(G_w, K_w) = \mathcal{Z}$ (cf. 2.2.2, point 4.)

2.3.3. Pour tout sous-groupe compact ouvert U de G_w, l'ensemble

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)/G_\infty K^w U$$

est fini, et pour tout anneau k on note $\mathcal{A}_{U,k}$ (ou $\mathcal{A}_U$) le k-module des applications de cet ensemble dans k. On note aussi $\tilde{\mathcal{A}}$ la limite inductive (quand U parcourt une base de voisinages de l'élément neutre dans G_w) des $\mathcal{A}_U$. C'est le k-module des applications localement constantes sur $G(F)\backslash G'(\mathbb{A}_F)/G_\infty K$ à valeurs dans k. Ainsi $\mathcal{A}_K$ est le module noté $\mathcal{A}$ dans 2.1.3

2.3.4. Pour η un caractère de $\mathcal{H}^\Sigma$, on note $\mathcal{A}_K(\eta)$ l'espace propre généralisé correspondant à η, i.e. l'ensemble des $f \in \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$, tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout h dans $\mathcal{H}^\Sigma$, on ait $(h - \eta(h))^n f = 0$. D'après l'hypothèse $l \notin S_1$, cet espace propre généralisé est en fait un espace propre.

Si dans l'anneau de base k toutes les caractéristiques non normales pour G_w sont inversibles, le centre $\mathcal{Z}$ de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_w, B_w)$ en w est isomorphe à $\mathcal{H}_w$ (2.2.2, d)), et l'on peut donc voir η comme un caractère de l'algèbre $\mathcal{H}^{\Sigma'} \otimes \mathcal{Z}$. Cette algèbre agit naturellement (à droite) sur $\mathcal{A}_B$, et l'on peut considérer l'espace propre généralisé

$$\mathcal{A}_B(\eta) = \{f \in \mathcal{A}_B,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall h \in \mathcal{H}^{\Sigma'} \otimes \mathcal{Z},\ (h - \eta(h))^n f = 0\}.$$

On a, d'après 2.2.2, point d) :

$$\mathcal{A}_K(\eta) \subset \mathcal{A}_B(\eta).$$

Enfin, soit χ un caractère de $\mathcal{H}^{\Sigma'}$. Comme $\mathcal{H}^{\Sigma'}$ agit naturellement à droite sur $\tilde{\mathcal{A}}$, on peut naturellement introduire l'espace propre généralisé $\tilde{\mathcal{A}}(\chi)$. Si χ est la restriction de η à $\mathcal{H}^{\Sigma'}$, on a les inclusions

$$\mathcal{A}_K(\eta) \subset \mathcal{A}_B(\eta) \subset \tilde{\mathcal{A}}(\chi).$$

2.3.5. À la représentation π est associé un caractère η, défini sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'un corps de nombre L. Par hypothèse il existe une place λ de $\mathcal{O}$, de corps résiduel $\mathbb{F}$ de caractéristique l, tel que

$$W :\ = \mathcal{A}_{K,\mathbb{F}}(\bar{\eta}) \neq 0,$$

où $\bar{\eta}$ désigne la réduction de η modulo λ, et tel que la restriction de $\bar{\eta}$ à $\mathcal{H}_w$ soit le caractère χ_{St} sur $\mathbb{F}$ de 2.2.2.

Si l'on note χ la restriction de $\bar{\eta}$ à $\mathcal{H}^{\Sigma'}$, on a $\bar{\eta} = (\bar{\chi}, \chi_{St})$, et

$$W = \mathcal{A}_{K,\mathbb{F}}(\bar{\eta}) \subset \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\eta}) \subset \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{F}}(\bar{\chi}).$$

2.3.6. On note V la sous-G_w-représentation de $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{F}}(\bar{\chi})$ engendrée par W.

LEMME 2.3.7. *Comme représentation de G_w, V est isomorphe à M^d, si d est la dimension sur k de W. On a* $\dim V^K = d$, $\dim V^B = 2d$.

Démonstration — La première assertion se prouve exactement comme la première partie du lemme 5.2 de [**CL**], en utilisant nos résultats préliminaires valables en toute caractéristique normale au lieu de ceux de Clozel. On en déduit les assertions sur les dimensions, vu 2.2.2, point c) . □

2.3.8. Comme $V^B \subset \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\eta})$, on en déduit immédiatement, comme dans [**CL**] que

$$\dim \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\eta}) \geq 2 \dim \mathcal{A}_{K,\mathbb{F}}(\bar{\eta}).$$

La preuve du lemme 5.3 de [**CL**] reste valable (elle repose uniquement sur l'existence d'une mesure de Haar non nulle de G_w à valeurs dans k), et on a donc, quitte à augmenter l'ensemble fini Σ, une dualité $(\ ,\ )$ sur $\tilde{\mathcal{A}}_k$, telle que

$$(gf, gf) = (f, f)\ \forall g \in G,\ f \in \tilde{\mathcal{A}}_k,$$

et

$$(fh, f) = (f, fh^*)\ \forall f \in \tilde{\mathcal{A}}_k,\ h \in \mathcal{H}^\Sigma.$$

LEMME 2.3.9. $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}} > 2 \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{K,\mathbb{F}}(\bar{\eta})$.

Démonstration — C'est le lemme 5.4 de [**CL**]. Adaptons-en la preuve, qui utilisait l'équivalence de catégorie $V \to V^B$ en caractéristique banale. Si l'on avait égalité entre les dimensions, on aurait $V^B = \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}$. Comme $\mathcal{H}(G_w, B)$-module, V^B est isomorphe à un produit de M^B, et admet donc comme quotient le module associé à la représentation triviale (puisque M admet la représentation triviale comme quotient). Par dualité, $V^B = \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\eta}^*)$ doit posséder comme sous-module le $\mathcal{H}(G_w, B)$-module associé à la représentation triviale (où $\bar{\eta}^*$ est le caractère contragrédient), et d'après le lemme 2.2.4, c'est que $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{F}}(\bar{\chi}^*)$ contient la sous-représentation triviale. Mais ceci contredit la proposition 2.1.7, qui affirme que $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{F}}(\bar{\chi}^*)$ ne contient pas la représentation triviale comme sous-module. □

2.3.10. On démontre ensuite exactement comme dans [**CL**] (cf. toute la page 1283, en particulier les lemmes 5.5 et 5.6) :

$$\sum_{\eta_B} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_{B,\mathbb{C}}(\eta_B) > 2 \sum_{\eta_K} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_{K,\mathbb{C}}(\eta_K),$$

où dans les sommes ci-dessus,les η_B (resp. les η_K) désignent les caractères complexes de $\mathcal{H}^\Sigma$ qui se réduisent en $\bar{\eta}$ et qui apparaissent dans $\mathcal{A}_{B,\mathbb{C}}$ (resp. $\mathcal{A}_{K,\mathbb{C}}$).

2.3.11. Les η_K qui apparaissent dans cette somme sont aussi des η_B, puisqu'un K-invariant est *a fortiori* B-invariant. La question est de savoir si tous les η_B sont aussi des η_K. Nous allons voir que non.

Chaque caractère η_K correspond à une représentation automorphe τ de G, non ramifiée hors Σ. D'après le lemme 2.2.3, la représentation τ_w est soit triviale (mais ce cas est exclu), soit la Steinberg (mais ce cas est exclu aussi, parce que τ_w est ramifié), soit (et c'est donc ça) vérifie $\dim \tau_w^B = 2$. Cela signifie que $\dim \mathcal{A}_{B,\mathbb{C}}(\eta_K) = 2 = 2 \dim \mathcal{A}_{K,\mathbb{C}}(\eta_K)$.

Vu l'inégalité ci-dessus, c'est qu'il existe des η_B qui ne sont pas des η_K.

2.3.12. Mais un tel η_B correspond à une représentation automorphe ρ, dont la composante ρ_w n'a pas de K-invariants. Toujours d'après le lemme 2.2.3, c'est que ρ_w est St. De plus, par construction ρ admet un vecteur fixe par K^w et est congrue modulo l à π. CQFD.

2.4. Existence de bons nombres premiers.

2.4.1. On peut se demander si la généralisation du théorème de [**CL**] n'est pas vide, ne serait-ce que dans le cas où G est le groupe unitaire à trois variables de

loc. cit. En fait, on peut prouver mot à mot comme dans [**CL**], pages 1285 et 1286 le résultat suivant :

LEMME 2.4.2. *Soit π stable, de caractère central trivial. Soit l un nombre premier. Soit r la représentation galoisienne associée, à valeur dans $SL_3(\mathcal{O}_\lambda)$. On suppose que la réduction $\bar{r}$ de r soit irréductible et d'image $SL_3(\mathbb{F})$. (De tels π existent). On suppose encore que E est linéairement disjoint de $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ (ce qui n'exclut qu'un nombre fini de l).*

Alors, il existe une infinité (de densité analytique non nulle) de nombres premiers p, inertes dans E, vérifiant $p \equiv 1$ modulo l, et telle qu'on puisse appliquer le théorème 1.4.6.

Or pour ces nombres $p \equiv 1$ modulo l on ne peut pas appliquer le théorème de [**CL**].

2.4.3. Peut-on appliquer le théorème 1.4.6 à des représentation π qui ne sont pas stables ? Dans des cas où π est endoscopique non abélienne (voir le chapitre suivant), la réponse est oui, mais nous n'en donnerons pas de démonstration. Mais dans le cas où π est endoscopique abélienne, on ne peut jamais appliquer le théorème 1.4.6.

Voici pourquoi : pour appliquer ce théorème, et augmenter le niveau d'une représentation endoscopique abélienne π du groupe G' sans changer (en presque toute place) les matrices de Hecke modulo l, il faudrait trouver une place finie p de $\mathbb{Q}$ telle que G'_p est de rang un (autrement dit p inerte ou ramifiée dans E, disons p inerte - on raisonnerait de même avec p ramifiée), telle que π_p est non ramifiée, et telle que le générateur standard de l'algèbre de Hecke agisse sur la droite des K_p-invariants par la valeur propre $-p(p^3+1)$ modulo l – la valeur propre qui correspond, en caractéristique nulle, à la décomposition du module universel en Steinberg + Triviale. Mais par ailleurs, on verra en VIII.2.1.1 et VIII.2.1.3 que π_p est alors nécessairement la représentation non ramifiée notée π_n dans l'étude du module universel, cf. théorème IV.4.7.2. Or celle-ci correspond à une action du générateur standard de l'algèbre de Hecke égale à $-(p+1)$. Que cette valeur propre soit congrue modulo l à $p(p^3+1)$ signifie que l divise p^3+1, ce qui est exclu du théorème 1.4.6 par l'hypothèse de normalité.

3. Preuve du théorème 1.5.3

Pour simplifier l'exposition, on supposera que π_∞ est la représentation triviale. Le cas général, où π_∞ est une représentation (nécessairement) de dimension finie, nécessite de petites adaptations de l'argument, pour définir les espaces de formes automorphes, ainsi que pour la dualité 2.3.8. Les modifications évidentes sont contenues par exemple dans [**Tay**].

3.1. Dualité et automorphisme. Soit p un nombre premier.

3.1.1. On définit un automorphisme algébrique θ de G par $\theta(g) = \bar{g}$. Plus précisément, pour R une $\mathbb{Q}$-algèbre, et $X \in G(R) = \{X \in M_3(E \otimes R).\ X^t\bar{X} = 1\}$, où $^-$ est l'involution de $E \otimes R$ induite par la conjugaison de E, on pose $\theta(X) = \bar{X}$.

On obtient en particulier, pour tout nombre premier p, un automorphisme encore noté θ, de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Si p est décomposé, $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, et θ est conjugué à l'automorphisme de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ donné par $M \mapsto {}^tM^{-1}$ de GL_3.

3.1.2. Si π est une représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$, (disons lisse, sur un corps k de caractéristique différente de p), on note π^θ la représentation $\pi \circ \theta$, et $\check{\pi}$ la contragrédiente de π.

PROPOSITION 3.1.3. *Pour tout nombre premier p, et toute représentation* irréductible *admissible π de $G(\mathbb{Q}_p)$, on a*

$$\pi^\theta \simeq \check{\pi}.$$

Démonstration — Soit T_π le caractère de π. Il suffit de montrer que $T_{\check{\pi}} = T_{\pi^\theta} = T_\pi \circ \theta$, ou, ce qui revient au même, que $\check{T}_\pi = T_\pi \circ \theta$ où $\check{T}_\pi$ est le transformé de T_π par l'application $g \mapsto g^{-1}$. D'après un théorème de [**B-Z**] (démontré en caractéristique zéro, mais dont la preuve s'adapte immédiatement), cela résulterait de ce que $\theta(g)$ et g^{-1} sont conjugués pour tout élément de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Pour p décomposé, $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et il est bien connu que toute matrice est conjuguée à sa transposée.

On se place donc dans le cas p inerte ou ramifié. Alors $E \otimes \mathbb{Q}_p$ est un corps qu'on notera simplement E pour alléger les notations. Comme $G(\mathbb{Q}_p) \simeq G'(Q_p)$, $G(\mathbb{Q}_p)$ est l'ensemble des matrices X de $M = \mathrm{M}_3(E_p)$ vérifiant

$$XX^* = 1, \quad \text{avec}$$

$$X^* = (H^{-1})^t\bar{X}H,$$

$$H = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Supposons d'abord que g appartienne à un tore elliptique de G. Ces tores sont obtenus ainsi : Soient E_i des extensions de E et supposons donnée sur chaque E_i une involution σ_i induisant $x \mapsto \bar{x}$ sur E. Supposons donné également un plongement E-linéaire $L = \prod E_i \to M$ compatible avec les σ_i et $*$. Alors l'image de $T = \{(x_i),\ x_i x_i^{\sigma_i} = 1\}$ dans M est un tore elliptique (cf. [**Ro1**], chapitre 3).

Remarquer que $V = E^3$ est un module libre de rang 1 sur L. Si $a \in L$, posons $\bar{a} = (a_i^{\sigma_i})$. La forme hermitienne H sur V vérifie

$$H(ax, y) = H(x, \bar{a}y) \quad a \in L,\ x, y \in V.$$

De plus, $E_i = F_i \otimes E$, où F_i est le corps fixé par σ_i. Soit $\iota \in E$ tel que $\bar{\iota} = -\iota$. Écrivons $L = L_r \otimes E$ où $L_r = \sum F_i$: alors $L = L_r \oplus \iota L_r$. On peut décomposer

$$H(x,y) = S(x,y) \oplus \iota B(x,y)$$

avec S symétrique et B alternée, à valeurs dans F. Alors

$$B(ax,y) = B(x,\bar{a}y),$$

et B est non dégénérée.

LEMME 3.1.4. *Il existe un sous-espace totalement isotrope maximal $W \subset V$ pour B, stable par L_r, et tel que $V = W \otimes_F E$.*

Démonstration — Identifions V avec L. Pour $\alpha \in L$, soit $\lambda(x) = B(x,1)$. Alors $B(x,y) = B(\bar{y}x,1) = \lambda(\bar{y}x)$ et $\lambda : L \to F$ est une forme linéaire telle que $\lambda(\bar{z}) = -\lambda(z)$. Écrivons $L = L_r + \iota L_r$. Alors $\lambda(x+\iota y) = \mu(y)$ où $\mu : L_r \to F$ est une forme linéaire. On a $B(x,y) = \lambda(yx) = 0$ si x, y sont dans L_r ; L_r a donc les propriétés requises. □

Continuons la preuve de la proposition : on peut changer θ par n'importe quel conjugué de θ, ce qui nous permet de supposer que θ est la conjugaison par rapport au sous-espace W. Supposons $a = b + \iota c \in L$, avec $b, c \in L_r$. Pour $x \in W$,

$$ax = bx + \iota cx \in V = W + \iota W,$$

$$\overline{ax} = bx - \iota cx = \bar{a}x,$$

où $\overline{ax}$ est défini par la F-structure W sur V. Par définition, $\overline{ax} = \theta(a)x$. Ceci montre que $\theta(a) = \bar{a} = a^*$ pour $a \in L$. En particulier, si $a \in T$, $aa^* = 1$ et de là $\theta(a) = a^{-1}$.

Si g est semi-simple, mais contenu dans un tore non elliptique, la même description de T s'applique à ceci près que L doit contenir un facteur $E \oplus E$, l'involution étant $(a,u) \mapsto (\bar{u},\bar{a})$.

Jusque là nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que G est à trois variables, mais nous terminerons la preuve seulement dans ce cas. Les cas restant sont les suivants (cf. [**Ro1**], 3.9) :

– g régulier unipotent.

Comme il existe une seule classe de conjugaison d'éléments réguliers unipotents, le résultat est évident.

– g singulier unipotent.

Alors $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $z \in E$, $z + \bar{z} = 0$. La classe de conjugaison de g est déterminée par z modulo NE^*. Maintenant $\theta(g)$ est associé à $\bar{z} = -z$ donc conjugué à g^{-1}.

– $g = sn$, s semi-simple (non central), n unipotent, et à conjugaison près,.

Alors n est singulier et

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & t\alpha \\ & \beta & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta \in E^1 = \mathrm{Ker}\,(N : E^* \to \mathbb{Q}_p^*)$, et $t + \bar{t} = 0$. Alors $\bar{g} = g^{-1}$.

□

3.1.5. Il est clair que pour tout p, θ laisse fixe le compact maximal $G(\mathbb{Z}_p)$.

Soit U un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$, stable par θ. L'automorphisme θ induit donc un automorphisme de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p), U)$. Si l'on note $\rho^\theta = \rho \circ \theta$ pour ρ une représentation de $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p), U)$, il est clair que pour π une représentation irréductible de $G(\mathbb{Q}_p)$ engendrée par ses U-invariants, telle que $\pi^U \simeq \rho$, on a $(\pi^\theta)^U \simeq \rho^\theta$.

Par ailleurs, nous noterons $\check{\rho}$ la représentation ${}^t\rho(g^{-1})$. On vérifie aisément que pour π comme ci-dessus, $\check{\pi}^U$ est isomorphe à $\check{\rho}$.

On en déduit un corollaire de la proposition :

COROLLAIRE 3.1.6. *Soit U un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$ stable par θ. On suppose que l'une des deux hypothèses suivante est satisfaite :*

- *U est un compact maximal.*
- *U est standard très bien placé (cf.* [**V1**]*, II) et l'on est en caractéristique banale.*

Alors pour ρ une représentation irréductible de $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p), U)$, on a

$$\rho^\theta = \check{\rho}.$$

Démonstration — D'après ce qui précède, et la proposition, il suffit de montrer qu'il existe une représentation π de $G(\mathbb{Q}_p)$, tel que $\pi^U \simeq \rho$. Sous la première hypothèse, si p est inerte ou ramifié, qu'il existe un tel π pour chaque ρ a été vérifié au chapitre IV ; si p est décomposé, cela résulte de [**V1**], chapitre III. Sous la seconde hypothèse, cela résulte de l'équivalence de catégories [**V1**], II.3.12. □

3.2. Préliminaires locaux.

3.2.1. Soit p une place de $\mathbb{Q}$ décomposée dans E. On pose $K = G(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$. Soit P un sous-groupe de Borel de $G(\mathbb{Q}_p)$, stabilisateur d'un drapeau associé ‘a une base, et soit B le sous-groupe d'Iwahori correspondant à cette même base Soient P_1, P_2 les deux P un sous

Pour voir que k est l'unique quotient de M, on peut utiliser [**LAZ1**], corollaire 8.1.7 qui affirme que M est *isomorphe* a une induite principale non ramifiée, combiné avec [**V1**], lemme II.2.22, qui affirme que I' a un unique quotient. Ceci nous ramène à vérifier que M a bien k comme quotient. Or on a la description (cf. V.2.2 – X désigne les sommets de l'immeuble de PGL_3)

$$M = \mathcal{C}(X)/((T_1 - (p^2+p+1))\mathcal{C}(X) + (T_2 - (p^2+p+1))\mathcal{C}(X))$$

, sur laquelle on voit que la forme linéaire s sur $\mathcal{C}(X)$ "somme des valeurs de la fonction" passe au quotient M, et définit une flèche surjective $M \to k$ G-équivariante (pour l'action triviale à l'arrivée).

Comme ce résultat (que k est l'unique sous-quotient de M) est le point-clé de la méthode d'augmentation du niveau, nous nous permettons d'en donner une autre preuve, plus directe, à partir des résultats du chapitre V : Il suffit de montrer que pour tout sous-G-module propre M_0 de M, on a $M_0 \subset \operatorname{Ker} s$, car s définit alors un morphisme surjectif G-équivariant de M/M_0 vers k. Pour voir cela, supposons par l'absurde que $\phi \in M_0$ vérifie $s(\phi) \neq 0$; ϕ a un relevé $f \in \mathcal{C}(X)$, tel que $s(f) \neq 0$. Comme on est en caractéristique banale, on peut moyenner f par K, obtenant une fonction f', et on a toujours $s(f') \neq 0$ et l'image de ϕ' de f' dans $M_{\lambda,\mu}$ est dans M_0, et non nulle (car $s(\phi') = s(f') \neq 0$). En appliquant la proposition V.3.3.12, on voit que ϕ' a un autre représentant ϕ'' à support $O \in X$. On en déduit que $M_0 = M$, ce qui est absurde. □

Remarque. Les représentations St et k sont autoduales, tandis que V_{P_1} et V_{P_2} sont duales l'une de l'autre. Pour le voir simplement, on peut par exemple remarquer que θ envoie B_1 sur un conjugué de B_2, et B sur un conjugué de lui-même. On en déduit que $V_{P_1}^{\theta} = V_{P_2}$ (et vice-versa), et que $St^{\theta} = St$. On conclut par la proposition 3.1.3.

Lemme 3.2.4 (Casselman). *Soit k de caractéristique banale. On a*

$$Ext^1(St, k) = Ext^1(k, St) = 0.$$

Démonstration — Les arguments de [**CAS**] s'appliquent sans changement au cas de la caractéristique banale. En particulier, la Steinberg n'a de cohomologie qu'en degré 2 (puisque G est de rang semi-simple deux) et donc $\mathrm{Ext}^1(k, St) = 0$. L'autre assertion s'en déduit car la Steinberg est autoduale. □

Proposition 3.2.5. *Soit N un quotient non nul de M. De deux choses l'une :*

- *Soit N admet la représentation triviale pour sous-module.*
- *Soit N admet un quotient N' qui est une extension non triviale de k par l'un des VP_i ($i = 1$ ou 2).*

Démonstration — D'après la proposition 3.2.3, N admet k comme quotient. Si k n'est pas facteur direct dans N, c'est donc qu'il existe un quotient de N' de N qui est une extension non triviale de k par l'un des facteurs de M. Comme ce facteur ne peut être St dprès le lemme précédent, c'est donc l'un des VP_i. □

LEMME 3.2.6. *Soit k de caractéristique banale. Le foncteur $V \mapsto V^B$ définit une équivalence de catégorie de la catégorie des G-représentations lisses engendrées par leurs B-invariants vers celle des $\mathcal{H}(G,B)$-modules.*

Démonstration — C'est un théorème fondamental de Borel en caractéristique nulle, étendu au cas banal par Vigneras : cf. [**V1**], II.3.12 □

LEMME 3.2.7. *Soit k de caractéristique banale. Le centre $\mathcal{Z}$ de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G,B)$ s'envoie isomorphiquement sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K)$. Pour $M_{\lambda,\mu}$ un module universel, $\mathcal{Z}$ agit sur $M^B_{\lambda,\mu}$ par le même caractère que $\mathcal{H}(G,K)$ sur $M^K_{\lambda,\mu}$.*

Démonstration — La première assertion résulte de la théorie du centre de Bernstein (voir [**CL**], corollaire 4.6) valable en caractéristique banale d'après [**LAZ1**] chapitre 5. La deuxième assertion est évidente pour λ et μ tel que $M_{\lambda,\mu}$ (géométriquement) irréductible. En effet, $M^B_{\lambda,\mu}$ est alors encore géométriquement irréductible, et $\mathcal{Z}$ y agit donc par un caractère, qui est nécessairement celui de l'action $\mathcal{H}(G,K)$ sur $M^K_{\lambda,\mu}$ puisque sur ce sous-espace ils coïncident. Ceci suffit pour λ et μ générique, et on conclut facilement que cela reste vraie pour λ et μ quelconque. □

3.2.8. La surjection canonique (définie au moins en caractéristique banale, et qui n'est pas un morphisme d'algèbre, mais qui en devient un une fois restreinte à $\mathcal{Z}$) $\mathcal{H}(G,B) \to \mathcal{H}(G,K)$ se factorise $\mathcal{H}(G,B) \to \mathcal{H}(G,B_i) \to \mathcal{H}(G,K)$ pour $i = 1$ ou 2. D'après le lemme précédent, le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{H}(G,B)$ s'injecte comme une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G,B_i)$. on notera encore $\mathcal{Z}$ l'image de cette injection.

3.3. Détermination des mauvais nombres premiers l.

3.3.1. Soit $K_f = \prod_{q \text{ premier}} K_q \subset G(\mathbb{A}_f)$ un compact par lequel π a un vecteur fixe non nul, et soit S l'ensemble des places où K_q n'est pas spécial. On pose

$$K^S = \prod_{q \notin S} K_q.$$

Pour chaque $q \in S$, on choisit un sous-groupe compact ouvert $U_q \subset G(\mathbb{Q}_q)$ tel que

- U_q est inclus dans un conjugué de K_q
- Le sous-groupe U_q est standard très bien placé dans $G(\mathbb{Q}_q)$
- Le sous-groupe U_q est stable par θ.

Il est clair que c'est toujours possible. On pose

$$U = \prod_{q \in S} U_q.$$

3.3.2. Pour tout anneau commutatif k, on définit comme en 2.3.4 le k-module $\mathcal{A}_k$ des fonctions à valeurs dans k sur l'ensemble fini

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/Z(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})G_\infty K^S U.$$

3.3.3. Si l'on note $\mathcal{H}_q$ l'algèbre de Hecke (à coefficients dans k, et à caractère central trivial) du groupe $G(\mathbb{Q}_q)$ relativement à son sous-groupe K_q (si $q \notin S$) ou U_q (si $q \in S$), et si l'on pose

$$\mathcal{H}_S = \prod_{q \in S} \mathcal{H}_q,$$

$$\mathcal{H}^S = \prod_{q \notin S} \mathcal{H}_q,$$

ces deux algèbres agissent naturellement à droite sur $\mathcal{A}(k)$.

3.3.4. Dorénavant, on suppose que l **est une caractéristique banale pour tous les** $G(\mathbb{Q}_q)$**,** $q \in S$. Comme S est fini, ceci n'exclut qu'un nombre fini de l. Tous les anneaux k que nous considérerons seront maintenant des algèbres sur $\mathbb{Z}_l$, si bien qu'on pourra utiliser (si k est un corps) pour tout $q \in S$, l'équivalence de catégories entre les représentations lisses sur k de $G(\mathbb{Q}_q)$ engendré par leurs U_q-invariants et les $\mathcal{H}_q$-modules.

3.3.5. Soit

$$\pi_S = \prod_q \pi_q$$

la restriction à $\prod_{q \in S} G(\mathbb{Q}_q)$ de π. Soit π_S^U le $\mathcal{H}_S$-module correspondant. Par les hypothèses sur les U_q que nous avons faites, π_S^U engendre π_S et $\pi_S^U \subset \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$. Par des arguments standard, il existe un corps de nombres L tel que π_S^U soit défini sur L. Pour toute place λ de L il existe un réseau stable et on peut parler de la réduction modulo λ de π_S^U, bien définie dans le groupe de Grothendieck.

On suppose dorénavant que l **est tel que pour tout** λ **place de** L **divisant** l**, la réduction de** π_S^U **modulo** λ **est irréductible**.

Par des arguments standard de finitude, comme π_S^U est irréductible sur L, cette condition n'exclut qu'un ensemble fini de l.

3.3.6. Nous passons maintenant à des conditions nettement plus restrictives : notons χ le caractère de $\mathcal{H}^S$ correspondant à π. Par des arguments standard, χ est défini sur un corps de nombres, par exemple L quitte à grossir ce dernier, et on peut parler de la réduction modulo λ de χ que l'on note $\bar{\chi}$. Les notations $\mathcal{A}_k(\chi)$ ou $\mathcal{A}_k(\bar{\chi})$ désignent les espaces propres généralisés de ces caractères.

DÉFINITION. On dit que l est un nombre premier de multiplicité 1, si, pour toute place λ de L (de corps résiduel $\mathbb{F}$) au-dessus de l, notant $\bar{\pi}_S^U$ la réduction de

π_S^U modulo λ, $\bar{\pi}_S^U$ n'apparaît qu'une seule fois dans la suite de Jordan-Hölder du $\mathcal{H}_S$-module $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}(\bar{\chi})$, qui plus est comme sous-module.

On suppose désormais que l **est un nombre premier de multiplicité** 1.

LEMME 3.3.7. *L'ensemble des nombres premiers qui ne sont pas de multiplicités* 1 *est fini.*

Démonstration —

La multiplicité de π_S^U dans $\mathcal{A}_L(\chi)$ est égale à la dimension de

$$\oplus_{\rho^S} \otimes_{q \notin S} \rho_q^{K_q},$$

, où la somme porte sur les représentations irréductibles ρ^S de $G^S = \prod_{q \notin S} G_q$ telles que ρ^S a un vecteur fixe par K^S propre sous $\mathcal{H}^S$ pour le caractère χ, et telle que $\pi_S \otimes \rho_S$ apparaissent dans $\mathbb{A}_L$. Comme π est de multiplicité 1, la première condition implique $\rho^S = \pi^S$, et la multiplicité cherchée est donc la dimension de

$$\otimes_{q \notin S} \pi_q^{K_q};$$

cette dimension est 1 car tous les K_q sont spéciaux[6] pour $q \notin S$.

On a donc

$$\mathcal{A}_L = \pi_S^U \oplus (\oplus_i \mathcal{A}_i) \qquad \text{(somme finie)},$$

où les $\mathcal{A}_i$ sont des $\mathcal{H}_S$-modules irréductibles, différents de π_S^U

Si l est tel que, pour tout λ au-dessus de l,

- Chacun des $\mathcal{A}_i$ reste irréductible modulo λ, et distinct de $\bar{\pi}_S^U$.
- L'injection $\pi_S^U \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{O}_\lambda}$ reste une injection après tensorisation par $\mathbb{F}$,

alors il est clair que l est de multiplicité 1. Or ces conditions n'excluent qu'un nombre fini de l. □

3.3.8. Enfin, on fait l'hypothèse que π **est non-Eisenstein modulo** l – voir [**CL**].

3.4. Fin de la preuve.

3.4.1. On a fixé l vérifiant toutes les hypothèses en gras dans la sous-section précédente. Pour montrer le théorème, on considère maintenant un p qui vérifie ses hypothèses. En particulier, $p \notin S$, p est décomposé dans E, et l est banal pour $G(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

6. Pour voir que $\pi_q^{K_q}$ est de dimension au plus 1 si K_q est spécial, et π_q irréductible, on distingue le cas q décomposé, où $G_q = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_q)$ et K_q est nécessairement hyperspécial, auquel cas le résultat est standard en caractéristique zéro et connu ([**V1**]) en caractéristique banale ; et les cas q inerte ou ramifié, auquel cas G_q est de rang 1 (modulo son centre), ce qui permet de voir que si π_q a un K_q-invariant, c'est un quotient d'un module universel d'après la proposition IV.5.3.6, et d'appliquer la proposition IV.4.8.2

3.4.2. On pose $S' = S \cup \{p\}$, et $\mathcal{H}^{S'} = \otimes_{q \in S'} \mathcal{H}_q$, si bien que $\mathcal{H}^S = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}^{S'}$. On pose de même $K^{S'} = \prod_{q \notin S'} K_q$. En p, on adopte les notations de la partie 3.2 : le sous-groupe hyperspécial K_p est noté K, on note $\mathcal{Z}$ le centre de $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p), B)$, qui s'identifie à $\mathcal{H}_p$ (cf. lemme 3.2.7)

3.4.3. Pour k un anneau, M un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$, on définit comme en 2.3.4 le k-module $\mathcal{A}_{M,k}$ des fonctions à valeurs dans k sur l'ensemble fini

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})G_\infty K^{S'} M,$$

(si bien que $\mathcal{A}_{K,k}$ désigne ce que nous notions simplement $\mathcal{A}_k$ dans la sous-partie précédente) et $\tilde{\mathcal{A}}_k$ comme la limite inductive les $\mathcal{A}_{M,k}$ pour M sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$.

On garde la notation habituelle pour les espaces propres généralisés : $\mathcal{A}_{K,k}(\eta) \subset \mathcal{A}_{B,k}(\eta)$ pour η un caractère de $\mathcal{H}^S = \mathcal{H}^{S'} \otimes \mathcal{H}_p = \mathcal{H}^{S'} \otimes \mathcal{Z}$, et aussi $\tilde{\mathcal{A}}_k(\chi)$, $\mathcal{A}_{U,k}(\chi)$ pour χ caractère de $\mathcal{H}^{S'}$

LEMME 3.4.4. – *Comme représentation (à droite) de $G(\mathbb{Q}_p)$, $\tilde{\mathcal{A}}$ est isomorphe à $\tilde{\mathcal{A}}^\theta$.*
– *Pour χ caractère de $\mathcal{H}_{\Sigma'}$, cet isomorphisme induit un isomorphisme (de G_p-module à droite) $\tilde{\mathcal{A}}(\chi) \simeq \tilde{\mathcal{A}}(\check{\chi})^\theta$*

Démonstration — Pour démontrer la première assertion, considérons l'application θ de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ dans lui-même. Par hypothèse θ stabilise U et $K^{S'}$ et clairement aussi $G(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Z}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ et G_∞.

Donc θ définit un automorphsime ψ de $\tilde{\mathcal{A}}$. Comme cet automorphisme vérifie clairement

$$\forall a \in \tilde{\mathcal{A}},\ \forall g \in G(\mathbb{Q}_p),\ \psi(ag) = \psi(a)\theta(g),$$

il définit un isomorphsime de $\tilde{\mathcal{A}}$ sur $\tilde{\mathcal{A}}^\theta$.

Pour démontrer la seconde, on remarque qu'il est clair que ψ envoie l'espace propre généralisé $\tilde{\mathcal{A}}(\chi)$ sur $\tilde{\mathcal{A}}(\chi^\theta)$ et l'on applique le corollaire 3.1.6. □

LEMME 3.4.5. *Comme G_p-module à droite, on a un isomorphisme entre $\mathcal{A}(\chi)$ et $\check{\mathcal{A}}(\check{\chi})$.*

Démonstration — Cela résulte immédiatement de la dualité déjà utilisée (lemme 5.3 de [**CL**]). □

PROPOSITION 3.4.6. *On a un isomorphsime $\check{\mathcal{A}}(\chi) = \mathcal{A}(\chi)^\theta$ comme G_p-module.*

Démonstration — Combiner les deux précédents lemmes. □

3.4.7. À la représentation π est associé un caractère $\eta = (\chi_p, \chi)$ de $\mathcal{H}_\Sigma$ défini sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'un corps de nombres L. Par hypothèse, il existe une place λ de $\mathcal{O}$ au-dessus de l, de corps résiduel $\mathbb{F}$, tel que $\mathcal{A}_{K,\mathbb{F}}(\bar{\eta})$ est non nul, et tel que $\bar{\chi}_p = \chi_{st}$ modulo λ.

On note $\mathcal{O}_\lambda$, L_λ, les complétés de $\mathcal{O}$ et L par rapport à λ, et $\mathbb{F}$ le corps résiduel.

3.4.8. Rappelons que, sous nos hypothèses sur l, le $\mathcal{H}_S$-module $\mathcal{A}_{K,\mathbb{F}}(\bar{\eta})$ contient un sous-module X_S isomorphe à $\bar{\pi}_S^U$. Dprès la propriété universelle du module universel, on dispose d'un morphisme de $\mathcal{H}_S \times G(\mathbb{Q}_p)$-module

$$X_S \otimes M \to \mathcal{A}_{\mathbb{F}}(\bar{\chi}), \tag{41}$$

dont l'image est le sous-module engendré par X_S.

LEMME 3.4.9. *S'il n'existe pas de représentations vérifiant la conclusion du théorème, les modules (sur $\mathcal{H}_S \otimes G(\mathbb{Q}_p)$) $X_S \otimes V_{P_1}$ et $X_S \otimes V_{P_2}$, $X_S \otimes \mathbb{F} = X_S$ apparaissent avec multiplicité* 1 *dans la suite de composition de $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{F}}(\bar{\chi})$.*

Démonstration — S'il n'existe pas de représentation, sur $\mathbb{C}$, vérifiant la conclusion du théorème, il n'en existe pas non plus sur un corps de nombres L, ni a fortiori sur un complété L_λ de L

Introduisons une notation : pour $M = B, K, B_1$ ou B_2, on pose

$$\mathcal{A}_{M,L_\lambda}(\bar{\chi}) = \oplus_{\chi'} \mathcal{A}_{M,L_\lambda}(\chi') \subset \mathcal{A}_{M,L_\lambda},$$

où la somme porte sur tous les caractères χ' de $\mathcal{H}^{S'}$ à valeurs dans L se réduisant modulo λ en χ (rappelons qu'un tel caractère est nécessairement à valeurs entières).

Soit maintenant $f \in \mathcal{A}_{B,L_\lambda}(\bar{\chi})$, fixe par B_1 ou B_2, i.e. $\in \mathcal{A}_{B_i,L_\lambda}(\bar{\chi})$ pour $i = 1$ ou 2. Suit ρ un facteur irréductible de la $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$-représentation ρ engendrée par f,(dans $\mathcal{C}(G(\mathbb{Q})\mathbb{Z}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ et ϕ l'image de f dans ρ. La représentation ρ une représentation automorphe, qui a un vecteur fixe (à savoir ϕ) par K_q pour tout $q \notin S'$, i.e. pour tout $q \neq p$ tel que K_q est spécial. Elle vérifie donc la condition iii. de la conclusion du théorème 1.5.3. De plus, l'action de $\mathcal{H}^{S'}$ sur ϕ est un caractère congru à χ, ce qui implique que π est congrue à ρ modulo λ, soit la condition i. La représentation ρ contient de plus un vecteur (encore ϕ) stable par B_1 ou par B_2 ; si elle contenait un vecteur fixe pas K, disons ϕ', ϕ serait dans la sous-représentation engendré par ϕ' (égale à ρ) par irréductibilité, et l'on aurait $\phi' \in \mathcal{A}_{K,L_\lambda}(\bar{\chi})$. Si le théorème était mis en défaut, ce raisonnement s'appliquerait à toutes les projections ϕ de f dans les différents facteurs de la représentation qu'elle engendre, et $f = \sum \phi$ serait dans le sous-module dans le sous-module engendré par $\mathcal{A}_{K,L_\lambda}(\bar{\chi})$.

Autrement dit, un $f \in \mathcal{A}_{B,L_\lambda}(\bar{\eta})$, fixe par B_1 ou B_2, engendre une représentation ρ vérifiant toutes les conclusions du théorème, pour peu que f ne soit pas dans le sous-module engendré par $\mathcal{A}_{K,L_\lambda}(\bar{\chi})$.

Autrement dit, si la conclusion du théorème est mise en défaut, c'est que le sous-$\mathcal{H}(G_p, B)$-module V_{L_λ} de $\mathcal{A}_{B,L_\lambda}(\bar{\chi})$ engendré par $\mathcal{A}_{K,L_\lambda}(\bar{\chi})$ contient $\mathcal{A}_{B_1,L_\lambda}(\bar{\chi})$ et

$\mathcal{A}_{B_2,L_\lambda}(\bar{\chi})$. On a donc les inclusions :

$$\mathcal{A}_{B_1,L_\lambda}(\bar{\chi}) + \mathcal{A}_{B_2,L_\lambda}(\bar{\chi}) \subset V_{L_\lambda} \subset \mathcal{A}_{B,L_\lambda}(\bar{\chi}). \tag{42}$$

Le module $\mathcal{A}(B, L_\lambda)(\bar{\chi})$ possède un $\mathcal{O}_\lambda$-réseau stable par $\mathcal{H}^{S'}$, $\mathcal{H}(G_p, B)$ et $\mathcal{H}_S$ (que nous noterons $\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}(\bar{\chi})$) dont la réduction modulo λ est isomorphe au $\mathcal{H}^S$-module $\mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\chi})$. Pour le voir, on peut définir $\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}(\bar{\chi})$ comme l'intersection de $\mathcal{A}_{B,L_\lambda}(\bar{\chi})$ avec $\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}$ dans $\mathcal{A}_{B,L}$. Par construction $\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}(\bar{\chi})$ est clairement un sous-module libre de type fini et *saturé* de $\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}$, ce qui signifie que le quotient est sans torsion (= plat), et ce qui implique qu'après tensorisation par $\mathbb{F}$, la flèche

$$\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}(\bar{\chi}) \otimes \mathbb{F} \to \mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda} \otimes \mathbb{F} = \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}$$

reste une injection. Cette injection permet d'identifier canoniquement $\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}(\bar{\chi})$ a son image dans $\mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}$. Cette image est clairement contenue dans $\mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\chi})$, et est en fait égale à ce dernier module par égalité des dimensions (voir [**CL**] 5.5). On a donc bien l'isomorphisme canonique annoncé :

$$\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}(\bar{\chi}) \otimes \mathbb{F}_p = \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\chi}).$$

On peut de la même façon définir des réseaux $\mathcal{A}_{B_i,\mathcal{O}_\lambda}(\bar{\chi})$ (resp. $V_{\mathcal{O}_\lambda}$) de $\mathcal{A}_{B_i,L_\lambda}(\bar{\chi})$ (resp. de V_{L_λ}), qui sont des sous-modules libres de type finis et saturés de $\mathcal{A}_{B,\mathcal{O}_\lambda}$ et dont les produits tensoriels par $\mathbb{F}$ s'identifient canoniquement aux sous-espaces $\mathcal{A}_{B_i,\mathbb{F}}(\bar{\chi})$ (resp. à un sous-espace noté $V_\mathbb{F}$) de $\mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}$. Comme tous les modules considérés sont saturés dans le module ambiant, les inclusions (42) restent valables en caractéristique l :

$$\mathcal{A}_{B_1,\mathbb{F}}(\bar{\chi}) + \mathcal{A}_{B_2,\mathbb{F}}(\bar{\chi}) \subset V_\mathbb{F} \subset \mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\chi}). \tag{43}$$

Dans le $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}(G_p, B)$-module V_L il y a (par l'hypothèse que l est de multiplicité 1) un sous-module isomorphe à $\pi_S^U \otimes N$, ou N est un quotient du module universel M^B (à savoir le sous-$\mathcal{H}(G_p, B)$-module engendré par l'unique sous module π_S^U de $\mathcal{A}_{K,L_\lambda}(\bar{\chi})$ et d'autres facteurs de Jordan-Hölder de la forme $\rho_S^U \otimes Y$, où les ρ_S^U sont différent de π_S^U et apparaissent dans $\mathcal{A}_{K,L_\lambda}(\bar{\chi})$. Par le théorème de Brauer-Nesbitt, les facteurs de Jordan-Hölder de $V_\mathbb{F}$ sont, dans le désordre, les facteurs intervenant dans la réduction par rapport à des réseaux stables des facteurs de V_{L_λ}. Le sous-module $\pi_S^U \otimes N^B$ ne peut donner que des facteurs $\bar{\pi}_S^U \otimes N'$, où N' est l'un des quatre facteurs du module universel M sur $\mathbb{F}$ à savoir $V_{P_1}^B$, $V_{P_2}^B$, $\mathbb{F}$ ou St^B. Les autres facteurs $\rho_S^U \otimes \bar{Y}$ ne peuvent donner en réduction des facteurs de la forme $\bar{\pi}_S^U \otimes$ quelque chose, toujours d'après l'hypothèse de multiplicité 1. On voit donc que dans $V_\mathbb{F}$ les facteurs $\bar{\pi}_S^U \otimes \mathbb{F}$, $\bar{\pi}_S^U \otimes V_{P_1}^B$, $\bar{\pi}_S^U \otimes V_{P_2}^B$ n'apparaissent qu'une fois au plus.

Mais par ailleurs, ces facteurs ne peuvent apparaître dans le quotient $\mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\chi})/V_\mathbb{F}$, puisque ce dernier ne contient pas de B_1 ni de B_2-invariants (par (43) et exactitude du foncteur des B_i-invariants en caractéristique banale). Ils apparaissent donc

avec multiplicité au plus 1 dans $\mathcal{A}_{B,\mathbb{F}}(\bar{\chi})$. Le lemme en découle, via l'équivalence de catégorie 3.2.6 $\square$

3.4.10. Combinant la conclusion de ce lemme avec la proposition 3.4.6, on arrive à une contradiction, ce qui prouve le théorème : l'image du morphisme (41) est un quotient de $X_S \otimes M$. Comme X_S est irréductible, cette image est de la forme $X_S \otimes N$, où N est un quotient de M. D'après la proposition 3.2.5, soit N contient comme sous-module la représentation triviale $\mathbb{F}$ de G_p, soit N admet un quotient N' isomorphe à une extension non triviale de $\mathbb{F}$ par VP_i, avec $i = 1$ ou 2. Le premier cas est exclu car $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}(\chi)$ ne peut contenir comme sous-module la représentation triviale, puisque π n'est pas Eisenstein modulo l (voir [**CL**]). On voit donc que $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}(\chi)$ contient comme sous-quotient $X_S \otimes N'$. Comme $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}(\chi)$ est isomorphe au transformé par θ de son dual (proposition 3.4.6), il contient aussi comme sous-module le dual du transformé par θ de $X_S \otimes N'$, qui est un module de la forme $X_S \otimes N''$, où N'' est une extension non triviale de VP_i par $\mathbb{F}$ (comme N' mais dans l'autre sens). Ceci implique que l'un au moins des facteurs $X_S \otimes \mathbb{F}$ et $X_S \otimes VP_i$ apparaît deux fois comme facteur de Jordan-Hölder de $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}(\chi)$, contredisant le lemme 3.4.9. CQFD

CHAPITRE VIII

Une construction automorphe d'extensions de caractères galoisiens

1. Introduction

1.1. Conjectures.

1.1.1. Soit K un corps de nombres, l un nombre premier et V une représentation sur $\mathbb{Q}_l$ de $\mathfrak{G}_K = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K)$, géométrique au sens de [**F-PR**], page 650 (ceci implique entre autres qu'elle est partout potentiellement semi-stable). Soit Σ un ensemble de places de K, contenant les places à l'infini. Nous dirons que V a *bonne réduction hors* Σ, si elle est cristalline en les places de K qui divisent l et n'appartiennent pas à Σ, et si elle est non ramifiée en les places de K qui ne divisent pas l et n'appartiennent pas à Σ.

1.1.2. Le groupe de cohomologie $H^1(\mathfrak{G}_K, V)$ représente les classes d'équivalence d'extensions continues :

$$0 \to V \to U \to \mathbb{Q}_l \to 0 \tag{44}$$

On définit (cf. [**F-PR**], page 643) $H^1_{f,\Sigma}(\mathfrak{G}_K, V)$ comme le sous-groupe de $H^1(\mathfrak{G}_K, V)$ paramétrant les extensions (44) telles que

- La représentation U a bonne réduction hors Σ.
- La représentation U est potentiellement semi-stable en les places finies de Σ.

Notons que U est automatiquement potentiellement semi-stable en les places finies ne divisant pas l. La deuxième condition ci-dessus n'est donc non vide que s'il y a des places de Σ qui divisent l.

(Pour voir que la définition de $H^1_{f,\Sigma}$ donnée *loc. cit* correspond bien à celle explicitée ci-dessus, le lecteur se reportera à *loc. cit.* page 643, où le $H^1_f(\mathfrak{G}_K, V)$ global est défini. Il y verra que ce groupe paramètre les extensions dont les classes dans les $H^1(\mathfrak{G}_{K_v}, V)$ appartiennent aux $H^1_f(\mathfrak{G}_{K_v}, V)$ si $v \notin \Sigma$, et aux $H^1_g(\mathfrak{G}_{K_v}, V)$ si v est une place finie $\in \Sigma$. Que la classe de U appartienne au H^1_f (resp. au H^1_g) local en $v \notin \Sigma$ (resp $v \in \Sigma$) signifie que U est non ramifiée (resp. potentiellement semi-stable) (puisque V l'est), voir 3.3.6 page 631.)

1.1.3. Supposons que la fonction $L(V, s)$ associée à V admette un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Notons L_Σ la fonction L partielle, où les facteurs d'Euler en $v \in \Sigma$ ont été enlevés. On peut alors définir son ordre en $s \in \mathbb{C}$, qui est un entier relatif.

CONJECTURE 1.1.4 (Fontaine, Perrin-Riou, [**F-PR**], 3.4.5).

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_\Sigma(V, s) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^1_{f,\Sigma}(\mathfrak{G}_K, V^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}_l} H^0(\mathfrak{G}_K, V^*(1)) \tag{45}$$

1.1.5. *Conventions.* Précisons les conventions utilisées, sans quoi ce qui précède n'a pas de sens bien déterminé.

On note ω_l le caractère cyclotomique, i.e. le caractère de $\mathfrak{G}_K$ à valeur dans $\mathbb{Z}_l^*$ défini par l'égalité $\sigma(\zeta) = \zeta^{\omega_l(\sigma)}$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{G}_K$ et ζ racine l^∞-ième de l'unité dans $\bar{K}$. En particulier, si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de K qui ne divise pas l, et si $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}$ désigne le Frobenius *arithmétique* de $\mathfrak{P}$, on a $\omega_l(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}) = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{P})$ (un nombre entier). Si l'on désigne par $f_{\mathfrak{P}}$ le Frobenius *géométrique*, inverse du précédent, on aura bien sûr

$$\omega_l(f_{\mathfrak{P}}) = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{P})^{-1}.$$

La notation V^* désigne la contragrédiente de V. On note $V(1)$ (twist à la Tate) le produit tensoriel $V \otimes \omega_l$.

La fonction L de V est définie de la manière usuelle. On a en particulier

$$L(V(n), s) = L(V, n+s)$$

et si $\mathbb{Q}_l$ désigne la représentation triviale, $L(\mathbb{Q}_l, s) = \zeta(s)$ (fonction ζ de Riemann)

1.1.6. *Poids.* Dans la pratique, pour $\mathfrak{P}$ une place de K en laquelle V est non ramifiée, les valeurs propres de l'opération de $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}$ sur V seront toujours des nombres algébriques, de valeur absolue complexe (pour n'importe quel plongement) égale à $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{P})^{-w/2}$ où w est un nombre entier indépendant de $\mathfrak{P}$, qu'on appellera le poids de V. Ainsi, ω_l est de poids -2.

Si V est de poids w, la fonction $L_\Sigma(V, s)$ est définie par un produit eulérien convergent pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1 + w/2$ (on vérifie par exemple que pour $V = \omega_l^n$, $L(V, s) = \zeta(s+n)$ converge bien si $\mathrm{Re}(s) > 1 - n$). La fonction $L(V, s)$ ne s'annule donc pas pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1 + w/2$, donc elle ne s'annule pas en 0 si $w < -2$. Cette condition revient à ce que le poids de $V^*(1)$ soit strictement positif, auquel cas on a aussi $H^0(\mathfrak{G}_K, V^*(1)) = 0$. La conjecture implique donc que

CONJECTURE 1.1.7. *Si V est de poids strictement positif, $H^1_{f,\Sigma}(\mathfrak{G}_K, V) = 0$.*

Cela devrait rester valable en poids nul.

1.1.8. Si V est une représentation sur une extension finie L_λ de $\mathbb{Q}_l$, au lieu de $\mathbb{Q}_l$, la conjecture 1.1.4 reste certainement tout aussi raisonnable, de même que son corollaire 1.1.7.

1.1.9. Si M est un motif pur sur K à coefficients dans un corps de nombres L, qui a bonne réduction hors Σ, et si M_λ désigne la réalisation λ-adique de M (qui a alors aussi bonne réduction hors Σ), la conjecture implique que, pour toute place λ de L,

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_\Sigma(M, s) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^1_{f,\Sigma}(\mathfrak{G}_K, M_\lambda^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}_l} H^0(\mathfrak{G}_K, M_\lambda^*(1)) \tag{46}$$

1.1.10. Supposons de plus que le motif M soit irréductible, ou, ce qui revient au même si l'on dispose de la conjecture de Tate, que les représentations M_λ le

soient. Alors $H^0_{f,\Sigma}(M^*_\lambda(1)) = 0$, sauf si M est le motif de Tate, auquel cas ce groupe est de dimension 1 et la conjecture ci-dessus donne en particulier :

CONJECTURE 1.1.11. *Soit M un motif pur irréductible ayant bonne réduction hors Σ, différent du motif de Tate. On a $L_\Sigma(M,0) = 0$, si et seulement si pour tout $\lambda \notin \Sigma$, $H^1_{f,\Sigma}(\mathfrak{G}_K, M^*_\lambda(1)) \neq 0$.*

On s'attend de plus à ce que les extensions prédites par la non-nullité du H^1 soient *motiviques*, en un sens que nous ne cherchons pas à préciser pour l'instant.

1.1.12. La conjecture précédente admet aussi une variante modulaire naturelle : supposons M irréductible, ainsi que toutes les représentations M_λ et que les réductions, pour presque tout λ de $\bar{M}_\lambda$ de M_λ modulo λ (ce qui devrait moralement aussi découler des hypothèses précédentes). Pour presque tout λ, $\bar{M}_\lambda$ est donc une représentation galoisienne bien définie sur un corps fini $\mathbb{F}_\lambda$.

1.1.13. Nous dirons qu'une représentation ρ de $\mathfrak{G}_K$ sur un corps fini $\mathbb{F}_\lambda$ a *bonne réduction hors* Σ, si elle est non ramifiée en les places de K ne divisant pas l et n'appartenant pas à Σ, et si elle est de Fontaine-Laffaille en les places de K divisant l et appartenant à Σ. Rappelons (cf. [**B-M**], troisième partie, page 7) que la notion de représentation de Fontaine-Laffaille est l'analogue pour les représentations de torsion de la notion de représentation cristalline, et qu'une représentation de torsion qui apparaît comme sous-quotient de la cohomologie étale l-adique d'une variété propre et lisse X sur K ayant bonne réduction sur K est de Fontaine-Laffaille pour l assez grand (plus précisément pour l supérieurs aux poids de Hodge-Tate du groupe de cohomologie considéré)

CONJECTURE 1.1.14. *Soit M un motif pur irréductible, ayant bonne réduction hors Σ, différent du motif de Tate. On a $L_\Sigma(M,0) = 0$, si et seulement si pour presque toute place λ de L, il existe une extension non scindée, ayant bonne réduction hors Σ*

$$0 \to \bar{M}^*_\lambda(1) \to V \to \mathbb{F}_\lambda \to 0.$$

Là encore, les extensions prédites devraient être motiviques.

1.2. Objectifs et méthodes.

1.2.1. L'objectif de ce chapitre est de démontrer quelques cas très particuliers d'une forme affaiblie de cette conjecture, en utilisant une méthode nouvelle basée sur des congruences entres formes automorphes endoscopiques, et formes automorphes stables (pour le groupe $U(2,1)$, en l'occurrence seul groupe avec Sp_4) où l'on connaisse à l'heure actuelle une preuve des conjectures d'Arthur sur les multiplicités des représentations endoscopiques)

1.2.2. *Objectifs.* Nous nous limitons au cas le plus simple, celui ou le motif M est de dimension 1 sur son corps de coefficients. On sait (*e.g.* [**Sch**]) que la donnée d'un tel motif est équivalente à celle d'un caractère de Hecke algébrique, et

qu'on peut donc donner un sens non conjectural à toutes les conjectures exprimées ci-dessus.

Nous supposons de plus que notre motif M, ou le caractère de Hecke χ qui lui est associé, est un motif sur un corps $K = E$ qui est un corps quadratique imaginaire sur $\mathbb{Q}$.

L'hypothèse de la conjecture est $L(\chi, 1) = 0$. Cette annulation peut se produire de deux manières qu'il importe de distinguer : la nullité de L peut être prédite par l'équation fonctionnelle, ou ne pas l'être. C'est dans le premier cas que nous nous plaçons.

Enfin, nous sommes obligés, pour des raisons essentiellement techniques, de faire quelques restrictions sur le type du caractère χ à l'infini, autrement dit sur le type de Hodge de M.

Sous ces hypothèses sur χ (ou M), nous ne parvenons à prouver la conjecture que pour une ensemble de densité analytique non nulle de places de L.

En revanche, nous obtiendorns une construction *géométrique* des extensions considérées : en fait, elles apparaissent dans la cohomologie étale des variétés algébriques sur E, en l'occurrence des surfaces modulaires de Picard associés à E.

Dans la suite de nous précisons les hypothèses faites et le théorème démontré après avoir fixé les notations et fait les rappels sur les caractères de Hecke nécessaires.

1.2.3. *Méthode.* L'idée de départ est d'utiliser les formules de Rogawski donnant la multiplicité des représentation *endoscopiques abéliennes* du groupe unitaire $U(3)$ associé à E. Ces formules, conjecturées par Arthur, exprime la multiplicité avec laquelle apparaît dans le spectre discret une telle représentation $\pi(\chi)$, non tempérée attachée à un caractère de Hecke χ, en fonction du signe du facteur ϵ de χ au centre de l'équation fonctionelle.

Sous nos hypothèses, une telle représentation existe. À une telle représentation est attachée une représentation galoisienne de dimension 3 qui est abélienne, somme de trois caractères (plus précisément le caractère trivial et deux twists de χ). Cette représentation n'est pas pure mais apparaît en poids -1, 0, 1.

L'idée est ensuite d'augmenter le niveau de $\pi(\chi)$, en une place p décomposée dans E, de manière à obtenir une représentation ρ, congrue à $\pi(\chi)$ modulo l, et qui ne soit plus endoscopique abélienne. Idéalement on devrait pouvoir obtenir une représentation *stable*, mais nous ne disposons pas d'un théorème d'augmentation du niveau assez fort pour le prouver, et nous devons distinguer deux cas : celui où ρ est stable et celui ou ρ est endoscopique non abélienne.

Dans ces deux cas, on dispose d'après les travaux de Blasius et Rogawski d'une représentation galoisienne r attachée à ρ sur un corps l-adique L_λ de dimension 3, qui est irréductible dans le premier cas, et somme d'une représentation irréductible de dimension 2 et d'un caractère dans le second.

Dans ces deux cas, comme ρ est congru à π modulo l, la représentation r est congrue à la représentation attachée à π, ce qui signifie que la réduction semisimplifiée $\bar{r}_{ss}$ de r est somme de trois caractères.

L'augmentation du niveau de π à ρ a (c'est fatal) introduit de la ramification en p. Cette ramification se retrouvera dans les représentations Galoisiennes associées, ce qui est gênant car on veut contrôler précisément la ramification des représentations obtenues. Pour exorciser cette représentation parasite, on utilise trois choses: La première est le fait que le théorème VII.1.5.3 nous permette de construire un ρ qui soit "pas trop ramifié" en p, i.e. qui ait un niveau parahorique et non iwahorique. La seconde est nos calculs de déformations du chapitre III, qui nous permettent, avec un peu de travail, de déduire de ce qui précède que la représentation galoisienne associée à r est elle aussi "pas trop ramifiée", à savoir que l'action de l'inertie (en chacune des deux places de E au-dessus de p) agit de manière unipotente d'ordre 2. On est alors en mesure d'utiliser nos résultats du chapitre VI qui affirment l'existence d'une extension parmi un certain nombre, à la ramification contrôlée, contenant celle que nous cherchons.

Il nous faut alors montrer que les autres extensions, "parasites", n'existent pas, et ceci termine la preuve.

1.3. Notations. Dans tout le chapitre, on fixe une extension quadratique imaginaire E de $\mathbb{Q}$ et l'on reprend les notations et définitions concernant les groupes unitaires associés à E de VII.1.2. On rappelle en particulier que G et G' désignent deux groupes unitaires à trois variables sur $\mathbb{Q}$ associés à E, qui sont isomorphes aux places finies, mais tels qu'à l'infini, $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(3)$ est compact tandis que $G'_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(2,1)$ est quasi-déployé.

Pour K un corps de nombres, on note $\mathbb{A}_K^*$ le groupe topologique des idèles de K, $\mathbb{A}_{K,f}^*$ celui des idèles finis de K et si v est une place de K, K_v la complétion de K pour une valeur absolue représentant v.

Pour K un corps on note $\mathfrak{G}_K$ un groupe de Galois absolu de K.

1.4. Rappels et préliminaires sur les caractères de Hecke.

1.4.1. On appelle *caractère de Hecke* ou *Grössencharakter* de K un morphisme continu χ de I_K dans $\mathbb{C}^*$, trivial sur le groupe des idèles principaux K^*.

1.4.2. On dit que χ est *unitaire* si $\chi\bar{\chi} = 1$, et que χ est *algébrique* si pour toute place complexe v de K, il existe deux *entiers* a_v et b_v, tels que pour tout $z \in K_v^* = \mathbb{C}^*$, on ait

$$\chi_v(z) = z^{a_v}\bar{z}^{b_v},$$

et si pour toute place réelle v de K, il existe un entier n_v tel qu'on ait pour tout $x \in (K_v)_0 = \mathbb{R}_+^*$

$$\chi_v(x) = x^{n_v}.$$

Le poids d'un caractére algébrique est, avec nos conventions, $w = -a_v - b_v$ (ce nombre est indépendant de v place complexe choisie; il est aussi égal à $-n_v$, pour v place réelle)

1.4.3. (pour ce qui suit, voir les premières pages de [**Sch**] ou l'article original de Weil.)

Si χ est un caractère de Hecke algébrique sur K, les valeurs de χ sur les idèles finis $\mathbb{A}^*_{K,f}$ engendrent un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. On note L ce corps de nombres. Si λ est une place finie de L il existe un (et un seul) caractère continu χ_λ de $\mathbb{A}^*_K$ trivial sur K^* et sur la composante neutre $(K^*_\infty)_0$ du produit des groupes multiplicatifs des complétés archimédiens de K, qui coïncide avec χ sur les idèles finis triviaux en les places de K divisant l (où l désigne la caractéristique résiduelle de λ)

1.4.4. *Théorie du corps de classe.* Nous normaliserons l'isomorphisme d'Artin de la théorie du corps de classe

$$\mathbb{A}^*_K/K^*(K^*_\infty)_0 \to \mathfrak{G}^{ab}_K,$$

(où $(K^*_\infty)_0$ désigne la composante neutre du produit des groupes multiplicatifs des complétés archimédiens de K) de la manière suivante: sur un quotient de ces groupes correspondant à une extension de K, non ramifié en une place finie v, l'uniformisante ϖ_v de K_v est envoyée sur le Frobenius géométrique f_v de v.

Cet isomorphisme permet d'identifier les caractères de $\mathbb{A}^*_K/K^*$ et de W_K. Nous userons librement de cette identification, qui s'applique spécialement aux χ_λ pour χ un caractère de Hecke algébrique comme ci-dessus.

1.4.5. *Norme et caractères cyclotomiques.* Le caractère de Hecke "valeur absolue" $|\ |$ n'est ramifié nulle part et envoie l'uniformisante ϖ_v en v sur $N_{K/\mathbb{Q}}(v)^{-1}$. Les caractères $|\ |_l$ de $\mathfrak{G}_K$ qui lui sont associés pour tout l envoie donc ϖ_v sur $|\varpi_v|_l = N_{K_v/\mathbb{Q}_p}(\varpi_v)^{-1}$, si v est une place de K au-dessus de p, et si $p \neq l$.

En particulier, $|\ |_l$ coïncide avec ω_l

1.4.6. *Fonctions L.* On reprend les conventions de [**D1**] et [**Tate**]. Si χ est un caractère de Hecke sur E, et v une place finie de E on pose

$$L_v(\chi) = (1 - \chi(\pi_v))^{-1},$$

si χ est non ramifié en v, et

$$L_v(\chi) = 1$$

si χ ramifiée en v. On pose

$$L_v(\chi, s) = L_v(\chi|\ |^s).$$

On définit aussi des facteurs méromorphes $L_v(\chi, s)$ pour v place archimédienne, voir [**Tate**], page 16. Enfin, on pose

$$L(\chi, s) = \prod_v L_v(\chi, s),$$

pour $\mathrm{Re}\,(s)$ suffisamment grand. La fonction $L(\chi, s)$ ainsi définie sur un demi plan admet un plongement méromorphe sur tout $\mathbb{C}$, qui est même entier si $\chi \neq |\ |^{s_0}$ pour tout s_0.

On a l'équation fonctionnelle de Hecke

$$L(\chi, s) = \varepsilon(\chi, s) L(\chi^{-1}, 1-s), \tag{47}$$

où $\varepsilon(\chi, s)$ est un fonction holomorphe sans zéro en s.

Quand le caractère χ est *unitaire*, (47) s'écrit encore

$$L(\chi, s) = \varepsilon(\chi, s) L(\bar{\chi}, 1-s) = \varepsilon(\chi, s)\overline{L(\chi, 1-\bar{s})}, \tag{48}$$

d'où l'on tire (voir aussi [**Tate**], (3.6.8) et (3.6.1))

$$|\varepsilon(\chi, 1/2)|_{\mathbb{C}} = 1. \tag{49}$$

1.5. Caractères de Hecke sur le corps quadratique imaginaire E.

1.5.1. L'élément non trivial $z \mapsto \bar{z}$ de $\mathrm{Gal}\,(E/\mathbb{Q})$ induit une involution non triviale de $\mathbb{A}_E^*/E^*$, encore notée $z \mapsto \bar{z}$. L'application norme

$$\begin{array}{rccc} N_{E/\mathbb{Q}}: & \mathbb{A}_E^*/E^* & \to & \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^* \\ & z & \mapsto & z\bar{z} \end{array}$$

a pour image un sous-groupe ouvert d'indice 2 de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^*$, et son conoyau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(E/\mathbb{Q})$. On note $\varepsilon_{E/\mathbb{Q}}$ l'unique caractère de Hecke non trivial de $\mathbb{Q}$ qui soit trivial sur l'image de $N_{E/\mathbb{Q}}$.

Le noyau de $N_{E/\mathbb{Q}}$ est

$$\mathrm{Ker}\, N_{E/\mathbb{Q}} = E^1(\mathbb{A})/E^1,$$

où E^1 (resp. $E^1(\mathbb{A})$) est le groupe des éléments z de E^* (resp de $\mathbb{A}_E^*$) tels que $N_{E/\mathbb{Q}}(z) = z\bar{z} = 1$.

D'après le théorème 90 de Hilbert, on a la suite exacte

$$1 \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^* \to \mathbb{A}_E^*/E^* \overset{z/\bar{z}}{\to} E^1(\mathbb{A})/E^1 \to 1 \tag{50}$$

Si ρ est un caractère (= un morphisme continu vers $\mathbb{C}^*$) de $E^1(\mathbb{A})/E^1$, on lui associe un caractère de Hecke de E, noté ρ_E par

$$\rho_E(z) = \rho(z/\bar{z}). \tag{51}$$

Un tel caractère vérifie, pour tout $z \in \mathbb{A}_E^*/E^*$:

$$\rho_E(z\bar{z}) = 1 \tag{52}$$

1.5.2. Inversement, soit χ_0 un caractère de Hecke de E vérifiant

$$\chi_0(z\bar{z}) = 1. \tag{53}$$

On voit immédiatement qu'un tel caractère est unitaire. De plus, on a alors

$$\chi_0(\bar{z}) = \chi_0^{-1}(z) = \bar{\chi}_0(z),$$

ce qui entraîne

$$\forall s \in \mathbb{R},\ L(\bar{\chi}_0, s) = L(\chi_0, s).$$

C'est en effet évident par définition pour s réel suffisamment grand, et on conclut par un argument de prolongement analytique.

On en déduit facilement

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \varepsilon(\chi_0, s) \in \mathbb{R}.$$

En combinant ceci avec (49), on obtient

$$\varepsilon(\chi_0) = \pm 1 \tag{54}$$

L'équation (48) s'écrit dans ce cas, en $s = 1/2$

$$L(\chi_0, 1/2) = \varepsilon(\chi, 1/2) L(\chi_0, 1/2). \tag{55}$$

Si le "signe de l'équation fonctionnelle" $\varepsilon(\chi_0, 1/2)$ est -1, on a donc forcément $L(\chi_0, 1/2) = 0$, sinon $L(\chi_0, s)$ peut ou non avoir un zéro en $s = 1/2$.

Par ailleurs, χ_0 est par hypothèse trivial sur l'image de $N_{E/\mathbb{Q}}$, donc

$$(\chi_0)_{|\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^*} = 1 \text{ ou } (\chi_0)_{|\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^*} = \varepsilon_{E/\mathbb{Q}}. \tag{56}$$

Il est clair que χ_0 provient d'un caractère ρ de $E_{\mathbb{A}}^1/E^1$ comme en (51) si, et seulement si, $(\chi_0)_{|\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^*} = 1$.

De plus :

LEMME 1.5.3. *Si* $(\chi_0)_{|\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^*} = 1$ *alors* $\varepsilon(1/2, \phi) = 1$.

Démonstration — C'est une remarque de Rogawski, cf. [**Ro3**] page 396. □

1.6. Hypothèses. *Dans ce paragraphe nous introduisons des notations qui seront utilisées, et nous formulons des hypothèses (notées* (H_i)*) qui auront cours dans tout le texte*

Soit χ un caractère de Hecke algébrique de E. On suppose :

$\boxed{(H_1) \text{ Le poids } w \text{ de } \chi \text{ est impair.}}$

On introduit la version unitaire χ_0 de χ :

$$\chi_0(z) = \chi(z)|z|^{w/2}.$$

Le caractère χ_0 est donc unitaire, mais d'après (H_1), il n'est pas algébrique.

Introduisons aussi le caractère

$$\chi_1 = \chi|\ |^{-(w-1)/2} = \chi_0|\ |^{1/2}.$$

C'est un caractère algébrique de type à l'infini

$$z \mapsto z^{(a-b+1)/2}\bar{z}^{(b-a+1)/2},$$

donc de poids 1/2.

On suppose :

$\boxed{(H_2)\ \forall z \in \mathbb{A}_E^*/E^*\ \chi_0(z\bar{z}) = 1.}$

Cette hypothèse est équivalente à la suivante :

$$\forall z \in \mathbb{A}_E^*/E^*\ \chi(z\bar{z}) = |z|^w. \tag{57}$$

D'après le paragraphe précédent, le signe $\varepsilon(\chi_0, 1/2)$ de l'équation fonctionelle de $L(\chi_0, s)$ est ± 1. On suppose :

$\boxed{(H_3)\ \varepsilon(\chi_0, 1/2) = -1.}$

D'après le paragraphe précédent, on a donc

$$L(\chi_0, 1/2) = 0,$$

ou

$$L(\chi, (1-w)/2) = 0. \tag{58}$$

ou encore

$$L(\chi_1, 0) = 0. \tag{59}$$

Par ailleurs, d'après le lemme (1.5.3), on a

$$(\chi_0)_{|\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^*} = \varepsilon_{E/\mathbb{Q}}, \tag{60}$$

ce qui, combiné avec (57), donne, pour $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*$:

$$(\chi)_{|\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{Q}^*}(x) = |x|^w \varepsilon_{E/\mathbb{Q}}(x). \tag{61}$$

Terminons par une hypothèse un peu technique : on note $\chi_\infty(z) = z^a\bar{z}^b$ pour $z \in K_\infty = \mathbb{C}$. On suppose :

$\boxed{(H4)\ |a-b| \notin \{1,3,5\}.}$

1.6.1. Notons Σ_χ l'ensemble des places de ramification de χ (ou de χ_0, ou de χ_1, cela revient au même) y compris, par convention, la place à l'infini. Il est clair que si une place décomposéE de E est dans Σ_χ, sa place conjuguéE y est aussi d'après (H_2). Il existe donc un ensemble Σ de places de $\mathbb{Q}$, contenant l'infini, tel que Σ_χ soit exactement l'ensemble des places de E divisant une place de Σ.

1.7. Le théorème.

1.7.1. Sous les hypothèses précédentes, $L(\chi_1, 0) = 0$. Notons que pour un caractère de Hecke, les facteurs locaux aux places ramifiées sont égaux à 1; de plus, le facteur à l'infini de $L(\chi_1, s)$ est

$$2(2\pi)^{(|b-a|+1+2s)/2}\Gamma((|b-a|+1+2s)/2),$$

qui est non nul (et fini) en $s = 0$, et on a donc $0 = L(\chi_1, 0) = L_{\Sigma_\chi}(\chi_1, 0)$ donc on s'attend à ce que, pour presque tout λ, il existe une extension non triviale

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda}^{-1}\omega_l \to U \to \mathbb{F} \to 0. \tag{62}$$

ayant bonne réduction hors Σ.

Nous démontrons :

THÉORÈME 1.7.2. *Soit χ un caractère de Hecke algébrique de E, prenant ses valeurs (sur les idèles finis) dans un corps de nombres L, de poids w. On suppose que χ vérifie les quatre hypothèses $(H_1), \ldots, (H_4)$ ci-dessus. Pour un ensemble de densité analytique non nulle de places λ de L, il existe une extension non triviale, Ayant bonne réduction là où χ est non ramifiée, et potentiellement semi-stable ailleurs, de la forme*

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda}^{-1}\omega_l \to U \to \mathbb{F} \to 0.$$

De plus, des extensions de ce type apparaissent dans la cohomologie étale d'une variété algébrique.

On notera comme en 1.6.1 Σ_χ l'ensemble des places de E où χ est ramifiée (y compris l'infini), et Σ l'ensemble correspondant de places de $\mathbb{Q}$.

1.7.3. *Une symétrie.* Par l'équation fonctionelle, on a

$$L(\chi_1, 0) = L(\chi_1^{-1}\omega_l, 0) = 0.$$

On s'attend donc également à ce que $H^1_{f,\Sigma_\chi}(\mathfrak{G}_E, \bar{\chi}_{1,\lambda})$ soit non nul, i.e. à ce qu'il existe des extensions non triviales

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to U \to \mathbb{F} \to 0. \tag{63}$$

Si une telle extension existe, et vérifie les propriétés usuelles, son dual est à un twist près une extension non triviale du type (62), qui vérifie aussi les propriétés voulues.

2. Construction d'une représentation endoscopique de G

2.1. Rappels locaux.

2.1.1. Rappelons que si p est inerte (resp. ramifié) dans E, $G'_p = G_p$ est un groupe unitaire non ramifié (resp. ramifié) à trois variables.

Soit χ_p la restriction de χ_1 à la composante en (l'unique place au dessus de) p, E_p^* de $\mathbb{A}_E^*$. On identifie χ_p au caractère suivant du tore maximal standard de G_p :

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \chi_p(\alpha).$$

Alors on est dans le cas (d'après l'hypothèse (H_2) – cf. [**KE**], page 126 ; voir aussi [**Ro1**], page 173, qui renvoie à [**KE**] pour la preuve, et qui ne dit rien sur le cas $E_p/\mathbb{Q}_p$ ramifié.) où l'induction unitaire $\mathrm{Ind}(\chi_p)$ de ce caractère donne une représentation de G_p qui a deux facteurs de Jordan-Hölder (de dimension infinie) qu'on notera $\pi^n(\chi_p)$ et $\pi^s(\chi_p)$. La seconde de ces représentations est de carré intégrable tandis que la première n'est pas tempérée ([**Ro1**], page 174, premier paragraphe).

2.1.2. Supposons de plus que χ soit non ramifié en (la place au-dessus de) p. Alors $\pi^n(\chi_p)$ possède un vecteur fixe par le compact maximal $G(\mathbb{Z}_p)$ (voir VII.1.2.2) ce qui n'est pas le cas de π^s. Dans le cas où p est de plus inerte (et non ramifié), ce compact maximal est hyperspécial, si bien que $\pi^n(\chi_p)$ est alors une *représentation non ramifiée*. Ceci arrive évidemment pour tous les p inertes sauf un nombre fini.

2.1.3. Dans le cas p ramifié comme dans le cas p inerte, toujours si χ_p est non ramifié, les représentations $\pi^n(\chi_p)$ et $\pi^s(\chi_p)$ s'identifient, à un twist non ramifié près, aux représentations notées π^n et π^s dans le théorème IV.4.7.2.

En effet, comme le caractère central de $\pi^n(\chi_p)$ et $\pi^s(\chi_p)$ est alors non ramifié, on peut en les twistant supposer qu'il est trivial. Le théorème IV.6.2.5 identifie alors la semi-simplification (à twist près) de $\mathrm{Ind}(\chi_p)$ avec celle d'un module universel pour le couple $(G = G_p/Z(G_p), K = \mathrm{Im}\,(G(\mathbb{Z}_p) \to G))$. Or ce module universel n'est réductible que dans deux cas (en caractéristique nulle) et a alors comme facteurs de Jordan-Hölder soit la paire {Steinberg, triviale}, soit $\{\pi^n, \pi^s\}$. Le premier cas est évidemment exclu, et on a donc $\{\pi^n, \pi^s\} = \{\pi^n(\chi_p), \pi^s(\chi_p)\}$. Le fait que π_n ait un vecteur fixe par K, mais pas π^s (cf. proposition IV.4.8.2) permet de conclure.

2.1.4. Si p est décomposé, et v une place de E au dessus de p, on définit $\pi^n(\chi_v)$ de la manière suivante (voir [**Ro3**], page 396). On note P le parabolique de type $(2,1)$ standard de $G'_v = \mathrm{GL}_3(E_v) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, et on note $M = \mathrm{GL}_2(E_v) \times \mathrm{GL}_1(E_v)$ son Levi. On considère le caractère de M défini par

$$(m, \lambda) \mapsto \chi_0(\det m)|\det(m)|_v^{1/2}$$

(où $m \in \mathrm{GL}_2$, $\lambda \in \mathrm{GL}_1$. La représentation $\pi_n(\chi_v)$ est alors définie comme l'induite unitaire de P à G'_p de ce caractère.

Si l'on avait choisi l'autre place v au dessus de p, on aurait obtenu la même représentation d'après (H_2). On se permet donc de la noter $\pi^n(\chi_p)$.

On voit en particulier que $\pi^n(\chi_p)$ est non ramifiée si χ l'est, i.e. si $p \notin \Sigma$.

2.1.5. On note Σ_E l'ensemble des p qui divisent le discriminant de E. Il résulte de ce qui précède que pour $p \notin \Sigma \cup \Sigma_E$, $\pi^n(\chi_p)$ et non ramifié.

2.1.6. À l'infini, on définit $\pi'(\chi_\infty)$ comme la représentation irréductible de $G_\infty = \mathrm{U}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle le caractère

$$\mathrm{diag}(x, y, z) \mapsto x^{(a-b+1)/2} y^{(a-b-1)/2},$$

si $a > b$ (resp.

$$\mathrm{diag}(x, y, z) \mapsto y^{(a-b+1)/2} z^{(a-b-1)/2}$$

si $a < b$) du sous-groupe diagonal est un poids extrémal.

PROPOSITION 2.2. *Sous les hypothèses et notations de (1.6), il existe une représentation automorphe $\pi = \pi(\chi)$ de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ telle que*

- *i) π apparaît avec multiplicité 1 dans $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$.*
- *ii) Le L-paramètre*[1] *$\psi : W_\mathbb{Q} \to {}^L G$ de π vérifie, pour $\omega \in W_E$,*

$$\psi(\omega) = \begin{pmatrix} \chi_0(\omega)|\omega|^{+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_0(\omega)|\omega|^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{64}$$

- *iii) Pour toute nombre premier p la composante π_p de π est $\pi^n(\chi_p)$. En particulier, π est non ramifiée hors $\Sigma \cup \Sigma_E$. De plus, $\pi_\infty = \pi(\chi_\infty)$.*

Il résulte des rappels locaux faits ci-dessus que, pour presque tout p, le changement de base Π'_w de π_p est une représentation non ramifiée dont la matrice de Hecke est

$$\begin{pmatrix} \chi_0(\varpi)|\varpi|^{+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_0(\varpi)|\varpi|^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{65}$$

où ϖ est une uniformisante de E_w.

La "preuve" de la proposition occupera le reste de cette partie. En fait, il s'agira moins d'une preuve que d'une lecture attentive de Rogawski, qui se fera en trois étapes. D'abord, nous verrons (avec l'aide de (H_2)) qu'il existe un A-paquet $\Pi'(\rho)$ de G' ayant un A-paramètre adéquat ; dans un deuxième temps nous verrons qu'on peut, grâce à l'hypothèse (H_4), transférer ce paquet en un A-paquet $\Pi(\rho)$ de G ; enfin nous montrerons grâce aux formules de multiplicité (et à (H_3)) de [**Ro3**] qu'il existe dans ce A-paquet une représentation π discrète ayant les propriétés voulues.

2.3. Le A-paquet $\Pi'(\rho)$.

1. Cf. [**BL-RO2**] pour le formalisme général (conjectural) des A et L-paramètres, A et L-paquets, et [**Ro2**] pour le cas (non conjectural en ce qui nous concerne) des groupes unitaires G et G'

2.3.1. *Endoscopie.* La A-paquet $\Pi'(\rho)$ sera un A-paquet endoscopique de G', obtenu par transfert à partir d'une représentation (de dimension 1) du sous-groupe endoscopique $H = U(2) \times U(1)$.

Pour définir un transfert des A-paquets de H vers ceux de G', il faut fixer un plongement de L-groupes ${}^LH \to {}^LG'$, qui lui même dépend du choix d'un caractère de Hecke μ sur E vérifiant les conditions suivantes (cf. [**Ro3**], page 395 et 397):

$$\mu_{|\mathbb{A}^*_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*} = \varepsilon_{E/\mathbb{Q}}. \tag{66}$$

$$\exists t \in \mathbb{Z},\ \mu_\infty(z) = (z/\sqrt{z\bar{z}})^{2t+1} \tag{67}$$

On suppose le choix fait d'un tel caractère μ.

2.3.2. *Définition de* $\Pi'(\rho)$. D'après (66) et (60), on a

$$(\chi_0\mu^{-1})_{|\mathbb{A}^*_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*} = 1.$$

Donc il existe un caractère ρ_1 de $E^1(\mathbb{A})/E^1$ tel que $\rho_{1E} = \chi_0\mu^{-1}$ (voir 1.5.2)

Comme [**Ro3**], page 395, on associe à ρ_1 un caractère automorphe ρ de $H(\mathbb{A})$ où $H = U(2) \times U(1)$, défini par

$$\rho((h, \lambda)) = \rho_1(\det h).$$

(On a donc pris $\rho' = 1$ selon les notations de Rogawski.)

D'après *loc. cit.*, il existe un A-paquet de G', $\Pi'(\rho)$, transfert endoscopique de ρ de H à G' (page 397), dont le A-paramètre $a : W_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG'$ vérifie (*loc. cit.*, page 398), pour $\omega \in W_E$:

$$a(\omega) = \begin{pmatrix} \phi(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(\omega) \end{pmatrix},$$

avec (*loc. cit.*, page 395) $\phi = \mu\rho_{1E} = \chi_0$, donc pour $\omega \in W_E$:

$$a(\omega) = \begin{pmatrix} \chi_0(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_0(\omega) \end{pmatrix}; \tag{68}$$

et aussi, (page 398) pour tout $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$,

$$a\left(\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & f \end{pmatrix}. \tag{69}$$

2.4. Transfert de $\Pi'(\rho)$ en un A-paquet $\Pi(\rho)$ de G. D'après *loc. cit.*, page 397, il existe un A-paquet de G, $\Pi(\rho)$ ayant même A-paramètre que $\Pi'(\rho)$ sous la condition suivante : écrivant ρ_∞ sous la forme

$$(h, \lambda) \mapsto \det(h)^{r-t}\lambda^s,$$

les trois entiers r, $r+1$ et s sont deux à deux distincts.

Dans notre cas, pour $z \in E_\infty$, on a

$$\chi_0(z) = z^{(a-b)/2}\bar{z}^{(b-a)/2},$$

$$\rho_{1E}(z) = \chi_0(z)\mu(z)^{-1} = z^{(a-b-2t-1)/2}\bar{z}^{(b-a+2t+1)/2},$$

de là :

$$\rho_v(h, \lambda) = \det(h)^{(a-b-2t-1)/2},$$

c'est à dire

$$s = 0$$

et

$$r - t = (a - b - 2t - 1)/2$$

soit

$$r = (a - b - 1)/2.$$

(Noter que r est entier par (H_1).) Le fait que r, $r+1$ et s soient distincts résulte alors immédiatement de (H_4).

On a donc montré l'existence d'un A-paquet $\Pi(\rho)$ de G dont le A-paramètre est le même que celui de G, et en particulier vérifie (68) et (69).

2.5. Preuve de la proposition (2.2).

2.5.1. Rogawski (*loc cit.*, page 396) décrit les A-paquets locaux $\Pi'(\rho_p)$ associés au A-paquet global $\Pi(\rho)$. Aux places finies p de $\mathbb{Q}$, on a $\Pi(\rho_p) = \Pi'(\rho_p)$.

Pour une place p de $\mathbb{Q}$ inerte ou ramifiée dans E on a $\Pi(\rho_p) = \Pi'(\rho_p) = \{\pi^n(\chi_p), \pi^s(\chi_p)\}$

Pour une place p décomposée on a $\Pi(\rho_p) = \{\pi^n(\chi_p)\}$

Pour la place à l'infini (*loc. cit.*, page 398) $\Pi(\rho_\infty) = \{\pi_(\chi_\infty)\}$.

2.5.2. Considérons la représentation π de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$:

$$\pi = \otimes_{p \text{ premier}}\pi^n(\chi_p) \otimes \pi(\chi_\infty). \tag{70}$$

D'après [**Ro3**], théorème 1.2, page 397, la multiplicité de π dans le spectre discret est 1 si

$$(-1)^N = \varepsilon(1/2, \phi),$$

où N désigne[2] le nombre de places à l'infini où G n'est pas quasi-déployé, ici $N = 1$.

C'est le cas d'après (H_3).

On a donc construit π et montré le point i) de la proposition (2.2). Le point iii) est évident par construction.

2. Le lecteur trouvera la définiton de N dans [**Ro1**], page 243

2.5.3. Reste à montrer le point ii), i.e. à expliciter le L-paramètre ψ. On connaît le A-paramètre a de π'. Le lien entre a et ψ est explicité dans [**BL-RO2**], page 541, paragraphe 3.2. : on a, pour $w \in W_E$

$$\phi(w) = a\left(w, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}\right).$$

Vu les formules(68) et(69), cela implique bien ii), et prouve donc la proposition 2.2.

3. Augmentation du niveau de π

3.1. Existence de places où augmenter le niveau.

3.1.1. Soit L un corps de nombres où χ_1 prend ses valeurs sur les idèles finis. On peut supposer que L contient E. Soit λ une place finie de L, au dessus de la place μ de E, et de la place l de $\mathbb{Q}$. On suppose que χ_1 est non ramifié en μ, et que l est non ramifiée dans E : cela n'exclut qu'un nombre fini de l.

Sur $\mathcal{O}^*_{E_\mu}$, le caractère $\chi_{1,\lambda}$ prend ses valeurs dans le sous-groupe $\mathcal{O}^*_{E_\mu}$ de $(L_\lambda)^*$. Plus précisément, si l est inerte dans E, pour $z \in \mathcal{O}^*_{E_\mu}$ on a

$$\chi_{1,\lambda}(z) = z^{(a-b+1)/2}\bar{z}^{(b-a+1)/2}$$

où $z \mapsto \bar{z}$ désigne l'automorphisme non trivial de E_μ. Si l est décomposé, on $\chi_{1,\lambda}(x) = x^{(a-b+1)/2}$ ou $\chi_\lambda(x) = x^{(b-a+1)/2}$ pour $x \in \mathcal{O}^*_{E_\mu}$, selon que μ est l'une ou l'autre des places de E au-dessus de l. On dit que μ est de type 1 dans le premier cas, de type 2 dans le second. L'ensemble des μ de type 1 (resp. 2) a une densité analytique, qui est non nulle.

Le caractère $\chi_{1,\lambda}$ définit un caractère $\bar{\chi}_{1,\lambda}$ modulo λ à valeurs dans un corps fini qui contient le corps résiduel $\mathbb{F}$ de $\mathcal{O}_{E_\mu}$, à savoir $\mathbb{F}_{l^2}$ ou $\mathbb{F}_l$ selon que l est inerte ou décomposé. L'image de $\bar{\chi}_{1,\lambda}$ est contenue dans $\mathbb{F}^*$.

Les même considérations s'appliquent au caractère norme, qui définit un caractère $|\ |_\lambda = |\ |_l$ valant x (resp. $z\bar{z}$) sur $\mathcal{O}^*_{E_\mu}$ si l est décomposé (resp. inerte). Rappelons que le caractère cyclotomique ω_l est l'inverse de $|\ |_l$.

3.1.2. La condition fondamentale pour élever, modulo l, le niveau de la représentation π' en une place v de E (en laquelle χ est non ramifiée) au dessus d'un nombre premier $p \neq l$ inerte ou décomposée (ou même ramifiée) s'exprime dans tous les cas par la congruence suivante : si ϖ_v désigne l'uniformisante de E en v, on veut qu'il existe $\nu \in \mathbb{F}^*$, tel que

$$\{\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v)\bar{\omega}_l(\varpi_v)^{-1}, 1, \bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v)\} = \nu\{\bar{\omega}_l(\varpi_v), 1, \bar{\omega}_l(\varpi_v)^{-1}\} \tag{71}$$

Dans le premier ensemble, le lecteur reconnaîtra les trois valeurs propres de la matrice de Hecke en v de π', cf. 65. Dans le deuxième ensemble on retrouve les valeurs propres des matrices intervenant dans les théorèmes VII.1.4.6 et VII.1.5.3.

On s'autorise à multiplier l'ensemble de ces valeurs propres par un ν, car cela revient simplement à tordre la représentation par un caractère non ramifié.

3.1.3. Pour appliquer les théorèmes susmentionnés, on a aussi besoin de la condition de banalité (quoique pour le premier, la "normalité" suffise), à savoir

$$\bar{\omega}_l(\varpi_v)^3 \neq 1,\ \bar{\omega}_l(\varpi_v)^2 \neq 1 \tag{72}$$

En effet,

- dans le cas inerte, on veut que $(p^3+1)(p-1) \neq 0$ dans $\mathbb{F}$; comme $\bar{\omega}_l(\varpi_v) = p^2$, ceci est impliqué par $\bar{\omega}_l(\varpi_v)^3 \neq 1$ et $\bar{\omega}_l(\varpi_v)^2 \neq 1$;
- dans le cas décomposé, on veut que $(p^3-1)(p+1) \neq 0$ dans $\mathbb{F}^*$; comme $\bar{\omega}_l(\varpi_v) = p$, ceci équivaut à $\bar{\omega}_l(\varpi_v)^3 \neq 1$ et $\bar{\omega}_l(\varpi_v)^2 \neq 1$

3.1.4. Nous voulons déterminer pour quels l on peut trouver au moins une place v vérifiant la condition fondamentale (71), ainsi que la condition (72).

Or sous cette dernière condition, on vérifie facilement[3] que

- soit $\nu = \bar{\omega}_l(\varpi_v)$ et

$$\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v) = \bar{\omega}_l(\varpi_v)^2, \tag{73}$$

- soit $\nu = \bar{\omega}_l(\varpi_v)^{-1}$ et

$$\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v) = \bar{\omega}_l(\varpi_v)^{-1}. \tag{74}$$

LEMME 3.1.5. *Il existe un ensemble de densité analytique non nulle de places λ de L, pour lesquelles il existe une place v décomposée (et alors il en existe une infinité) de E vérifiant les deux conditions* (71), (72), *ainsi que*

$$\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v) = \bar{\omega}_l(\varpi_v).$$

Démonstration — Supposons que l est décomposé dans E, et soit μ_1 et μ_2 les places de E au-dessus de l. Quitte à échanger μ_1 et μ_2, on a, pour toute place λ de L au dessus de μ_1 (resp. μ_2), pour $x \in \mathcal{O}^*_{E_{\mu_1}}$ (resp. pour $x \in \mathcal{O}^*_{E_{\mu_2}}$) $\chi_\lambda(x) = x^{(a-b+1)/2}$ (resp. $\chi_\lambda(x) = x^{(b-a+1)/2}$).

Cherchons un x comme ci-dessus qui vérifie les analogues des conditions (73), (72), obtenues en remplaçant ϖ_v par x; ces conditions s'expriment : $x^3 \neq 1$, $x^2 \neq 1$ et

$$x^{(a-b+1)/2} = x^2 \text{ si } \lambda \text{ est au-dessus de } \mu_1$$

et

$$x^{(b-a+1)/2} = x^2 \text{ si } \lambda \text{ est au-dessus de } \mu_2$$

3. On peut par exemple procéder ainsi : si l'on calcule le quotient de l'élément $\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v)$ par l'un ou l'autres des deux autres éléments de l'ensemble de gauche de (71), on obtient $\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v)$ et $\bar{\omega}_l(\varpi_v)$. Dans l'ensemble de droite, les seuls quotients égaux à $\bar{\omega}_l(\varpi_v)$ sont $\nu\bar{\omega}_l(\varpi_v)/\nu$ et $\nu/(\nu\bar{\omega}_l(\varpi_v)^{-1})$. On a donc soit $\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v) = \omega_l(\varpi_v)$ soit $\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v) = 1$. On en déduit facilement les valeurs correspondantes de ν.

Comme $|a-b| \geq 5$, parmi ces deux conditions il y en a une (disons celle qui concerne le cas μ_1) qui se réécrit $x^u = 1$ avec $|u| > 3$. Alors, que pour l congru a 1 modulo u, $\mathbb{F}_l^*$ possède un élément d'ordre u qui vérifie donc $x^u = 1$ mais pas $x^2 = 1$ ni $x^3 = 1$. Pour toute place λ au dessus d'un l décomposé, et au-dessus de la place μ_1 de type 1, il existe donc un x vérifiant les conditions 71, 72. Ces places λ forment clairement un ensemble de places de densité analytique non nulle de L.

Pour λ une telle place, et pour x comme ci-dessus, le théorème de Tchebotarev assure qu'il existe une infinité de places v de E, tel que $\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v) = \bar{\chi}_{1,\lambda}(x)$, $\bar{\omega}_l(\varpi_v) = \bar{\omega}_l(x)$. Comme l'ensemble des places v de E au-dessus d'un p décomposé est de densité 1, on peut même supposée que les places v sont décomposées.

□

Remarques. a) On peut facilement montrer avec les mêmes méthodes qu'il existe aussi un ensemble de mesure non nulle de places de L telles que les équations 71, 72 n'aient pas de solution.

b) Il résulte de VII.2.4.3 que pour un l donné comme dans le lemme, les v tels qu'il existe ϖ_v satisfaisant ces conditions sont tous décomposés dans E.

c) La preuve montre qu'on peut aussi imposer aux places λ obtenues de vérifier que l (si l est le nombre premier divisant λ) est décomposé dans E.

Proposition 3.2. *Il existe un ensemble de densité analytique strictement positive de places finies λ de L, pour lequel il existe une place v de E, au dessus d'une place p de $\mathbb{Q}$ décomposée dans E, tel que*

- *$\bar{\omega}_l(\varpi_v) = p$ n'est ni racine cubique ni racine carrée de l'unité, ni zéro modulo λ ;*
- *On a $\chi_{1,\lambda}(\varpi_v) = \bar{\omega}_l(\varpi_v) = p$*
- *On a $p \notin \Sigma \cup \Sigma_E$ (donc la représentation π est non ramifiée en p) ;*
- *Le caractère μ de 2.3.1 est non ramifiée en v.*

et une représentation automorphe cuspidale $\rho = \rho(\lambda, v)$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ vérifiant

- *ρ est congrue à π modulo λ.*
- *ρ a un vecteur fixe par K^p. En particulier, ρ est non ramifiée hors $\Sigma \cup \{p\}$*
- *ρ est ramifiée en p, mais a un vecteur fixe par un parahorique strict B_1 de $G_p = GL_3(\mathbb{Q}_p)$ (voir VII.1.5.2).*

Démonstration — Il résulte du lemme ci-dessus que pour un ensemble de densité non nulle de λ, on peut trouver une infinité de places v décomposées de E vérifiant les conditions 71, 72. Comme l'ensemble $\Sigma \cup \Sigma_E$ est fini, on peut supposer que p n'y appartient pas et aussi que μ est non ramifié en v. On peut donc appliquer à π le théorème de changement de niveau VII.1.5.3 □

3.2.1. Dans toute la suite, nous travaillerons avec une des représentations obtenues $\rho = \rho_{\lambda,v}$. En particulier, λ, v, ainsi que l et p désigneront toujours des places fixes de L, E et $\mathbb{Q}$, et ne serviront plus de variables.

On dispose d'une telle représentation ρ pour un ensemble de densité non nulle de λ. On sera parfois amené à imposer des conditions sur λ (ou l) qui n'excluront qu'un nombre fini de places λ. Il va sans dire que pour qu'il n'y ait pas de cercles vicieux, ces conditions ne porteront pas sur ρ, et en particulier pas sur v ou p, qui dépendent déjà de λ.

3.3. Propriétés de la représentation obtenue ρ.

3.3.1. D'après la classification de Rogawski des représentation automorphes pour les groupes unitaires, le A-paquet de ρ est soit stable, soit le transfert endoscopique d'une A-paquet de $H = U(2) \times U(1) \subset G'$, qui lui même est soit un caractère ρ, soit une représentation cuspidale d'un certain type. Nous dirons dans ce dernier cas que le A-paquet de ρ est *endoscopique* (tout court), qualifiant le premier cas d'*endoscopique abélien* (comparer avec [**CL**], page 1284).

LEMME 3.3.2. *Le A-paquet de ρ n'est pas endoscopique abélien.*

Démonstration — Supposons qu'il le soit : c'est un A-paquet de la forme $\Pi(\rho)$ ou ρ est un caractère de H associé à deux caractères ρ_1 et ρ_2 de $\mathbb{A}_{E^*}$ ([**Ro3**], page 395). En la place décomposée v, ρ_v est l'induite du caractère suivant du Levi M de G_v (cf 2.1.4) :

$$(m, \lambda) \mapsto \phi_v(\det(m))|\det(m)|_v \rho_{2v}(\det(m)\lambda),$$

où ϕ_v est un caractère de E_v^* défini à partir de ψ_1, ψ' et μ d'une manière (*loc. cit*) qui ne nous importe pas.

Par construction ρ_v a un vecteur fixe par un parahorique de $\mathrm{GL}_3(E_v)$, il en va donc de même du caractère de M décrit ci-dessus, qui a un vecteur fixe par un parahorique de M, i.e. le compact maximal de GL_1 et l'Iwahori de GL_2. Comme l'image par det de l'Iwahori de GL_2 est le compact maximal (= la boule unité) de E_v^*, ceci implique que ϕ_v et ρ_{2v} sont non ramifiés, i.e. ont un vecteur fixe par un compact maximal. Il en va donc de même de ρ_v, ce qui est absurde, puisque par construction ρ_v est ramifiée. □

4. Représentations galoisiennes associées

4.1. Le cas où ρ est stable.

LEMME 4.1.1. *Il existe une représentation cuspidale, cohomologique et stable ρ' de G' tel que $\rho'_{fin} = \rho_{fin}$ (restriction aux adèles finies).*

Démonstration — Cela résulte de la preuve de la proposition 14.6.2 de [**Ro1**]. □

4.1.2. On sait associer à ρ' une représentation galoisienne $r : \mathfrak{G}_E \to \mathrm{GL}_3(L_\lambda)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) r est géométriquement irréductible. De plus, de deux choses l'une :
   - ou la restriction r_K de r à $\mathfrak{G}_K$ reste géométriquement irréductible pour toute extension finie K de E;
   - ou il existe une extension cubique L de E et un caractère de Hecke Ψ de L tel que $r \simeq \mathrm{ind}_L^E(\Psi)$.

(2) Notons $\bar{r}_{ss}$ la semi-simplification de la réduction de r par rapport à un réseau stable. On a :
$$\bar{r}_{ss} = \bar{\chi}_{1,\lambda} \oplus 1 \oplus \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1}.$$

(3) Pour tout nombre premier q hors de $\Sigma \cup \{p, l\}$, pour w place de E au-dessus de q, r est non ramifiée en w.

(4) Pour w au-dessus de l, r est cristalline en w.

(5) En les deux places v et $\bar{v}$ divisant p, l'inertie agit de manière unipotente d'ordre 2.

4.1.3. *Preuve des points* (1), (2) et (4). La construction de r et la vérification de la propriété (1) résulte du théorème de Blasius et Rogawski, cf. [**BL-RO1**], parties 1 et 2.

Les arguments contenus dans cet article permettent de prouver 2), 4) ainsi qu'une forme affaiblie de 3), ne concernant que les q qui ne sont pas dans Σ_E. En effet, dans [**BL-RO1**], r est réalisée dans la cohomologie d'une surface modulaire de Picard compactifiée, qui a bonne réduction en dehors des places divisant $\Sigma_E \cup \Sigma \cup \{p\}$.

Comme l n'est pas dans cet ensemble, le point 4) en résulte, ainsi que le point 3) pour les q hors Σ_E. Pour prouver 2), on note que d'après *loc. cit.*, en toutes les places w ne divisant pas $\Sigma_E \cup \Sigma \cup \{p\}$, la matrice $r(\mathrm{Frob}_w)$ est conjuguée à la matrice de Hecke de ρ' en w. La réduction modulo λ de ses matrices donne respectivement la matrice de $\bar{r}_{ss}(\mathrm{Frob}_w)$ et celle de la réduite de la matrice de Hecke de π (puisque cette matrice de Hecke de ρ' est la même que celle de ρ – cf. lemme 4.1.1 – et que la matrice de ρ' est par construction congrue modulo λ à celle de π). Vu la forme (65) des matrices de Hecke de π, on voit donc qu'en w comme ci-dessus, $\bar{r}_(\mathrm{Frob}_w)$ et
$$\begin{pmatrix} \bar{\chi}_{1,\lambda}(\mathrm{Frob}_w) & & \\ & 1 & \\ & & \bar{\chi}_{1,\lambda}(\mathrm{Frob}_w)\bar{\omega}_l^{-1}(\mathrm{Frob}_w) \end{pmatrix}$$
sont conjuguées, et on conclut par Tchebotarev.

4.1.4. *Preuve des points* (3) *et* (5). Les assertions (3) et (5) ne semblent pas découler de [**H-T**], car on ne peut pas vérifier l'hypothèse que π est discrète en une place[4]. Nous en donnons donc une preuve.

4. Cette hypothèse est même certainement fausse dans le cas ou Σ est réduit à la place à l'infini.

Prouvons d'abord (3), i.e. que r est non ramifiée en les places w ne divisant pas $\Sigma \cup \{l, p\}$. D'après le paragraphe précédent, il suffit de le faire pour les places w divisant Σ_E. Soit donc q un nombre premier (différent de l, p, et n'appartenant pas à Σ), et w la place de E au-dessus de q. Soit F un corps quadratique réel dans lequel q est ramifié, et, si $\mathfrak{q}$ désigne la place de F divisant q, tel que $\mathfrak{q}$ se décompose dans EF. Soient w_1 et w_2 les places de EF divisant $\mathfrak{q}$ dans F (ou w dans E)

Si R_E désigne toujours le changement de base (à la Rogawski, cf. VII.1.2.4) de ρ à $G_E = \mathrm{GL}_3(E)$, on a R_E non ramifiée en w. En effet, $(R_E)_w$ est l'unique membre d'un L-paquet qui est le changement de base de π_n, π_s où π_n et π_s ont chacune un vecteur fixe par l'une des deux classes de compact maximaux spéciaux de G_p (groupe unitaire ramifiée). En particulier, l'une de ces deux classes est très spéciale au sens de Labesse ([**LAB**], page 88), ce qui implique bien (*loc. cit.*) que le changement de base est non ramifié.

Désigons par R_{EF} le changement de base à la Arthur-Clozel ([**A-C**], théorème 4.2, chapitre 3) de R_E à $\mathrm{GL}_3(EF)$. Le groupe $G'_F = G' \times_{\mathbb{Q}} F$ est un groupe unitaire sur F dont les deux places à l'infini sont quasi-déployés. La représentation R_{EF} vérifie les conditions (analogues à 1.2.5) qui permettent de la descendre en une représentation R_F de G'_F. De plus ρ_F est stable car d'après (1), r_{EF} est encore irréductible. Et R_F est non ramifiée en $\mathfrak{q}$ (En effet $(R_F)_{\mathfrak{q}}$ appartient à un A-paquet stable donc qui est un singleton, et ce A-paquet est non ramifiée puisque son changement de base à EF l'est.) Soit (G''_F) une forme tordue de G'_F égale à G'_F en toutes les places finies, en une place à l'infini, mais égale au groupe unitaire compact en l'autre place à l'infini. Comme R_F est stable, on peut transférer cette représentation à G''_F ([**Ro1**], chapitre 8), et on peut alors lui appliquer la construction de Blasius et Rogawski ([**BL-RO1**]) qui donne une représentation r_F de $\mathfrak{g}_{EF}$. Comme r_F est définie dans la cohomologie de la variété de Shimura associée à G''_F, et que cette variété a bonne réduction en $\mathfrak{q}$ (puisque $\mathfrak{q}$ est non ramifiée dans E), r_F est non ramifiée en w_1 et w_2. Par ailleurs il est clair que r_F est la restriction de r a $\mathfrak{g}_E$, et que les groupes de décompositions de $\mathfrak{g}_{EF}$ en w_1 et de $\mathfrak{g}_E$ en w s'identifient. On en déduit que r est non ramifiée en w, ce qui prouve (3).

Pour (5), soit maintenant F un corps quadratique réel, et tel que v et $\bar{v}$ sont décomposées dans EF. En procédant comme ci-dessus, on construit une représentation R_F de G''_F. Si v_1 et v_2 désignent les places de F au-dessus de p (qui est nécéssairement décomposé dans F, puisqu'il est totalement décomposé dans EF), v_1 et v_2 sont décomposés dans EF, d'où $(G''_F)_{v_i}$ isomorphe à $Gl_3(F_{v_i})$, et par construction ρ_F a un niveau parahorique en v_1 et v_2. Comme r_F est définie dans la cohomologie étale de la variété de Shimura associée à G''_F avec niveau parahorique en v_i (cette variété est déjà propre, puisque $F \neq \mathbb{Q}$, on n'a pas besoin de la compactifier, cf. [**L1**], page 41), l'inertie en v_i agit de manière unipotente d'ordre 2 : en effet, la structure locale de la fibre spéciale en v_i de cette variété a été déterminée au théorème III.6.3.9 (dans le cas du groupe unitaire sur $\mathbb{Q}$ mais ces calculs

locaux sont les mêmes sur n'importe quel corps totalement réel F), cette fibre est semi-stable et ses singularités sont du type "deux plans se coupant le long d'une droite", et on peut appliquer la théorie de Grothendieck des cycles évanescents (cf. [**SGA7**], exposé 1)

4.1.5. On est alors en mesure d'appliquer la proposition VI.3.5.4. En effet, les hypothèses VI.3.5.1 sont vérifiées : on pose $G = \mathfrak{G}_K$, $D = D_v$ le groupe de décomposition en v. Soit τ l'action par conjugaison sur $G = \mathfrak{G}_K$ d'un élément de $\mathfrak{G}_{\mathbb{Q}}$ relevant l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})$. Alors $\rho^\tau \simeq \rho^*$, comme on le voit sur les Frobenius aux places non ramifiées grâce à 4.1.2, point 2), ce qui suffit par Tchebotarev. On a de plus $D^\tau = D_{\bar{w}}$ où $\bar{w}$ est l'autre place de E au-dessus de p.

L'hypothèse que $\bar{r}_{ss}$ est sans multiplicité, même restreint à D, résulte de ce que d'après la proposition 3.2, les trois caractères ont des valeurs propres distinctes en v.

Enfin, les hypothèses sur l'action de D et de D^τ qui doivent se factoriser par un sous-groupe de Levi-Borel, sont satisfaites d'après le point (5) de 4.1.2.

Enfin, posons $\phi_1 = \bar{\chi}_{1,\lambda}$ $\phi_2 = 1$, et $\phi_3 = \bar{\chi}_{1,\lambda}\omega_l^{-1}$. Il est clair que $\phi_2^\tau = \phi_2^{-1}$, et il résulte de l'hypothèse (H_2) que $\phi_1^\tau = \phi_3^{-1}$.

Toutes les hypothèses sont donc vérifiées, et la proposition VI.3.5.4, affirme que les extensions non triviales suivantes apparaissent comme sous-quotient de $\bar{r}_\Lambda$ pour un réseau stable Λ, et en particulier, non ramifiées hors les places divisant $\Sigma \cup \{p, l\}$ et de Fontaine-Lafaille en les places divisant l (pour l plus grand qu'un nombre ne dépendant que de χ : en effet, on sait que c'est le cas pour l plus grand que les poids de Hodge-Tate de la représentation ρ, et ceux-ci ne dépendent que de ρ_∞, qui est π_∞ et ne dépend que de χ)

i) Soit une extension non scindée de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to U \to \mathbb{F} \to 0,$$

et une extension non scindée de la forme

$$0 \to \mathbb{F} \to U \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1} \to 0.$$

ii) Soit une extension non scindée, et non ramifiée en v et $\bar{v}$, de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to U \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1} \to 0.$$

iii) Soit une extension non scindée et non ramifiée en v et $\bar{v}$ de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\omega_l^{-1} \to U \to \mathbb{F} \to 0,$$

et une extension non scindée et non ramifiée en v et $\bar{v}$ de la forme

$$0 \to \mathbb{F} \to U \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to 0.$$

Notons que la proposition affirmait juste que dans le cas 2) et 3), les extensions considérées étaient diagonalisables une fois restreintes à I_v ou à $I_{\bar{v}}$. Qu'elles soient

triviales sur ces groupes d'inertie résulte simplement de ce que les trois caractères considérés sont non ramifiés en v et en $\bar{v}$.

4.2. Le cas où ρ est endoscopique.

LEMME 4.2.1. *Si ρ est endoscopique, ρ_{fin} provient par transfert endoscopique (via ζ_H, où ζ_H désigne le morphisme de L-groupe – dépendant du caractère μ, cf.* 2.3.1 *– définissant le transfert endoscopique : voir* [**Ro2**]*) d'une représentation cuspidale ρ_H de H, non ramifiée en dehors de $\Sigma \cup \Sigma_E$ et p. De plus, si $\rho = \rho_2 \otimes \rho_1$, avec ρ_2 représentation automorphe de $U(2)$ et ρ_1 de $U(1)$, alors $(\rho_2)_p$ est la représentation de Steinberg.*

Démonstration — Par hypothèse, il existe une représentation cuspidale ρ_H^0 de H telle que pour tout nombre premier q, ρ_q soit dans le L-paquet local $\zeta_H(\{(\rho_H^0)_p, \dots\}$, où $\{(\rho_H^0)_p, \dots\}$ désigne le L-paquet local pour H_q de $(\rho_H^0)_q$.

D'après le lemme 3.3.2, ρ_H^0 n'est pas abélien. Nous allons voir que cela implique que le L-paquet de ρ_q est un singleton. En effet, $(\rho_H^0)_q$ est alors tempéré d'après la conjecture de Ramanujan pour H. Il en découle, vu la description de ζ_H, que ρ_q est encore tempéré, et donc égale à une série principale. Le L-paquet est alors un singleton, cf. [**Ro1**] page 174.

Supposons que q n'appartiennent pas à $\Sigma \cup \Sigma_E$, et soit différent de p. Soit f une fonction de Hecke pour (G_q, K_q) où K_q est le compact maximal hyperspécial standard en q, et soit f^H la fonction associée à F sur H_q comme dans [**Ro1**], prop 4.9.1. D'après le lemme fondamental ([**Ro1**], 4.5, [**BL-RO2**]) f^H peut être choisie comme une fonction de Hecke sur H_q par rapport à un compact maximal hyperspécial de H_q.

Le L-paquet de $(\rho_H^0)_q$ n'est pas en général un singleton. Cependant, selon [**Ro1**] théorème 13.1.1, on a :

$$\sum_{(\rho_H)_q} (\mathrm{tr}\rho_H)_q(f^H) = \mathrm{tr}\rho_q(f),$$

où la somme de gauche porte sur les éléments du L-paquet de $(\rho_H^0)_q$.

Il existe donc au moins un élément de ce L-paquet qui est non ramifié. On le note $(\rho_H)_q$.

Intéressons nous maintenant à la place p. Comme p est décomposé dans E, $G_p = Gl_3(E_v)$ (pour v place de E au-dessus de p), et $H_p = \mathrm{GL}_2(E_v) \times \mathrm{GL}_1(E_v)$; les L-paquets sont donc des singletons. On pose (on n'a pas le choix) : $(\rho_H)_p = (\rho_H^0)_p$. Écrivons $(\rho_H)_p = (\rho_2)_p \otimes (\rho_1)_p$ avec ρ_2 et ρ_1 représentations de GL_2 et GL_1 respectivement. Alors ρ_p est l'induite de la représentation cuspidale stable $(\rho_H)_p$ de $M = H_p$ (cf. 2.1.4) :

$$(m, \lambda) \mapsto \rho_{2,p}(m)\mu_v(\det m)\rho_{1,p}(m).$$

Comme μ_v est non ramifiée, ρ_p a un vecteur fixe par un parahorique si et seulement si ρ_H en a un, ce qui signifie que $(\rho_1)_p$ est non ramifiée, et que $(\rho_2)_p$ a un vecteur fixe par l'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(E_v)$. De plus, $(\rho_2)_p$, n'a pas de vecteur fixe par le compact maximal de $\mathrm{GL}_2(E_v)$, sinon ρ_p serait non ramifiée. Il en résulte que $(\rho_2)_p$ est la Steinberg.

Aux autres places q, i.e. aux places de $\Sigma \cup \Sigma_E$ y compris $q = \infty$, on choisît bêtement $(\rho_H)_q = (\rho_H^0)_q$.

Posons maintenant

$$\rho_H = \otimes_{\text{places } q \text{ de } \mathbb{Q}} (\rho_H)_q.$$

Alors la multiplicité de ρ_H dans $L^2_{cusp}(H(\mathbb{A})/H(\mathbb{Q}))$ est égal à celle de ρ_H^0, puisque ces deux représentations appartiennent au même L-paquet global, stable de H (voir [**Ro1**], proposition 11.2.1.(a)).

La représentation ρ_H est celle dont l'énoncé du lemme affirme l'existence. □

4.2.2. On sait associer (cf. [**BL-RO3**]) à ρ_2 (resp. à ρ_1) une représentation galoisienne $r_2 : \mathfrak{G}_E \to \mathrm{GL}_2(L_\lambda)$ (resp. $r_1 : \mathfrak{G}_E \to \mathrm{GL}_1(L_\lambda)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- r_2 est géométriquement irréductible.
- Pour tout nombre premier q hors de $\Sigma \cup \Sigma_E \cup \{p\}$, pour w place de E au-dessus de p, r_2 et r_1 sont non ramifiées en w, et la réunion de l'ensemble des valeurs propres de $r_2(\mathrm{Frob}_w)$ avec $\{r_1(\mathrm{Frob}_w)\}$ est égal à l'ensemble des valeurs propres de Hecke t_{ϖ_w} de ρ'.
- Pour w au-dessus de l, r est cristalline en w.

4.2.3. On en déduit aisément que la réduction $\bar{r}_{2,ss}$ est la somme de deux des trois caractères $\bar{\chi}_{1,\lambda}, 1, \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1}$ tandis que $\bar{r}_{1ss}$ est le troisième de ces caractères.

Cependant, $(\rho_2)_p$ est la Steinberg, on sait que le quotient des deux valeurs propres de $r_2(\mathrm{Frob}_v)$ doit être égal à $\omega_l(\varpi_v)^{\pm 1} = p^{\pm 1}$ (le signe dépendant bien sûr de l'ordre des facteurs dans le quotients). Comme on a, par hypothèse $\bar{\chi}_{1,\lambda}(\varpi_v) = \bar{\omega}_l(\varpi_v)^2 = p^2$ (modulo λ), et que $p^2 \neq 1$ modulo l, on s'aperçoit que $\bar{r}_{2,ss}$ ne peut être la somme de 1 et de $\bar{\chi}_{1,\lambda}$. De même, le quotient des deux valeurs propres de $r_2(\mathrm{Frob}_{\bar{v}})$ doit être égal à $p^{\pm 1}$, et l'on voit que $\bar{r}_{2,ss}$ ne peut être la somme de 1 et de $\bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1}$.

4.2.4. Il ne reste qu'une possibilité $\bar{r}_{2ss}$: c'est la somme de $\bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1}$ et de $\bar{\chi}_{1,\lambda}$.

Comme r_2 est irréductible, chacune d'entre elles donne des extensions d'après le lemme de Ribet (cf. théorème VI.1.2.5 par exemple). Plus précisément,

i) Il existe un réseau Λ de L_λ^2, telle que la réduction $\bar{r}_{2,\Lambda}$ de r soit une extension non scindée de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1} \to U \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to 0,$$

ii) Il existe un réseau Λ de L^2_λ, telle que la réduction $\bar{r}_{2,\Lambda}$ de r soit une extension non scindée de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to U \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1} \to 0,$$

5. Élimination des extensions parasites

PROPOSITION 5.1. *Pour l hors d'un ensemble fini de nombre premiers (ne dépendant que de E), il n'existe pas, dans la catégorie des $\mathfrak{G}_E$-représentations sur un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique l, d'extensions non scindées, ayant bonne réduction partout, de la forme*

$$0 \to \bar{\omega}_l \to U \to \mathbb{F} \to 0.$$

Démonstration — Les extensions de la forme

$$0 \to \bar{\omega}_l \to U \to \mathbb{F} \to 0$$

sont paramétrées par le $H^1(\mathfrak{G}_E, \bar{\omega}_l)$. D'après la suite exacte longue de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte courte de Kummer, on a, en utilisant le théorème 90 de Hilbert

$$H^1(\mathfrak{G}_E, \bar{\omega}_l) = E^*/(E^*)^l.$$

Explicitement, on voit en calculant le morphisme de connection qu'un élément de $E^*/(E^*)^l$ représenté par un élément $x \in E^*$ paramètre l'extension associée au corps $E(\mu_l)(x^{1/l})$. En particulier, que cette extension soit non ramifiée en une place $\mathfrak{P}$ de E ne divisant pas l signifie que la $\mathfrak{P}$-valuation de x est multiple de l. De même, que l'extension ait bonne réduction en les places divisant l signifie encore que la valuation de x en ces places est multiple de l : cf. [**BR**], chapitre 8, ou bien [**Ru2**] 1.6.C, en particulier le premier paragraphe de la page 26.

Si l'extension associée à x a bonne réduction partout, il existe donc un idéal fractionnaire I de E tel que $(x)I^{-l} = (1)$. Soit n le cardinal du groupe de classes de E. On a $I^n = (y)$ pour un certain y de E^*, et donc $x^n y^{-l}$ est une unité de E. Soit m l'ordre du groupe des unités de E (qui est fini parce que E est quadratique imaginaire; on a même $m = 2$, 4 ou 6). On a alors $x^{nm}y^{-lm} = 1$, si bien que l'ordre de x dans $E^*/(E^*)^l$ divise nm. Si l'on a choisi l premier à nm, ce qui n'exclut qu'un ensemble fini de nombres premiers ne dépendant que de E, ce qui précède implique que $x = 1$ dans $E^*/(E^*)^l$, autrement dit que l'extension associée est scindée. □

REMARQUE. Comme la preuve permet de le constater, ce théorème ne serait pas valable si l'on remplaçait E par un corps qui ne serait pas quadratique imaginaire (ou $\mathbb{Q}$).

PROPOSITION 5.2. *Soit χ un caractère de Hecke algébrique sur S, de poids positif. Soit S un ensemble fini de places de E, contenant les places de ramifications de χ.*

Pour l un nombre premier décomposé dans E, hors d'un ensemble fini de nombres premiers dépendant de S et de χ, il n'existe pas dans la catégorie des $\mathfrak{G}_E$-représentations sur un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique l, d'extensions non scindées, ayant bonne réduction hors S, de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_\lambda \to U \to \mathbb{F} \to 0.$$

(λ désigne une place divisant l du corps où χ prend ses valaurs sur les idèles finis, et $\bar{\chi}_\lambda$ est la réduction modulo λ du caractère λ-adique associée à χ.)

Ce résultat est impliqué par la conjecture 1.1.14. L'hypothèse l décomposée est très certainement inutile.

Démonstration — Commençons par montrer que pour l suffisamment grand par rapport à S et à χ, toute extension

$$0 \to \bar{\chi}_\lambda \to U \to \mathbb{F} \to 0$$

ayant bonne réduction hors S est telle que les groupes d'inertie en toutes les places finies de E agissent de manière semi-simple.

Comme c'est le cas par hypothèse pour les places ne divisant pas S ni l (car avoir bonne réduction signifie être non ramifiée pour ces places), il suffit de montrer que pour chacune des places v divisant S, ou divisant l, il existe un ensemble fini de nombre premier ne dépendant que de χ et de v, tel que pour l en dehors de cet ensemble, I_v agisse de maniere semi-simple pour tout extension U comme ci-dessus (en effet, ces places v sont en nombre fini).

Soit v une place de E divisant S, mais pas l. Le groupe $\chi(\mathcal{O}^*_{E_v})$ est fini, il existe donc une extension finie E' de E telle que $\chi' = \chi \circ N_{E'/E}$ (où $N_{E'/E}$ est la norme adélique des idèles de E' vers ceux de E) soit non ramifié en les places de w de E' divisant v. Pour w une telle place, et pour λ place de L au-dessus de l, on a d'après la théorie du corps de classes $(\chi'_\lambda)_{|E_w} = (\chi_\lambda)_{|E_w}$ est non ramifiée. De plus, d'après l'hypothèse que χ de poids positif, on a

$$\chi'_\lambda(\mathrm{Frob}_w) \neq \omega_l(\mathrm{Frob}_w).$$

Pour l en dehors d'un ensemble fini (ne dépendant que de v et de χ), on aura donc, pour toute place w-au-dessus de v,

$$\bar{\chi}'_\lambda \neq \bar{\omega}_l$$

sur G_{E_w} (le groupe de Galois de $\bar{E}_w$ sur E_w). On peut donc appliquer le lemme 5.3 à χ'_{E_w} et on en déduit que l'extensuin $U_|E_w$ est non ramifiée. Comme ceci vaut pour toutes les places w divisant v, on voit que l'inertie I_v agit via un quotient fini dans U (ne dépendant que des E_w, donc que de χ et v, pas de U). En choisissant l premier à l'ordre de ce groupe (ce qui n'exclut donc encore qu'un ensemble fini de l, ne dépendant que de χ et de v), on assure que I_v agit de manière semi-simple sur U.

Si v est une place divisant l (on suppose $l \notin S$, ce qui est loisible), l'extension est de Fontaine-Lafaille en v, et compte tenu de l'hypothèse sur les poids, est scindé sur D_v, pour peu que $l \geq w+2$ où w est le poids de χ (cf. [**B-M**], théorème 3.1.3.3) donc *a fortiori* sur I_v

La proposition résulte maintenant de [**Ru**]. Plus précisément, posons $K = E$ (pour être en accord avec les notations de [**Ru**]). Soit l décomposé tel qu'une extension interdite U comme dans la proposition existe, et choisi hors de l'ensemble fini déterminé ci-dessus.

Soit K_0' l'extension K correspondant au noyau de $\bar{\chi}_\lambda$, et L' l'extension de K_0' correspondant au noyau de U. L'extension K_0'/K est de degré le cardinal de l'image de $\bar{\chi}_\lambda$ donc premier à l, tandis que L'/K_0' est d'ordre une puissance de l, non triviale (car sinon U serait scindée). Comme l'inertie agit de manière semi-simple en toutes les places, l'extension L'/K_0' n'est ramifiée nulle part.

Quitte à supposer l premier au nombre de classes de K, on aura encore L/K_0 non triviale, de degré une puissance de l, et K_0/K de degré premier à l, où l'on a posé $L = L'K'$, $K_0 = K_0'K'$, avec K' le corps de classes de Hilbert de K. Soit K_∞ une $\mathbb{Z}_l$-extension de K_0 contenant L. Par des arguments élémentaires de théorie du corps de classes (cf. par exemple [**Ri**], deuxième partie), une telle extension définit un élément non nul dans la $\bar{\chi}_\lambda$-partie de A, la l^∞-torsion du groupe de classes de L. Notons A_∞ la l^∞-torsion du groupes des classes de K_∞. La norme définit un morphisme Galois-équivariant et surjectif (d'après [**S7**]) de A_∞ sur A. Il y a donc aussi un élément non nul dans la $\bar{\chi}_\lambda$-partie de A_∞.

D'après [**Ru**], théorème 4.1 combiné avec la remarque (1) page 37, On sait que $(A_\infty)^{\bar{\chi}_\lambda}$ est tué par un nombre ne dépendant que de $L(1, \chi^{-1})$ (à savoir $L(1, \chi^{-1})$ divisé par une période). D'après nos hypothèses sur le poids de χ, ce nombre est non nul, et pour l premier à ce nombre, on voit que $(A_\infty)^{\bar{\chi}_\lambda}$ est trivial, donc que l'extension considérée n'existe pas.

□

Rappelons enfin un lemme bien connu.

LEMME 5.3. *Soit K un corps local de caractéristique p, $\mathfrak{G}_K$ son groupe de Galois, I_K son groupe d'inertie. Soit ρ une représentation de $\mathfrak{G}_K$ à valeur dans un corps fini de caractéristique $l \neq p$, de la forme*

$$\rho = \begin{pmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix},$$

où χ_1 et χ_2 sont des caractères non ramifiés. Notons $\bar{\omega}_l$ le caractère cyclotomique modulo l, donné par l'action de $\mathfrak{G}_K$ sur les racines l-ièmes de l'unité.

Alors ρ est non ramifiée, sauf peut-être si $\chi_1 = \bar{\omega}_l \chi_2$.

Démonstration — Cela résulte aisément de la description du groupe de Galois modérément ramifié de K, cf. par exemple l'appendice de [**S-T**]. □

6. Fin de la preuve

6.1. La représentation ρ n'est pas endoscopique. Si elle l'était, d'après 4.2.4, on aurait une extension non scindée, ayant bonne réduction hors les places divisant $\Sigma \cup \{p\}$

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1} \to U \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to 0,$$

soit une extension non scindée

$$0 \to \bar{\omega}_l^{-1} \to U \to \mathbb{F} \to 0.$$

Cette extension est nécessairement non ramifiée en v et en $\bar{v}$: cela résulte du lemme 5.3 et du fait que $\bar{\omega}_l^2(\varpi_v) \neq 1$. La proposition 5.2 montre alors que si l est choisi hors d'un ensemble fini (ne dépendant que de Σ et E), ce que l'on suppose désormais, cette extension n'existe pas. Contradiction.

6.2. Où l'on obtient l'extension cherchée.

6.2.1. La représentation ρ' est donc stable.

6.2.2. Si l'on est dans le cas iii) de 4.1.5, on a une extension non triviale de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1} \to U \to \mathbb{F} \to 0,$$

qui a bonne réduction hors (les places de E au dessus de) Σ. Comme $\chi_{1,\lambda}\omega_l^{-1}$ est de poids positif, c'est impossible d'après la proposition 5.2, quitte à supposer que l est en dehors d'un ensemble fini ne dépendant que de Σ.

6.2.3. Si l'on est dans le cas ii) de 4.1.5, on a une extension non triviale de la forme

$$0 \to \bar{\chi}_{1,\lambda} \to U \to \bar{\chi}_{1,\lambda}\bar{\omega}_l^{-1} \to 0,$$

soit une extension non triviale de la forme

$$0 \to \mathbb{F} \to U \to \bar{\omega}_l^{-1} \to 0,$$

ayant bonne réduction hors les places divisant Σ.

Cette extension a bonne réduction partout. (Pour le voir, on utilise l'argument suivant : soit w une place de E où χ est ramifié, i.e. divisant Σ. Quitte à twister π par χ_1^{-1}, la représentation galoisienne associée à π est la somme des caractères triviaux, ω_l^{-1} et $\chi_{1,\lambda}^{-1}$. En particulier, la dimension des I_w-invariants de cette représentations est 2. Comme on ne change pas de compact maximal en w lorsqu'on élève le niveau de π à ρ, la représentation galoisienne r vérifie encore $\dim r^{I_w} \geq 2$. C'est encore le cas, a fortiori, de la reduction considérée $\bar{r}$, dont l'extension considérée est un sous-quotient. Comme $\bar{\chi}_{1,\lambda}^{-1}$ est ramifiée en w (c'est du moins ce qu'on peut supposer quitte à interdire un ensemble fini de λ ne dépendant que de χ), c'est que cette extension a un espace de I_w-invariants de dimension 2, autrement dit, qu'elle est non ramifiée en w.)

D'après la proposition 5.1, c'est impossible quitte à supposer que l est en dehors d'un ensemble fini ne dépendant que de E

6.2.4. On est donc dans le cas i) de 4.1.5, ce qui prouve qu'existent les deux représentations cherchées. A priori, elles ont seulement bonne réduction hors les places de E au-dessus de $\Sigma \cup \{p\}$. Mais il résulte du lemme 5.3 que ces représentations sont non ramifiés en v ou en $\bar{v}$.

Ceci termine la preuve.

Bibliographie

[FGA] A. Grothendieck. *Fondements de la géométrie algébrique* Exposés au séminaire Bourbaki, 1957-1963

[SGA1] A. Grothendieck Séminaire de géométrie algébrique 1 *Revêtements étales et groupe fondamental,* publié par Springer-Berlag, L.N.M 224, 1971

[SGA2] A. Grothendieck Séminaire de géométrie algébrique 2 *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (*SGA* 2) publié par North Holland, 1968

[SGA3] A. Grothendieck et M. Demazure. Séminaire de géométrie algébrique 3 : Schémas en groupes volume 2 : *Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux.* publié par Springer-Verlag, L.N.M. 152

[SGA7] A. Grothendieck Séminaire de géométrie algébrique 7 *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* publié par Springer-Verlag, L.N.M. 288

[EGA] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique,* Publications mathématiques de l'I.H.E.S

[A-M-R-T] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai, *Smooth compactification of locally symmetric varieties,* Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol. IV. , Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975

[Anvers2] Modular Forms of one variable 2, 1972, Springer-Verlag L.N.M. 349

[Anvers3] *Modular Forms of one variable 3, 1972,* Springer-Verlag L.N.M. 350

[A-C] J. Arthur et L. Clozel *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formule,* Annals of Math. Studies 120, Princeton University Press, 1989

[B] E. Bombieri, *Canonical models of surfaces of general type* Publ. Math. IHES, 42, 1973, pages 171-219

[B-B-M] P. Berthelot, L. Breen, W. Messing, *Theorie de Dieudonné cristalline II,* L. N. M. 930, Springer-Verlag, 1982

[BL] P. Blanc, *Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 289 (1979), no. 3, A161–A163.

[BL-RO1] D. Blasius et J. Rogawski *Tate class and arithmetic quotient of two-ball, in* [**ZFPMS**]

[BL-RO3] D. Blasius et J. Rogawski *Zeta functions of Shimura Varieties in* [**Motives**], pages 525-271

[BL-RO2] D. Blasius et J. Rogawski, *Motives for Hilbert modular forms* inventiones mathematicae, 114(1993), 1, pages 55 87

[B-M] C. Breuil et W. Messing, *Torsion étale and crystalline cohomologies,* preprint de l'université d'Orsay, 2001

[BR] C. Breuil, Notes of the course : *p-adic Hodge theory, deformations and local Langlands* Centre de recerca matematica, Advanced course on modular forms and p-adic Hodge theory, Barcelone 2001

[Bou] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique: groupes et algèbres de Lie*

[B-T] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local,* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 41 (1972)

[B-Z] J. Bernstein et A. Zelevinsky, *Induced representations of reductive $\mathfrak{P}$-adic groups. I,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 4, 441–472.

[CA] P. Cartier, *Representations of $\mathfrak{P}$-adic Groups, in* [**Corvallis**], volume 1, pages 111-155

[CAS] W. Casselman, *A new nonunitarity argument for p-adic representations,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28 (1981), no. 3, 907–928 (1982).

[C-F] G. Faltings et C.-L. Chai, *Degeneration of Abelian Varieties* Springer-Verlag Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, 22, 1990

[CH] F. Choucroun, *Sous-groupes discrets des groupes $\mathfrak{P}$-adiques de rang un et arbres de Bruhat-Tits* Israel Journal of math., 93 (1996), pages 195-219

[CL] L. Clozel, *On Ribet's Level-raisaing Theorem for $U(3)$* American Journal of Math., 122 (2000), pages 1265-1287

[CL2] L. Clozel, *Sur la théorie de Wiles et le changement de base non abélien,* International Math. Research Notices, 9 (1995)

[Corvallis] A. Borel and W. Casselman, editors Automorphic forms, representations, and L-functions P.S.P.M XXXIII, 1979 American Math. Society

[C-R] C. Curtis et I. Reiner, *Methods of representation theory,* vol. 1 (1981), Wiley-Interscience

[C-R2] C. Curtis et I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras,* Wiley-Interscience, 1962

[C-S] *G. Cornell et J. Silvermann,* Arithmetic Geometry Springer-Verlag 1985

[D1] P. Deligne, *Travaux de Shimura* Exposé au séminaire Bourbaki, 389

[D2] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, in* [**Anvers2**], pages 501-597

[DA1] J.-F. Dat, *Types et inductions pour les représentations modulaires des groupes p-adiques,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 1, 1–38.

[DA2] J.-F. Dat, *Caractères à valeurs dans le centre de Bernstein,* J. Reine Angew. Math. 508 (1999), 61–83.

[D-R] P. Deligne et M. Rapoport, *Les schémas de module de courbes elliptiques, in* [**Anvers2**], pages 143-316

[DE] M. Demazure *Lecture on p-divisible groups* L.M.N. 302 (1972) Springer-Verlag

[DJ] A. De Jong, *The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with $\Gamma_0(p)$-level structure* J.Algebraic Geom. 2 (1993), no. 4, 667–688.

[F-PR] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou *Autour des conjetcures de Bloch et Kato, Cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, in* [**Motives**], volume 1, pages 599-706

[G] B. Gordon, Canonical Models of Picard Modular Surfaces *in* [**ZFPMS**], pages 1-29

[Ge1] M. Geck, *Irreducible Brauer Charcaters of the 3-dimensional special unitary groups in non-defining characteristics,* Comm. in Algebra, 18(2), 564-584 (1990)

[Ge2] M. Geck Communication personelle, mai 2001

[G] *B. Gross,* Arithmetic on Elliptic Curves with complex multiplication Springer-Verlag L.N.M. 349

[Gr] M. Green, *Koszul cohomology and geometry,* Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987), 177–200, World Sci. Publishing

[HA] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry* Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 52, 1977

[HO] R.-P. Holzapfel, *A class of minimal surfaces in the unknown region of surface geometry* Math. Nachr, volume 98, 1980, pages 211-232

[H-T] M. Harris et R. Taylor, *On the geometry and cohomology of some Shimura varieties* à paraître

[I] L. Illusie *Frobenius et dégénérescence de Hodge* in *Introduction à la théorie de Hodge* Société mathématique de France Panoramas et synthèses, 3, 1996

[K] N. Katz *p-adic Properties of Modular Schemes and Modular forms in* [**Anvers3**], pages 69-190

[KA] S. Kato*On Eigenspaces of the Hecke Algebra with Respect to a Good Maximal Compact Subgroup of a p-adic Reductive Group,* Math. Ann. 257, 1-7, 1981

[KE] D. Keys *Principal series representations of special unitary groups over local fields,* Compositio Math. 51 (1984), no. 1, 115–130.

[KN] D. Knutson, *Algebraic Spaces* Springer-Verlag L.N.M 203 (1971)

[KO] R. Kottwitz, *Points on Some Shimura Varieties Over Finite Fields* Journal of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 2, Apr. 1992

[K-R-Y] S. Kudla, M. Rapoport and T. Yang, *On the derivative of an Eisenstein series of weight one* Internat. Math. Res. Notices 1999, no. 7, 347–385.

[L1] M. Larsen, *Arithmetic Compactification of some Shimura Surfaces* in [**ZFPMS**], *pages 31-45*

[L2] M. Larsen. thèse non publiée 1988

[LAB] J.-P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base,* Astérisque No. 257 (1999), Société mathématique de France

[LAZ1] Xavier Lazarus *Module universel non ramifié pour un groupe réductif p-adique,* thèse de l'université d'Orsay, 2000, non publiée.

[LAZ2] Xavier Lazarus *Module universel en caractéristique $l > 0$ associé à un caractère de l'algèbre de Hecke de* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique, avec $l \neq p$,* Journal of Algebra, 213 (1999), no. 2, 662–686.

[L-MB] G. Laumon et L. Moret-Bailly, *Champs algébriques* Springer-Verlag Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, 39, 2000

[M] D. Mumford, *Abelian Varieties* Oxford University Press, 1970

[Mi] J. Milne, *The points of Shimura varieties modulo a prime of good reduction, in*[**ZFPMS**], pages 151-253

[Mo] B. Mortimer *The modular permutation representations of the known doubly transitive groups* Procedings of the London math. society, vol XLII, 1980, pages 1-20

[Moo] B. Moonen *Models of Shimura Varieties, in* Galois representations in Arithmetic algebaric geometry, A. Scholl, R. Taylor, Editors London mathematical Society lecture notes series 254, Cambridge university press, 1998

[Motives] U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre editors *Motives* P.S.P.M LV American Math. Society, 1990

[O] F. Oort *Moduli of Abelian Varieties in Positive Characteristic* Barsotti Symposium in Algebraic Geometry Academic Press, 1994

[Ra] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. France 102 (1974), 241–280

[Rap] M. Rapoport, *On the bad reduction of Shimura varieties. in* Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), 253–321, Perspect. Math., 11, Academic Press

[Ri] K. Ribet, *A modular construction of unramified extension of* $\mathbb{Q}(\mu_p)$, Invent. Math. 34 (1976), no. 3, 151–162

[Ro1] J. Rogawski, *Automorphic representations of unitary groups in three variables,* Annals of Math. Studies 123 (1990) Princeton Universuty Press

[Ro2] J. Rogawski, *Analytic expression for the number of points mod p* pages 65-109 *in* [**ZFPMS**]

[Ro3] J. Rogawski, *The multiplicity formula for A-packet* pages 395-419 *in* [**ZFPMS**]

[Ru] K. Rubin, *The main conjecture of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields* Inventiones Math. 103 (1991)

[Ru2] K. Rubin, *Euler Systems,* Annals of math. studies 147 (2000), Princeton University Press

[R-Z1] M. Rapoport et T. Zink *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik,* Invent. Math. 68 (1982), no. 1, 21–101.

[R-Z2] M. Rapoport et T. Zink *Period spaces for p-divisible groups* Annals of Mathematics Studies, 141. Princeton University Press, 1996

[S1] J.-P. Serre, *Représentation linéaires des groupes finis,* Hermann, Paris, Collections Méthodes, 1967

[S2] J.-P. Serre, *Cours au collège de France 1987-1988,* photocopies de notes manuscrites anonymes – voir le résumé dans les œuvres complètes de Serre, volume 3

[S3] J.-P. Serre, *Corps locaux* Actualités scientifiques et industrielles, 1296 (1968). Hermann

[S4] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2 Société mathématique de France Astérisque, 42, 1977

[S5] J.-P. Serre, *Two letters on quaternion and modular forms,* Israel Journal of Math. 95 (1996), pages 281–299.

[S6] J.-P. Serre, *Abelian l-adic representations and elliptic curves,* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968

[S7] J.-P. Serre, *Classes des corps cyclotomiques (d'après K. Iwasawa),* Séminaire Bourbaki, Vol. 5, Exp. No. 174, 83–93, Soc. Math. France, Paris

[S-T] J.-P. Serre et J. Tate, *Good Reduction of Abelian Varieties* Ann. of Math. (2) 88 1968 492–517

[Sak] F. Sakai, *Weil divisors on normal surfaces* Duke Math. J., 51 (1984), no. 4, 877–887.

[Sat] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{P}$-adic fields,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 18 1963 5–69.

[Sch] N. Schappacher, *Periods of Hecke Characters,* Springer Verlag, Lectures Notes in Math. 1301 (1988)

[Shim] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions* Publications of the mathematical society of Japan, 11, 1971 (seconde édition : Princeton Paperbacks, 1994)

[SH] T. Shintani *On automorphic forms on unitary groups of order 3,* non publié

[Si] J. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic Theory of Elliptic Curves* Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 151, 1994

[T] J. Tits, *Reductive Groups over Local Fields, in* [**Corvallis**] volume 1, pages 29-69

[Tate] J. Tate, *Number theoretic background, in* [**Corvallis**], volume 2, pages 3-26

[Tay] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms* Inventiones math. 98, 265-280 (1989)

[V1] M.-F. Vignéras, *Représentations l-modulaire d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$.* Birkhauser. Progress in Math. 137, 1996

[V2] M.-F. Vignéras, *Induced R-representations of p-adic reductive groups,* Selecta Math. (N.S.) 4 (1998), no. 4, 549–623.

[VA] A. Vasiu, *Integral canonical models of Shimura varieties of preabelian type,* Asian J. Math. 3 (1999), no. 2, 401–518

[W] L. Washington, *Introduction to cyclotomic Fields* Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 83, 1980

[ZFPMS] Edited by R. Langlands and D. Ramakhrisnan, *the Zeta Functions of Picard Modular Surfaces, 1992, CRM* Publications C.R.M., Montréal

Numéro d'impression 2395

Premier trimestre 2002

Résumé. L'objet principal de ce travail est de construire des extensions de caractères galoisiens prévues par les conjectures de Bloch et Kato, en utilisant des congruences entres formes automorphes endoscopiques et formes stables pour des groupes unitaires a trois variables. De telles congruences sont obtenues à partir de cas démontrés par Rogawski des conjectures d'Arthur, et de résultats d'augmentation du niveau. Nous obtenons aussi divers résultats sur le module universel de Serre, sur les réductions modulo l des représentations d'un groupe compact, et sur la géométrie des surfaces modulaires de Picard.

Mots clés : Surfaces modulaires de Picard, réduction semi-stable, groupes unitaires, formes automorphes, immeubles, représentations modulaires, changement de niveau, représentations galoisiennes, conjectures d'Arthur, endoscopie, extensions.

Abstract. The main aim of this work is to construct some extensions of Galois characters which are predicted by the conjectures of Bloch et Kato ; we use congruences between endoscopic and stable automorphic forms for the unitary groups in three variables. We get those congruences by using some cases of Arthur conjecture (proved by Rogawski) and some level-raising results. We obtain also results about the universal module of Serre, mod l reductions of representations of a compact group, and the geometry of Picard modular surfaces.

Keywords : Picard modular surfaces, semi-stable reduction, unitary groups, automorphic forms, buildings, modular representations, level raising, Galois representations, endoscopy, extensions.